F2120 - Kolokvium 2007/2008!
Součástí řešení je i dohledání vzorců či dat potřebných k vyřešení příkladů.

1. Předpokládejme, že ryba má průměrnou hustotu 1030kgm^{-3}, zatímco ji obklopující voda má hustotu 1000kgm^{-3}. Jeden ze způsobů, jakým ryba zabrání "potopení se na dno" je vzduchový měchýř (hustota vzduchu je 1.2kgm^{-3}). Jaká část celkového objemu ryby musí být tvořena vzduchem, aby ryba volně plovala ve vodě? Předpokládejte, že celkový objem rybí tkáně je pevně dán (označme jej V), takže aby ryba zvýšila objem ve vzduchovém měchýři o U, musí o tento objem vzrůst i celkový (vnější) objem ryby.
2. Maximální tok krve ze srdce je 500mls^{-1}. Má-li aorta průměr 2.5cm a proudění je Poiseuillovské, určete následující veličiny: průměrná rychlost, maximální rychlost ve středu cévy a gradient (pokles) tlaku podél cévy.

   Za viskozitu krve pro jednoduchost dosazujte $\eta = 10^{-3}\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$.

   Poznámka: Závislost rychlosti Poiseuillovského proudění na poloze r od středu trubice poloměru R je dána jako

   $$v(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \tag{1}$$

   přičemž v_0 lze zapsat pomocí viskozity a tlakového spádu.
3. Ryby jsou studenokrevné a využívají kyslík rozpuštěný v okolní vodě s pomocí žaber. Mohla by ryba být teplokrevná a stále dýchat 'vodu'? Předpokládejte, že taková ryba si udržuje teplotu o 20K vyšší než je teplota okolí. Dále uvažujme, že se žábry dýcháním ochladí na teplotu okolí. Spočtěte energii potřebnou na znovu ohřátí 1l krve na tělesnou teplotu ryby. Jeden litr krve obsahuje kyslík postačující na vytvoření 4kJ metabolické energie.

   Porovnejte potřebnou a získatelnou energii. Co toto srovnání implikuje pro teplokrevnou rybu?

   Proč musí teplokrevní vodní savci (například delfín) dýchat vzduch?

   Použijte následující hodnoty pro organismus ryb - $c = 4.2\text{kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ a $\rho = 10^3\text{kgm}^{-3}$.
4. Uvažujme (kardio?)stimulátor dodávající puls každou sekundu. Parametry pulsu jsou $I = 2\text{mA}$, $U = 1\text{V}$ $t = 1\text{ms}$. Stimulátory zpravidla napájí lithium-iodidová baterie, která může dodat celkový náboj 2Ah (ampér-hodiny).

   (a) Jaká je energie předaná jedním pulzem?
   Srovnejte s kinetickou energií mravence na procházce, uvažujte hmotnost $m = 0.1\text{g}$ a rychlost $v = 2.5\text{cms}^{-1}$.
   (b) Jaký je průměrný výkon? Určete nejprve výkon pouze během pulzu a posléze i průměrný výkon zahrnující i dobu mimo puls.
   (c) Jak dlouho baterie vydrží?
   (d) Odpověď z části 4c je nadhodnocení, neb napětí dodávané baterií začne klesat dříve než dojde k úplnému vybití. Částečně je to způsobeno tím, že stimulátor potřebuje stálý, byť nevelký, proud. Pro uvažovaný stimulátor, přidejte konstantní proudový 'signál' $I_0 = 5\mu\text{A}$ a životnost baterie určete následovně - baterie přestává fungovat, došlo-li k vybití 75% celkového náboje.
   Jak dlouho vydrží baterie tentokrát?
5. Je možné, že Lorentzova síla umožňuje mořským žralokům a rejnokům orientovat se v magnetickém poli [Frankel(1984)]. Může-li žralok detektovat elektrické pole o intenzitě $E_0 = 0.5\text{mVm}^{-1}$, jak rychle by musel plavat v magnetickém poli Země, aby zakoušel sílu ekvivalentní síle působící na nabitou částici v elektrickém poli velikosti E_0? Magnetické pole Země je přibližně $5 \times 10^{-5}\text{T}$.

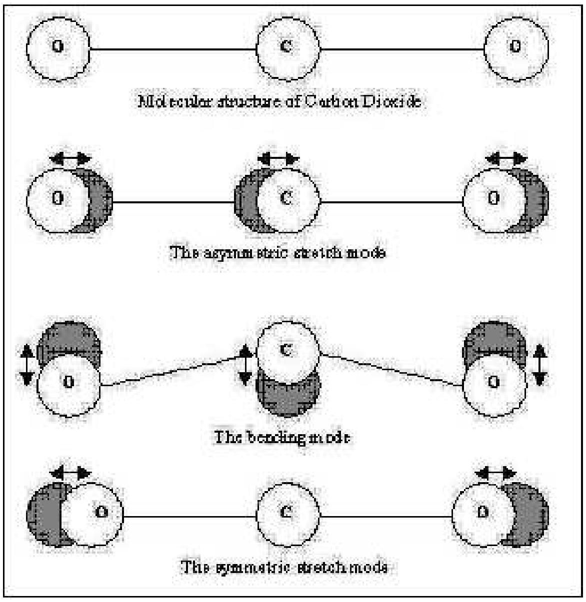
   Žralok může nejrychleji plavat [1] přibližně 40kmh^{-1}, může se tedy takto orientovat?

[1]Zdroj: http://www.elasmo-research.org/education/topics/menu/topics_home.htm

6. *Kmity molekuly CO_2*

Molekula CO_2 je lineární (viz. Obrázek 1) a protože chemická vazba je částečně polární, v elektromagnetickém poli vhodné frekvence se rozkmitá. Uvažujme pouze kmity v podélné ose molekuly.

Obrázek 1: Molekula CO_2



(a) Vypočtěte (nenulové) vlastní frekvence dvou kmitových módů molekuly, předpokládáte-li že tuhost chemické vazby je pro obě vazby shodná a je rovna přibližně $1400 \mathrm{Nm}^{-1}$. Do jaké oblasti elektromagnetického záření frekvence kmitů patří?

Nápověda: určete vztahy mezi amplitudami výchylek, odtud jsou-li kmity (sousedních atomů) ve fázi či v protifázi.

(b) Jeden ze spočtených módů je pro absorpci elektromagnetického záření neaktivní. Který je to a proč? Na jaké vlnové délce absorbuje druhý kmit?

(c) Spočtěte limity frekvencí obou kmitových módů pro hmotnosti atomů kyslíku, nebo atomu uhlíku jdoucí k nekonečnu, tj.

$$\lim_{m_1 \to \infty} \omega_{1,2}, \quad \lim_{m_2 \to \infty} \omega_{1,2}.$$

Jaké fyzikální situaci tyto limitní případy odpovídají? Tj. jak by jste je realizovali pomocí závaží kmitajících na pružině (například namalujte obrázek)?

(d) Obecný postup vede ke třem řešením - již nalezené nenulové módy $\omega_{1,2}$ a ještě řešení $\omega = 0$. Interpretujte mód s nulovou frekvencí, jakému pohybu atomů odpovídá?

Návod k určení kmitových módů:

- Označme hmotnost kyslíku m_1, hmotnost uhlíku m_2, výchylku levého atomu kyslíku u_1, atomu uhlíku u_2 a pravého atomu kyslíku u_3.
- Napište tři pohybové rovnice (2. Newtonův zákon) pro tři atomy molekuly (uvažujme pouze pohyb ve směrech podélné osy molekuly). Při kmitech molekuly se nemůže pohnout těžiště (*proč?*). [2] Vyjádřete u_2 jako funkci u_1 a u_3 na základě požadavku 'nehybnosti' těžiště. Do

[2] Přesněji řečeno: kmity atomů v molekule nemohou změnit pohybový stav, tj. hybnost, těžiště molekuly. Matematicky lze tento výsledek obdržet sečtením všech pohybových rovnic. Levá strana (se zrychleními) pak představuje časovou změnu celkové hybnosti těžiště. *Tento matematický výsledek je nutno fyzikálně interpretovat!*

pohybových rovnic pro oba atomy kyslíku dosaďte za u_2 z rovnice odvozené v předchozím kroku.

- Získali jste dvě diferenciální rovnice. Jejich sečtením a odečtením dostanete jinou dvojici ekvivalentních rovnic.
- Zaveďte normální souřadnice q_1 a q_2 substitucemi

$$q_1 = u_1 + u_2,\ q_2 = u_1 - u_2$$

a použijte ji v odvozené soustavě rovnic.

- Z tvaru pohybových rovnic v normálních souřadnicích byste již měli být schopni určit frekvence obou kmitových módů.

Alternativní verze návodu k určení kmitových módů (obvyklý postup) pro matematicky zdatné:

- Předpokládejme harmonické řešení pro výchylky $u_j(t) = u_j(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, index $j \in \{1, 2, 3\}$ a čísluje atomy v uvažované molekule.
- Pohybovou rovnici lze po jistých úpravách (dosazení předpokládaného tvaru řešení a zkrácení exponenciálního faktoru $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$) zapsat v elegantním maticovém tvaru

$$\hat{M}(m_1, m_2, k, \omega^2)\vec{u}(0) = \vec{0},\ \vec{u}(0) = (u_j(0)) = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

- Požadavek netriviálnosti řešení pro vektor amplitud $\vec{u}(0)$ vede k podmínce

$$0 \ = \ \det(\hat{M}), \tag{3}$$

jež představuje rovnici třetího řádu pro neznámou ω^2, odtud všechny tři kořeny.

- Vztahy mezi amplitudami se pro daný mód (kořen ω získaný z rovnice (3)) získají řešením rovnice (2), kde za ω byl dosazen příslušný kořen.

7. Výkon větrné elektrárny P s průměrem vrtule d při rychlosti větru v je dán vztahem

$$P = 0.4\frac{\pi}{8}d^2\rho v^3 \tag{4}$$

kde ρ je hustota vzduchu. *Odvoďte tento vztah pomocí zákona zachování mechanické energie.*

I když jste byli úspěšní, tak se vám nejspíše nepodařilo získat ve vztahu pro P číselný koeficient 0,4. *Jaký je jeho význam?*

Znalost výkonu větrné elektrárny za daných podmínek ještě sama o sobě nepostačuje k odhadu energie, kterou je elektrárna s to v určité lokalitě vyrobit. Pro přesnější výpočet nelze použít ani výpočet průměrného výkonu z průměrné hodnoty rychlosti větru (*proč?*).

Abychom spočítali střední výkon větrné elektrárny (tedy například energii, kterou nám elektrárna vyrobí za průměrný klimatický rok), nevystačíme tedy se znalostí střední rychlosti větru, ale musíme znát, jak často vane jak silný vítr, nebo jinými slovy, jaká je pravděpodobnost toho že bude v daném okamžiku vát vítr určitou rychlostí. Vidíme tedy, že pro tento výpočet potřebujeme velmi detailní informace o větru v dané oblasti. V technické praxi se často postupuje tak, že pro danou konkrétní situaci je známa funkce, která dobře vystihuje pravděpodobnosti různých hodnot náhodné proměnné. Takové funkci říkáme rozdělení náhodné proměnné (nebo jen rozdělení).

Pro popis kolísání rychlosti větru se používá tzv. Weibullovo rozdělení, které je dáno vztahem

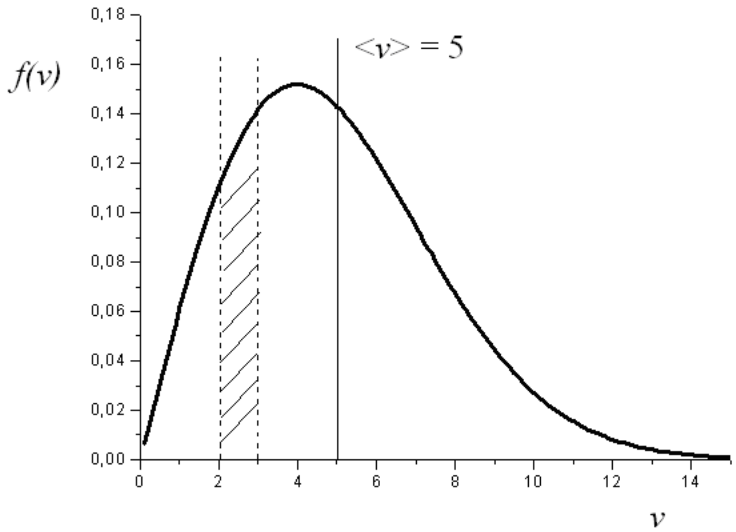
$$f(v) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{v}{\eta}\right)\exp\left(-\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\beta}\right) \tag{5}$$

kde v je daná náhodná proměnná (v našem případě tedy rychlost větru), β je tzv. tvarový parametr a η souvisí se střední hodnotou náhodné proměnné. Nejčastěji se používá Weibullovo rozdělení s parametrem $\beta = 2$. V tomto případě se rozdělení nazýváme Rayleighovo. Pak je vztah mezi η a střední hodnotou veličiny $< v >$ dán relací

$$\eta \doteq \frac{< v >}{0.886}. \tag{6}$$

Graf funkce $f(v)$ pro $\beta = 2$ a $< v > = 5$ je na Obrázku 2 Vidíme, že křivka má maximum v

Obrázek 2: Rayleighovo rozdělení pro $\beta = 2$ a $< v > = 5$



blízkosti hodnoty $v = 4$. Tuto hodnotu nazýváme nejpravděpodobnější a v našem případě tedy určuje, jaký vítr bude vát nejčastěji. Všimněte si, že střední hodnota $< v >$ není rovna nepravděpodobnější hodnotě, což je způsobeno asymetrií rozdělení (zleva je rozdělení omezeno počátkem - záporné velikosti rychlosti větru nemají smysl, ale na pravé straně je matematicky vzato rozdělení neomezeno - i velmi prudké vichřice se mohou objevit, i když jen s velmi malou pravděpodobností).

Řekli jsme si, že rozdělení náhodné proměnné popisuje pravděpodobnost realizace jisté hodnoty této veličiny. Ve skutečnosti má smysl počítat pouze pravděpodobnost hodnoty z jistého intervalu (v_1, v_2), kterou pomocí rozdělení určíme takto

$$P[v \in (v_1, v_2)] = \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}v\, f(v) \tag{7}$$

a je tedy rovna ploše pod křivkou $f(v)$ omezenou hodnotami v_1 a v_2. Šrafovaná plocha na Obrázku 2 je tedy rovna pravděpodobnosti, že bude vát vítr o rychlosti v intervalu 2 a 3 ms^{-1}.

Úkol: Vypočtěte energii, kterou za rok vyrobí větrná elektrárna s průměrem rotoru $50m$ v lokalitě s průměrnou rychlostí větru $5ms^{-1}$ za předpokladu Rayleighova rozdělení rychlosti větru. Porovnejte tuto hodnotu s energií, kterou by stejná elektrárna vyrobila ze stejné období, kdyby trvale foukal vítr konstantní rychlostí $5ms^{-1}$.

Poznámka 1: Výpočet lze provést analyticky s pomocí tabulky určitých integrálů.

Poznámka 2: Ve skutečnosti je situace ještě složitější, protože koeficient 0.4 uvedený v první části úlohy není konstantní, ale také závisí na rychlosti větru - většinou je menší než 0.4. Navíc při rychlostech větru pod cca $3\mathrm{ms}^{-1}$ elektrárna nepracuje vůbec a při velmi silném větru je nutné ji z bezpečnostních důvodů odstavit. Číslo, které spočítáte bude tedy větší, než skutečně vyrobená energie (asi o $20 - 30\%$).