


4. Optimální odhad stavů systému algoritmy + příklady

Hana Fitzová

Brno, 2008



Obsah



- Kalmanův filtr
- Smoothing
- Příklady – odhad polohy lodi, mezery výstupu HDP, reálné úrokové míry a reálného kurzu
- Rozšířený Kalmanův filtr
- Odhad nelineárních systémů metodou Monte Carlo
- Vážený Bootstrap algoritmus



Kalmanův filtr

- Kalmanův filtr je analogií výše uvedené nelineární rekurze pro speciální případ, kdy jsou stavy x i výstupy y rozloženy normálně.
- Pak je apriorní i aposteriorní hustota opět normální.
- Normálně rozloženou náhodnou veličinu plně určuje její střední hodnota a rozptyl.
- V průběhu výpočtu tedy stačí sledovat pouze tyto dvě číselné charakteristiky, čímž se celý výpočet zjednodušuje.
- Mají-li být stavy rozloženy normálně, musí být příslušný dynamický systém *lineární s gaussovskými šumy*, což je největší slabina tohoto algoritmu.

Věta (Kalmanův filtr I)

Mějme diskrétní stochastický systém tvaru:

$$(1) \quad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + v_t$$

$$(2) \quad y_t = Cx_t + Du_t + w_t$$

splňující: $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, $v_t \sim N(0, \Sigma_v)$, $w_t \sim N(0, \Sigma_w)$,
 $Ev_t w_t^T = 0$, $Ex_0 v_t^T = 0 \quad \forall t$, kde vektor μ_0 a matice
 $\Sigma_0, \Sigma_v, \Sigma_w$ jsou známé.

Nechť jsou známa data D_t . Označme $x_{t|k} = x_t | D_k$.

Věta (Kalmanův filtr II)

Pak apriorní estimátor $x_{t|t-1}$ a a posteriorní estimátor $x_{t|t}$ jsou normální pro všechna t :

$$x_{t|t-1} \sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$$

$$x_{t|t} \sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t})$$

kde střední hodnoty $\mu_{t|t-1}, \mu_{t|t}$ a varianční matice $\Sigma_{t|t-1}, \Sigma_{t|t}$ se vypočtou dle následujících rekurentních vztahů:

Věta (Kalmanův filtr III)

$$(3) \quad \mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - C\mu_{t|t-1} - Du_t)$$

$$(4) \quad \Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t C \Sigma_{t|t-1}$$

$$(5) \quad \mu_{t+1|t} = A\mu_{t|t} + Bu_t$$

$$(6) \quad \Sigma_{t+1|t} = A\Sigma_{t|t}A^T + \Sigma_v$$

$$(7) \quad K_t = \Sigma_{t|t-1}C^T(C\Sigma_{t|t-1}C^T + \Sigma_w)^{-1}$$

První dva vztahy tvoří tzv. datový krok algoritmu, druhé dva vztahy krok predikční, poslední vztah je tzv. Kalmanovo zesílení (Kalmanův zisk).

Smoothing v KF

Zpětný běh filtru na základě informací z času $t = 1, \dots, N$

$$(8) \quad \mu_{t|N} = \mu_{t|t} + F_t(\mu_{t+1|N} - \mu_{t+1|t})$$

$$(9) \quad \Sigma_{t|N} = \Sigma_{t|t} - F_t(\Sigma_{t+1|t} - \Sigma_{t+1|N})F_t^T$$

$$(10) \quad F_t = \Sigma_{t|t}A^T\Sigma_{t+1|t}^{-1}$$

Příklad – loď (1)

- Loď se pohybuje po rovníku východním směrem rychlostí 10 námořních mil za hodinu. Okamžitou rychlost lodi ovlivňují náhodné poryvy větru a nárazy vln.
- Navigátor lodi odhaduje každou hodinu zeměpisnou délku lodi l a rychlost lodi $s = dl/dt$ v mph. V čase $t = 0$ odhadl navigátor polohu $l_0 = 0$ a rychlost $s = 10$. Dále pak zaznamenal údaje:

čas	1	2	3	4	5	6
poloha	9"	19.5"	29"	38.4"	50"	59.5"

Příklad – loď (2)

- Označíme-li l_t, s_t polohu a rychlost lodi v čase t , pak je úlohou navigátora optimální odhad veličin l_t, s_t .
- Počáteční odhady můžeme modelovat jako nezávislé náhodné veličiny s normálním rozložením. Rozptyly odhadů jsou sledovány a jejich odhady jsou $Dl_0 = 2, Ds_0 = 3$.
- Nejprve popíšeme chování systému. Během hodiny t se loď pohybuje rychlostí s_t , takže její poloha se změní na:

$$l_{t+1} = l_t + s_t$$

Příklad – loď (3)

- Rychlost kolísá díky náhodným vlivům, což popíšeme pomocí náhodné veličiny $e_t \sim N(0, 1)$:

$$s_{t+1} = s_t + e_t$$

- Rozptyl měření sextantu udávaný výrobcem je $\Sigma_w = 2$.

- Stavový vektor definujeme jako $x_t = \begin{pmatrix} l_t \\ s_t \end{pmatrix}$

- S využitím vztahů (9)-(13) odhadněte optimální stavy tohoto systému pomocí Kalmanova filtru.

Návod (lod')

- Načtěte matice systému a data ($A, B, C, D, \Sigma_v, \Sigma_w, x_0, \Sigma_{x_0}, U, y, \dots$) $\mu_{0|-1} = x_0, \Sigma_{0|-1} = \Sigma_{x_0}$
- V cyklu spočtěte $\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t}, \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1|t}, \mu_{t|N}, \Sigma_{t|N}$
- Výsledky vykreslete do obrázků: predikce + filtrace + smoothing pro polohu, totéž pro rychlost; dále vývoj rozptylu (f+p+s) obou veličin.
- Vytvořte funkci, která bude provádět jednotlivé kroky Kalmanova filtru včetně smoothingu a příklad upravte tak, aby tuto funkci využíval. Vstupními parametry funkce bude: $y, U, A, B, C, D, \Sigma_v, \Sigma_w, x_0$ a Σ_{x_0} .
Výstupy budou: $\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t}, \mu_{t+1|t}, \Sigma_{t+1|t}, \mu_{t|N}, \Sigma_{t|N}$.

Příklad – mezera výstupu (1)

- Příklad na odhad české mezery výstupu (odhad hospodářského cyklu)
- Předpokládáme, že mezera výstupu je bílý šum
- Předpokládáme, že potenciální produkt je náhodná procházka s tempem růstu
- Budeme pracovat s logaritmy (rozdíl logaritmů je zhruba tempo růstu)

Příklad – mezera výstupu (2)

- Y je produkt
- Y^{EQ} je potenciální produkt
- Y^{GAP} je mezera výstupu
- $y = \log(Y)$
- $v_1(t), v_2(t)$ jsou šumy
- gr, gr_{ss} jsou aktuální a steady-state tempo růstu

Základní model (ZM)

$$y^{EQ}(t) = y^{EQ}(t-1) + gr + v_1(t)$$
$$y^{GAP}(t) = v_2(t)$$

$$y(t) = y^{EQ}(t) + y^{GAP}(t)$$

Počáteční nastavení (ZM)

- Potenciál je mnohem rigidnější než mezera výstupu, proto zvolíme $\Sigma_v = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Výstupní rovnice je deficitní, tj. $\Sigma_w = 0$
- Vyjdeme z toho, že počátkem 90. let jsme byli na potenciálu, tj. $x_0 = [y(1); 0]$
- Nejistota o volbě počáteční podmínky je veliká:
 $\Sigma_{x_0} = 10 \cdot \Sigma_v$

Rozšířený model (RM)

$$\begin{aligned}y^{EQ}(t) &= y^{EQ}(t-1) + gr(t) + v_1(t) \\y^{GAP}(t) &= v_2(t) \\gr(t) &= 0.6gr(t-1) + 0.4gr_{ss}\end{aligned}$$

$$y(t) = y^{EQ}(t) + y^{GAP}(t)$$

Počáteční nastavení (RM)

- Další stavovou proměnnou je tempo růstu, je persistentní (autoregrese), blíží se steady-state růstu, který je aproximován průměrným tempem růstu HDP.
- Obdobně jako výše zvolíme:
$$\Sigma_v = [0.0001 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0.002]$$
- $\Sigma_w = 0$
- $x_0 = [y(1); 0; 2]$
- $\Sigma_{x_0} = 100 \cdot \Sigma_v$

Návod

- Převeďte systém do stavového tvaru a matice systému dopište do předchystaného souboru `mezera.m`
- Data k příkladu naleznete v souboru `czech_data.m`
- Proveďte odhad stavů systému pomocí Kalmanova filtru, získané výsledky (odhadnutý vývoj potenciálního produktu a mezery výstupu) vykreslete do obrázků a okomentujte je
- Totéž proveďte pro rozšířený model a sledujte vliv změn nastavení rovnovážného tempa růstu a počátečních podmínek na dosažené výsledky

Příklad – transmisní kanály

- Příklad na odhad rovnovážné úrovně české a německé reálné úrokové míry a rovnovážné úrovně reálného kurzu CZ/GER
- Data k příkladu naleznete v souboru `cz_data.m`
- Odhad neznámých stavů se nalézá v souboru `kanaly.m`
- Jedná se o interdependentní systém se 4 stavovými rovnicemi, je nutno jej nejprve převést

Označení



- Jedná se o čtvrtletní údaje za období Q1-1995 až Q4-2004
- Předpona *gr* v názvu označuje německá data
- Přípona *eq* v názvu označuje rovnovážnou úroveň veličiny
- $rs4$, $rr4$ je nominální resp. reálná úroková míra
- CPI , pie je index CPI, resp. inflace CPI
- $prem$ je riziková prémie
- ls , lz je logaritmus nominálního resp. reálného směnného kurzu CZ/GER



Rozšířený Kalmanův filtr I



- Princip rozšířeného Kalmanova filtru spočívá v tom, že nelineární dynamický systém v každém kroku přibližně nahradíme lineárním dynamickým systémem a na tento pak aplikujeme obyčejný Kalmanův filtr.
- Vztahy odvozené výše nelze užít přímo, poněvadž linearizace vede na jiný typ systému (viz dále).



Rozšířený Kalmanův filtr II

Mějme nelineární diskrétní stochastický systém:

$$(11) \quad x_{t+1} = f(x_t, u_t) + v_t$$

$$(12) \quad y_t = g(x_t, u_t) + w_t$$

s počáteční podmínkou $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$.

Rozšířený Kalmanův filtr definujeme jako algoritmus výpočtů následujících estimátorů:

$$(13) \quad x_{t|t-1} \sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$$

$$(14) \quad x_{t|t} \sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t})$$

$$(15) \quad x_{t|N} \sim N(\mu_{t|N}, \Sigma_{t|N})$$

Rozšířený Kalmanův filtr III

$$(16) \quad \mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - g(\mu_{t|t-1}, u_t))$$

$$(17) \quad \Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t C_t \Sigma_{t|t-1}$$

$$(18) \quad \mu_{t+1|t} = f(\mu_{t|t}, u_t)$$

$$(19) \quad \Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t^T + \Sigma_v$$

$$(20) \quad K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t^T (C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_w)^{-1}$$

$$(21) \quad \mu_{t|N} = \mu_{t|t} + F_t(\mu_{t+1|N} - \mu_{t+1|t})$$

$$(22) \quad \Sigma_{t|N} = \Sigma_{t|t} - F_t(\Sigma_{t+1|t} - \Sigma_{t+1|N})F_t^T$$

$$(23) \quad F_t = \Sigma_{t|t} A_t^T \Sigma_{t+1|t}^{-1}$$

Rozšířený Kalmanův filtr IV

kde matice A_t, C_t jsou následující Jakobiány:

$$A_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_{t|t}) \quad C_t = \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_{t|t-1})$$

- Vztahy 19-20 představují filtrační (datový) krok.
- Vztahy 21-22 představují predikční krok.
- Vztahy 24-25 představují zpětný běh filtru (smoothing).

Princip metody Monte Carlo I

- Metoda Monte Carlo je založena na tom, že informaci o rozložení náhodné veličiny nese náhodný výběr z tohoto rozložení.
- Čím větší je rozsah výběru, tím je informace přesnější.
- Pro náhodný vektor $x \in \mathcal{L}^{n_x}$ máme náhodný výběr (x_1, \dots, x_n) rozsahu n , který obsahuje vzorky $x_i \in \mathcal{R}^{n_x}$.
- Empirická hustota pravděpodobnosti získaná z náhodného výběru je aproximací skutečné hustoty pravděpodobnosti náhodného vektoru x .

Princip metody Monte Carlo II



- Empirickou hustotu pravděpodobnosti lze psát jako:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i)$$

kde $\delta(x) : \mathcal{R}^{n_x} \rightarrow \mathcal{R}$ je tzv. Diracova funkce.

- Diracova funkce

$$\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(x)$$

$$\delta_h(x) = \frac{1}{h} \text{ pro } 0 < x < h, \quad \delta_h(x) = 0 \text{ jinak}$$



Princip metody Monte Carlo III



- Dále přiřadíme jednotlivým vzorkům x_i váhy $w_i \geq 0$ tak, aby suma všech vah byla rovna jedné.
- Empirická hustota pravděpodobnosti je pak tvaru:

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n w_i \delta(x - x_i)$$



Vážený Bootstrap algoritmus I

Mějme dynamický systém tvaru:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t, u_t, v_t) \\ y_t &= g(x_t, u_t, w_t)\end{aligned}$$

s počátečním stavem x_0 a s empirickou hustotou

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n w_i(0| - 1) \delta(x - x_i(0| - 1))$$

Mějme data D_t . Pak odhady $x_{t|t-1}, x_{t|t}, x_{t|N}$ s empirickými hustotami

Vážený Bootstrap algoritmus II

$$p_n(x_{t|t-1}) = \sum_{i=1}^n w_i(t|t-1) \delta(x - x_i(t|t-1))$$

$$p_n(x_{t|t}) = \sum_{i=1}^n w_i(t|t) \delta(x - x_i(t|t))$$

$$p_n(x_{t|N}) = \sum_{i=1}^n w_i(t|N) \delta(x - x_i(t|N))$$

jsou spočteny *váženým bootstrap algoritmem* právě když platí:

Vážený Bootstrap algoritmus III

- Filtrační (datový) krok: hustoty a váhy se přepočítávají; vzorky zůstávají stejné.

$$x_i(t|t) = x_i(t|t-1)$$

$$\bar{w}_i(t|t) = p(y(t)|x_i(t|t-1), u(t)) w_i(t|t-1)$$

$$w_i(t|t) = \frac{\bar{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^n \bar{w}_j(t|t)}$$

- Predikční krok: hustoty a vzorky se přepočítávají (vzhledem k jejich významnosti); váhy zůstávají stejné.

$$x_i(t+1|t) = f(x_i(t|t), u(t)) + v_i(t)$$

$$w_i(t+1|t) = w_i(t|t)$$

Vážený Bootstrap algoritmus IV

- Zpětný běh (smoothing): hustoty a váhy se přepočítávají; vzorky zůstávají stejné.

$$x_i(t|N) = x_i(t|t)$$

$$\bar{w}_i(t|N) = w_i(t|t) \sum_{j=1}^n w_j(t+1|N) p(x_j(t+1|N)|x_i(t|N), u(t))$$

$$w_i(t|N) = \frac{\bar{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^n \bar{w}_j(t|t)}$$