




3. Optimální odhad stavů systému obecná část

Hana Fitzová

Brno, 2008



Úvod

- Řada systémů je zadána přímo svým vnitřním popisem.
- Pozorovateli je skryta přímá informace o hodnotách stavových proměnných.
- Měřicí přístroje podávají informaci o stavu systému.
- Úkol: jak z pozorovaných výstupů y určit co nejpřesněji stavy x .
- Problém je vyřešen pro lineární systém s gaussovskými šumy (Kalmanův filtr).

Informace o stavech I

- Mějme neznámý náhodný vektor $X \in \mathcal{L}_2^{n_x}$ a vektor naměřených dat $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, který je realizací náhodného vektoru $Z \in \mathcal{L}_2^{n_z}$.
- Dále známe simultánní hustotu pravděpodobnosti $p(x, z)$.
- Před měřením z je informace o X obsažena pouze v hustotě $p(x, z)$ a rozložení X udává tzv. **apriorní hustota**

$$p_0(x) = \int p(x, z) dz$$

Informace o stavech II

- Po provedení měření z je informace obohacena a rozložení X je dáno podmíněnou hustotou, tzv. **aposteriorní hustotou**

$$p_1(x) = p(x|z)$$

- Tyto úvahy jsou jádrem tzv. bayessovského přístupu k optimálnímu odhadu.
- Jediným skutečným rozložením je rozložení apriorní, avšak aposteriorní rozložení má některé výhodné vlastnosti s ohledem na co nejpřesnější odhad realizace vektoru X , ne hustoty vektoru X .

Kriterium nejmenších čtverců

- Přesnost odhadu (estimace) se nejčastěji měří kriteriem nejmenších čtverců (least mean squares).

- **Střední kvadratická chyba**

Bud' $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ množina *přípustných estimátorů* náhodného vektoru X . Pro každý přípustný estimátor $y \in \mathcal{E}$ zavedeme *střední kvadratickou chybu* vztahem

$$J(y) = E((X - y)^T (X - y))$$

Optimální estimátor I

- **Optimální estimátor**

Estimátor $\hat{X} \in \mathcal{E}$ nazveme *optimálním* podle kriteria nejmenších čtverců (optimální MS estimátor), pokud platí

$$J(\hat{X}) = \min_{y \in \mathcal{E}} J(y)$$

- **Optimální apriorní estimátor**

Střední hodnota EX je optimálním estimátorem na množině všech apriorních estimátorů.

Při označení $\tilde{X} = X - \hat{X}$ platí $E(\tilde{X}) = 0$ (odhad je nestranný) a $D(\tilde{X}) = D(X)$.

Optimální estimátor II

- **Optimální aposteriorní estimátor**
Podmíněná střední hodnota $E(X|z)$ je optimálním estimátorem na množině všech aposteriorních estimátorů.
- Opět při označení $\tilde{X} = X - \hat{X}$ platí $E(\tilde{X}) = 0$ (odhad je nestranný) a $D(\tilde{X}) = D(X|Z)$.
- Jsou-li vektory X a Z nezávislé, pak $p(x, z) = p(x)p(z)$ a tedy i $E(X|z) = E(X)$. Tedy při nezávislosti apriorní a aposteriorní estimátor splývají.

Podmíněné normální rozdělení

Nechť

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{zx} & \Sigma_z \end{bmatrix} \right)$$

Pak aposteriorní náhodná veličina $X|z$ má normální rozložení se střední hodnotou $E(X|z)$ a varianční maticí $D(X|z)$, kde

$$E(X|z) = \mu_x + \Sigma_{xz} \Sigma_z^{-1} (z - \mu_z)$$

$$D(X|z) = \Sigma_x - \Sigma_{xz} \Sigma_z^{-1} \Sigma_{zx}$$

Lineární MS estimátor I

Optimální MS estimátor na přípustné množině lineárních estimátorů

$$\mathcal{E} = \{y = Az + b : A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_z}, b \in \mathbb{R}^{n_x}\}$$

je estimátor

$$\hat{X}_{LMS} = \mu_x + \Sigma_{xz} \Sigma_z^{-1} (z - \mu_z)$$

kde $\mu_x = EX$, $\mu_z = EZ$, $\Sigma_{xz} = C(X, Z)$, $\Sigma_z = DZ$.

Lineární MS estimátor II

- Lineární MS estimátor \hat{X}_{LMS} je nestranný.
- Je-li vektor $(X^T, Z^T)^T$ rozložen normálně, pak estimátory \hat{X}_{MS} a \hat{X}_{LMS} splývají.

Příklad

Náhodná veličina X má rozložení $X \sim Rs(0, 1)$. Tuto veličinu měříme pomocí náhodné veličiny Z . Vztah mezi veličinami je následující:

$$Z = \ln \left(\frac{1}{X} \right) + V$$

kde $V \sim Ex(1)$, $p(v) = p_V(x)$ je šum měření.

Vypočtete optimální lineární MS estimátor veličiny X .

Odhad stavů dynamického systému

Mějme diskrétní dynamický systém

$$(1) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_t, v_t)$$

$$(2) \quad y_t = g(x_t, u_t, w_t)$$

s počátečním rozložením $p(x_0)$.

- Budeme konstruovat optimální odhady stavů x_0, x_1, \dots, x_n rekurentním způsobem.
- Pro odhad stavů máme k dispozici jen časové řady vstupů a výstupů.
- Aktuální stav x_t se vypočte na základě minulého stavu x_{t-1} a nových dat u_t a y_t .

Odhad stavů DS (II)

- Rozložení šumu v_t pokládáme za známé, je tedy rovnicí (1) jednoznačně určena podmíněná hustota pravděpodobnosti $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$.
- Rovnicí (2) je určena podmíněná hustota pravděpodobnosti $p(y_t|x_t, u_t)$.

- Označíme

$$(3) \quad D_t = \{u_0, y_0, \dots, u_t, y_t\}$$

data dostupná do času t .

Odhad stavů DS (III)



- Obě rovnice (1) a (2) jsou na minulých datech nezávislé, lze tedy psát

$$(4) \quad p(x_{t+1}|x_t, u_t, D_{t-1}) = p(x_{t+1}|x_t, u_t)$$

$$(5) \quad p(y_t|x_t, u_t, D_{t-1}) = p(y_t|x_t, u_t)$$

Tj. stav x_t obsahuje veškerou informaci obsaženou v datech D_{t-1} potřebnou pro predikci výstupu y_t .

- Dále řízení u_t neovlivňuje přímo stav x_t (přirozené podmínky řízení), což lze zapsat jako:

$$(6) \quad p(x_t|D_{t-1}, u_t) = p(x_t|D_{t-1})$$



Odhad stavů DS (IV)

- Jsme v čase t , máme k dispozici data D_{t-1} , chceme odhadnout hodnotu x_t .
- Nejlépe ji aproximuje podmíněná hustota $p(x_t|D_{t-1})$, tzv. **apriorní hustota**.
- Předpokládáme, že apriorní hustota je známá funkce. Po doplnění dat hodnotami u_t, y_t máme k dispozici data D_t , díky nimž můžeme aktualizovat odhad stavu x_t .
- Hledáme tedy novou podmíněnou hustotu $p(x_t|D_t)$, což je tzv. **aposteriorní hustota**.

Věta (aposteriorní hustota)

Aposteriorní hustota $p(x_t|D_t)$ je dána vztahem

$$p(x_t|D_t) = \frac{p(y_t|x_t, u_t)}{p(y_t|u_t, D_{t-1})}p(x_t|D_{t-1})$$

- Důkaz plyne z Bayessova řetězového pravidla o podmíněných hustotách.
- Přejchod od apriorní hustoty k hustotě aposteriorní se nazývá **datový krok**.
- Pro rekurentní výpočty je třeba ještě odvodit přechod obrácený – tzv. **predikční krok**.

Věta (predikční krok)

Predikční krok odhadu stavu je dán vztahem

$$p(x_{t+1}|D_t) = \int p(x_{t+1}|x_t, u_t)p(x_t|D_t)dx_t$$

- Důkaz plyne z řetězového pravidla, z rovnice (4) a dokončí se marginalizací rozdělení x_{t+1} podle x_t .
- Posledním krokem je zahájení rekurze. Je třeba znát počáteční hustotu

$$p(x_0|D_{-1}) = p(x_0)$$

která je předem známa nebo se určuje zkusmo.

Spojení kroků

- Datový a predikční krok lze spojit do jednoho, ale ztratíme tím aposteriorní hustoty, které jsou obecně lepší než hustoty apriorní.

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|D_t) &= \int \frac{p(x_{t+1}|x_t, u_t)p(y_t|x_t, u_t)}{p(y_t|u_t, D_{t-1})} p(x_t|D_{t-1}) dx_t = \\ &= \frac{p(x_{t+1}, y_t|u_t, D_{t-1})}{p(y_t|u_t, D_{t-1})} \end{aligned}$$