F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2007 - 2008

XIII.
Chladné atomy a BEC

KOTLÁŘSKÁ 21. KVĚTNA 2008

Fyzika nízkých teplot

Naše hlavní téma

K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	1877 *Pictet* kapalný kyslík?		
77	1895 *von Linde* kap. vzduch		
22	1898 *Dewar* kapalný vodík		
	1905 *von Linde* kap. dusík		
4,2	1908 *Kamerlingh-Onnes* kapalné helium	1911 *Kamerlingh-Onnes* supravodivost kovů	
			1924 *Einstein* Bose-Einsteinova kondensace
0,3	odsávané helium	odsávané helium	
mK	1933 paramagn. demagnet.	1937 *Kapica* supratekutost Helia-4	1939 *Landau* teorie supratekutosti
	1951 *H. London* rozpouštěcí refrigerátor		1947 *Bogoljubov* teorie supratekutosti
μK	1956 *Kurti* NDR (jaderná …)	1972 *Osheroff* supratekutost Helia-3	
	1985 *Hänsch* laserové chlazení (princip)		1956 *BCS* teorie supravodivosti
		1986 *Müller a Bednorz* vysokoteplot. supravodivost	1975 *Leggett* teorie supratekutosti Helia-3
nK			
pK		1995 *Wieman, … Ketterle* BEC v atomových parách	

**Bardeen, Cooper a Schrieffer*

Nobelisté II.

The Nobel Prize in Physics 2001

"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"

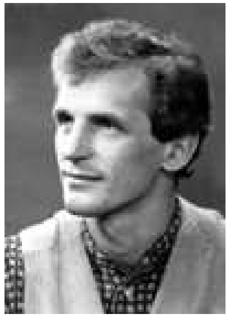
Eric A. Cornell

1/3 of the prize

USA

University of Colorado, JILA
Boulder, CO, USA

b. 1961



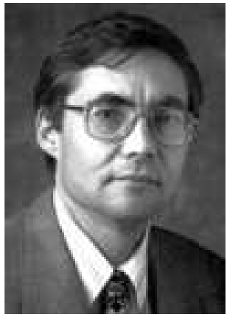
Wolfgang Ketterle

1/3 of the prize

Federal Republic of Germany

Massachusetts Institute of Technology (MIT)
Cambridge, MA, USA

b. 1957



Carl E. Wieman

1/3 of the prize

USA

University of Colorado, JILA
Boulder, CO, USA

b. 1951

Bosony a Fermiony

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou **nerozlišitelné**

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2)$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1,x_2) \to \Psi(x_2,x_1) = \lambda\Psi(x_1,x_2) = \lambda^2\Psi(x_2,x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1,x_2) \rightarrow \Psi(x_2,x_1) = \lambda\Psi(x_1,x_2) = \lambda^2\Psi(x_2,x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1,x_2) \to \Psi(x_2,x_1) = \lambda \Psi(x_1,x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2,x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1,x_2) \to \Psi(x_2,x_1) = \lambda \Psi(x_1,x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2,x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin

přichází

odnikud

"empirický

fakt"

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \to \Psi(x_2, x_1) = \lambda\Psi(x_1, x_2) = \lambda^2\Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází

odnikud

"empirický

fakt"

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází odnikud "empirický fakt"

celkem dobře znáte *teď pro nás důležité*

Mnohačásticové stavy pro Bosony a Fermiony

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech

Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech

Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné

FORMÁLNÍ PROVEDENÍ → → → →

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\left\{\left|\alpha\right\rangle\right\} \quad \left\langle\alpha\middle|\beta\right\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \left|\psi\right\rangle = \sum\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\middle|\psi\right\rangle$$

$$\left\langle x\middle|\alpha\right\rangle = \varphi_\alpha\left(x\right)$$

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

FOCKŮV PROSTOR prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy … symetrizované součiny jedno-částicových stavů pro bosony

… antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů pro fermiony

určeny posloupností obsazovacích čísel **0, 1, 2, 3, …** pro bosony

0, 1 **…** pro fermiony

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

FOCKŮV PROSTOR prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy … symetrizované součiny jedno-částicových stavů pro bosony

… antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů pro fermiony

určeny posloupností obsazovacích čísel **0, 1, 2, 3, …** pro bosony

0, 1 **…** pro fermiony

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \ldots\}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = \left| n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p, \ldots \right\rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \Sigma n_p$$

Representace obsazovacích čísel pro fermiony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

…. pro **fermiony**

Pauliho princip

fermiony jsou distanční typ jako rackové

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \ldots\}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\{n_\alpha\}} = | n_1, n_2, n_3, \ldots, n_p, \ldots \rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \Sigma n_p,\ n_p = 0{,}1$$

$$|0\rangle = |0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle \quad 0\text{-částicový stav} \quad \textbf{vakuum}$$

$$|1_p\rangle = |0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots\rangle \quad 1\text{-částic.} \quad \varphi_{\alpha_p}(x)$$

$$|\cdots\rangle = |0, 1, 1, \ldots, 0, \ldots\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad \left(\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') - \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x)\right)/\sqrt{2}$$

$$|\cdots\rangle = |0, 2, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle \quad 2\text{-částic.} \quad \xcancel{\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')} \ \text{není dovoleno}$$

$$|F\rangle = |\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N}, 0, \ldots\rangle \quad N\text{-částicový základní stav}$$

$$\ldots$$

Representace obsazovacích čísel pro bosony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

…. pro **bosony**

princip identity

bosony jsou kontaktní typ jako opice

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots\}$$

$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |\, n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, \dots \rangle$ n-částicový stav $n = \Sigma n_p,\ n_p = 0, 1, 2, 3, \dots$

$|\, 0 \rangle = |\, 0\ , 0\ , 0\ , \dots, 0\ , \dots \rangle$ 0-částicový stav **vakuum**

$|\, 1_p \rangle = |\, 0\ , 0\ , 0\ , \dots, 1\ , \dots \rangle$ 1-částic. $\varphi_{\alpha_p}(x)$

$|\cdots\rangle = |\, 0\ , 1\ , 1\ , \dots, 0\ , \dots \rangle$ 2-částic. $\left(\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') + \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x)\right)/\sqrt{2}$

$|\cdots\rangle = |\, 0\ , 2, 0\ , \dots, 0\ , \dots \rangle$ 2-částic. $\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')$ je dovoleno

$|\, B \rangle = |\, N\ , 0\ , 0\ , \dots, 0\ , \dots \rangle$ N-částicový základní stav

všechny na jednom orbitalu $\varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_1}(x_2)\cdots\varphi_{\alpha_1}(x_N)$

Které částice jsou Bosony

Příklady bosonů

bosony

částice -- kvanta
N se nezachovává

elementární částice

fotony

kvazičástice

fonony
magnony

komplexní částice
N se zachovává

atomy

$$^{4}\mathrm{He},\ \underbrace{^{7}\mathrm{Li},\ ^{23}\mathrm{Na},\ ^{87}\mathrm{Rb}}_{\text{alkalické kovy}}$$

excitované atomy

Příklady bosonů (rozšíření tabulky)

bosony

částice -- kvanta
N se nezachovává

elementární částice

fotony

kvazičástice

fonony
magnony

složené kvazičástice

excitony
Cooperovy páry

komplexní částice
N se zachovává

atomy

$^{4}\mathrm{He},\ \underbrace{^{7}\mathrm{Li},\ ^{23}\mathrm{Na},\ ^{87}\mathrm{Rb}}_{\text{alkalické kovy}}$

excitované atomy

ionty

molekuly

Příklady bosonů (rozšíření tabulky)

bosony

částice -- kvanta
N se nezachovává

elementární částice

fotony

kvazičástice

fonony
magnony

složené kvazičástice

excitony
Cooperovy páry

komplexní částice
N se zachovává

atomy

$^{4}\mathrm{He}$, $\underbrace{^{7}\mathrm{Li},\ ^{23}\mathrm{Na},\ ^{87}\mathrm{Rb}}_{\text{alkalické kovy}}$

excitované atomy

ionty

molekuly

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$$ {}^{23}_{11}\mathrm{Na} \qquad [\mathrm{Ne}]3s^1 \qquad \boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}} \qquad I = \frac{3}{2} $$

$$ {}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \qquad [\mathrm{Kr}]5s^1 \qquad \boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}} \qquad I = \frac{3}{2} $$

pro tyto atomy pozorována BEC

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$$^{23}_{11}\mathrm{Na} \quad [\mathrm{Ne}]3s^1 \quad \boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}} \quad I = \frac{3}{2}$$

$$^{87}_{37}\mathrm{Rb} \quad [\mathrm{Kr}]5s^1 \quad \boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}} \quad I = \frac{3}{2}$$

A

Z

elektronová konfigurace

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$$

$$^{2S+1}L_J$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J = |S - L|, \dots, S + L = \frac{1}{2}$$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$^{23}_{11}\mathrm{Na}$	$^{87}_{37}\mathrm{Rb}$
$[\mathrm{Ne}]3s^1$	$[\mathrm{Kr}]5s^1$
$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$	$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$
$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{3}{2}$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\text{37 protonů}\\ \text{50 neutronů}\end{array}\right\}$ *celk. jaderný spin* $I = \frac{3}{2}$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$$^{23}_{11}\mathrm{Na}$$
$$[\mathrm{Ne}]3s^1$$
$$^2\boldsymbol{S}_{\frac{1}{2}}$$
$$I = \tfrac{3}{2}$$

$$^{87}_{37}\mathrm{Rb}$$
$$[\mathrm{Kr}]5s^1$$
$$^2\boldsymbol{S}_{\frac{1}{2}}$$
$$I = \tfrac{3}{2}$$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \tfrac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\text{37 protonů}\\ \text{50 neutronů}\end{array}\right\}$ *celk. jaderný spin* $I = \tfrac{3}{2}$

celkový spin atomu

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$F = |S - I|, \ldots, S + I = 1, 2$$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$$\boxed{\begin{array}{c} {}^{23}_{11}\mathrm{Na} \\ [\mathrm{Ne}]3s^1 \\ {}^2\boldsymbol{S}_{\frac{1}{2}} \\ I = \frac{3}{2} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} {}^{87}_{37}\mathrm{Rb} \\ [\mathrm{Kr}]5s^1 \\ {}^2\boldsymbol{S}_{\frac{1}{2}} \\ I = \frac{3}{2} \end{array}}$$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\text{37 protonů} \\ \text{50 neutronů}\end{array}\right\}$ *celk. jaderný spin* $I = \frac{3}{2}$

celkový spin atomu

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$F = |S - I|, \ldots, S + I = 1, 2$$

Koexistují dvě rozlišitelné odrůdy; mohou být odděleny sdruženým působením hyperjemných interakcí a Zeemanova štěpení v magnetickém poli

Ideální kvantové plyny

Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

Ideální klasický plyn

$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

$\boxed{T=0}$

Fermiony
elektrony
$|F\rangle = |1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\rangle$

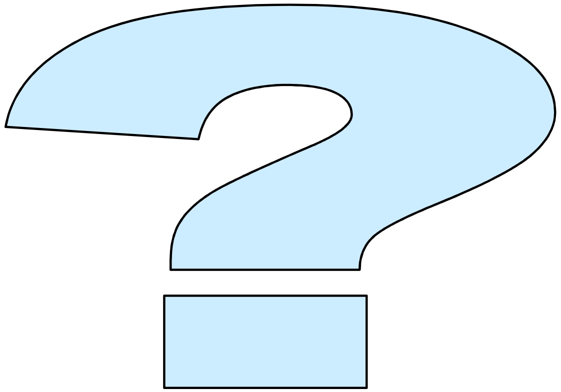
Bosony N=const.
atomy
$|B\rangle = |N, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle$

Bosony
fotony
$|\mathrm{vac}\rangle$

Ideální klasický plyn

$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn



$\boxed{T=0}$

Fermiony	Bosony N=const.	Bosony
elektrony	atomy	fotony
$\vert F \rangle = \vert 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots \rangle$	$\vert B \rangle = \vert N, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$	$\vert \mathrm{vac} \rangle$

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje střední počet částic

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje
střední počet částic

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

$$0 \le \langle n \rangle \le 1$$

PAULIHO PRINCIP

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

bosony

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

"kvanta":
fotony
fonony
magnony
. . .

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

"kvanta":
fotony
fonony
magnony
. . .

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje střední počet částic

fermiony

bosony

N

N

ATOMY

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

$T \to 0$

$$|F\rangle = |1\,,1\,,\ldots,1\,,\,0\,,\ldots\rangle$$

bosony

N

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$T \to 0$

$$|B\rangle = |N\,,0\,,0\,,\ldots,0\,,\ldots\rangle$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

$T \to 0$

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

$T \to 0$

$T \to 0$

$T \to 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1\,,1\,,\ldots,1\,,\,0\,,\ldots\rangle$$

$$|B\rangle = |N\,,0\,,0\,,\ldots,0\,,\ldots\rangle$$

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

$$|F\rangle = |1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\rangle$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$T \to 0$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

$$|F\rangle = |1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\rangle$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$T \to 0$

?

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

$$|F\rangle = |1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots\rangle$$

bosony

N

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$T \to 0$

?

$$|B\rangle = |\mathbf{N}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle$$

makroskopické obsazení jediné hladiny

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

$T \to 0$

$T \to 0$

$T \to 0$

Áufbau princip

BEC

vymrzání

$$|F\rangle = |1\,,1\,,\ldots,1\,,\,0\,,\ldots\rangle$$

$$|B\rangle = |N\,,0\,,0\,,\ldots,0\,,\ldots\rangle$$

$$|\mathrm{vac}\rangle$$

Bose-Einsteinova kondensace
BEC

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, *N* atomů v objemu *V*

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \mathrm{const} \times T^{3/2}$$

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, *N* atomů v objemu *V*

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \mathrm{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek $N - \mathcal{N}$ se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, N atomů v objemu V

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \mathrm{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek $N - \mathcal{N}$ se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, *N* atomů v objemu *V*

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \mathrm{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek $N - \mathcal{N}$ se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

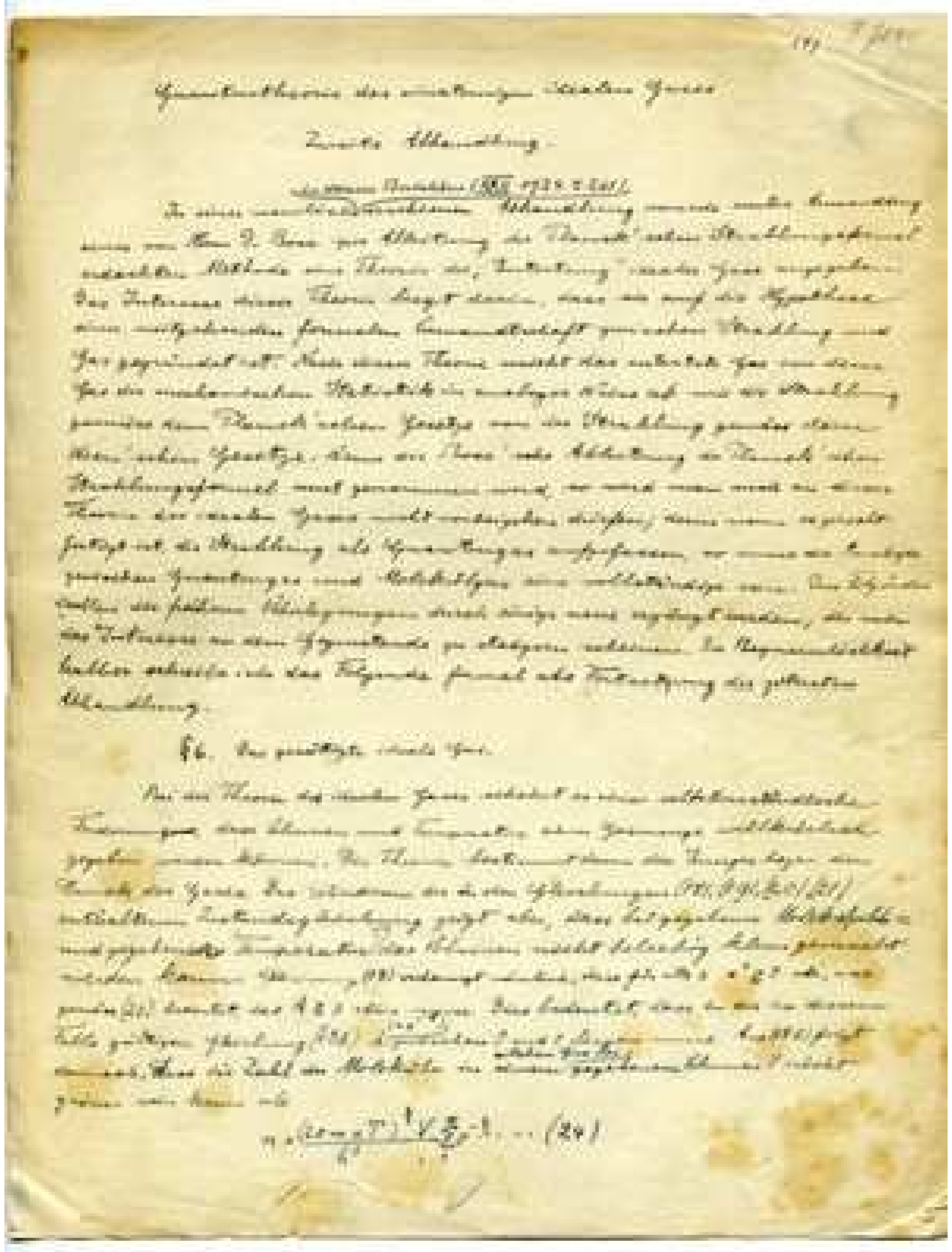
Tuto úvahu a přesný výpočet integrálů provedl Einstein

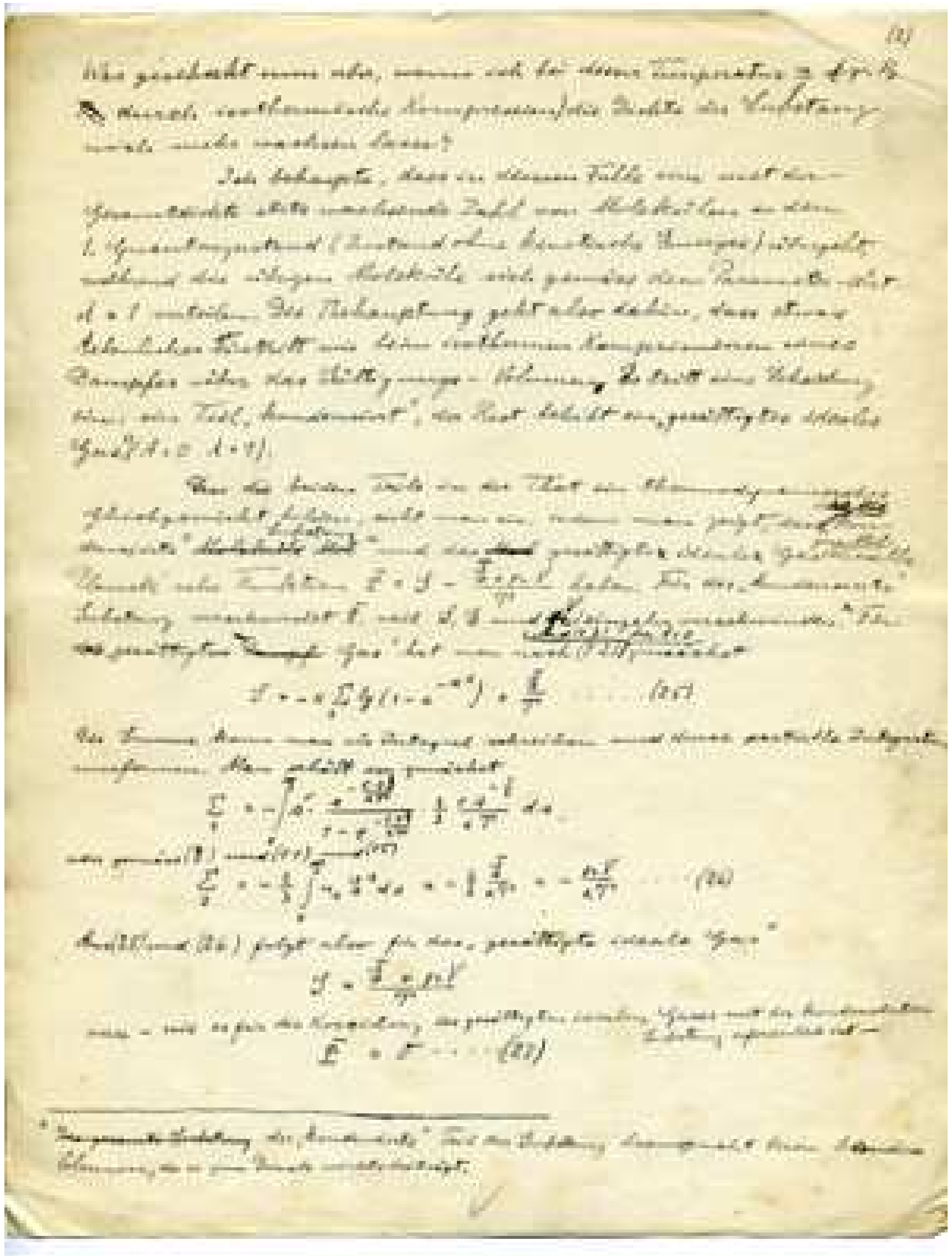
… následující folie.

Maximální počet atomů v plynné fázi při dané teplotě

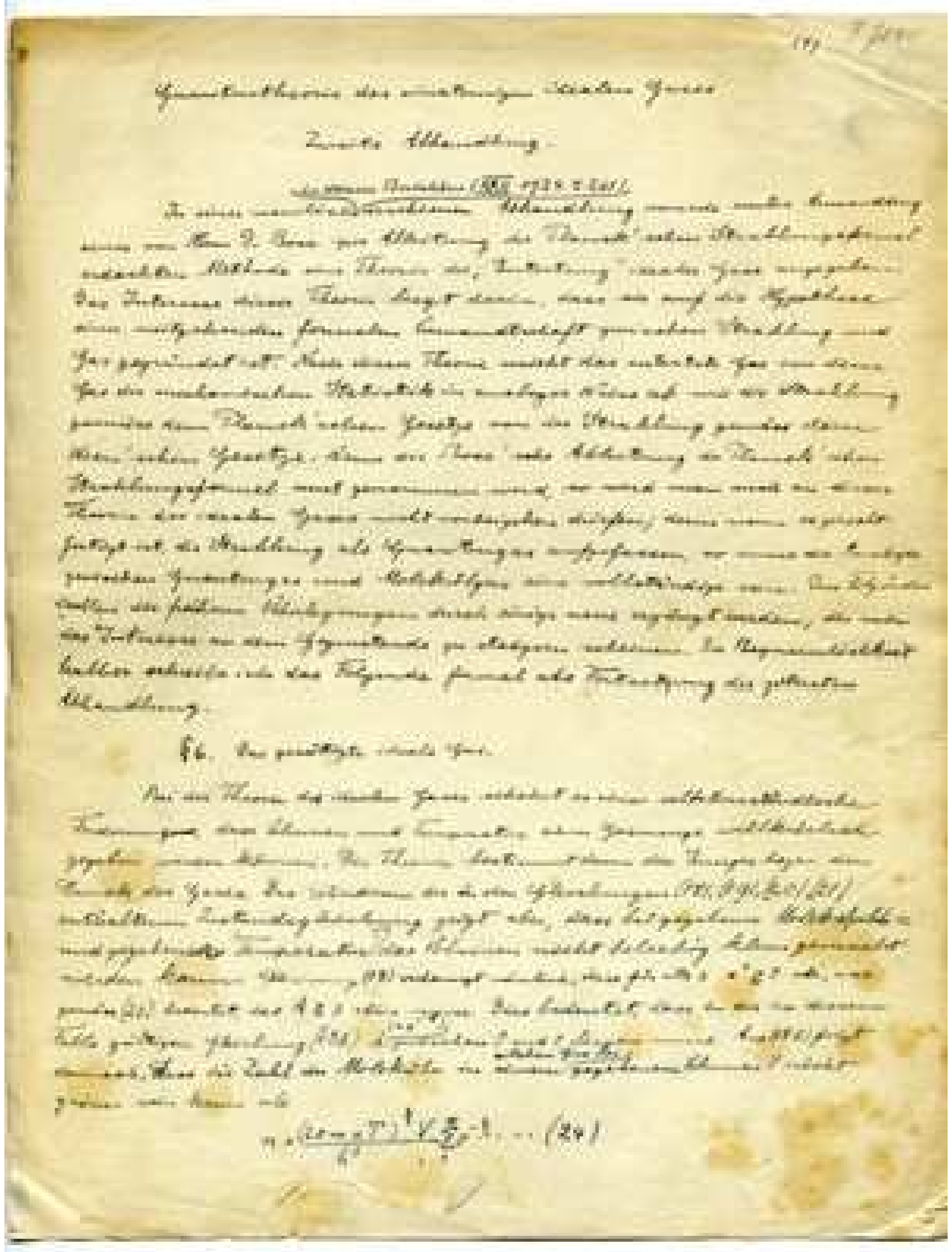
$$\tilde{\mathcal{N}}_{\mathrm{G}}(T) = V \times 4\pi \left(\frac{2mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(\tfrac{3}{2})\zeta(\tfrac{3}{2}) \equiv BT^{\frac{3}{2}}$$

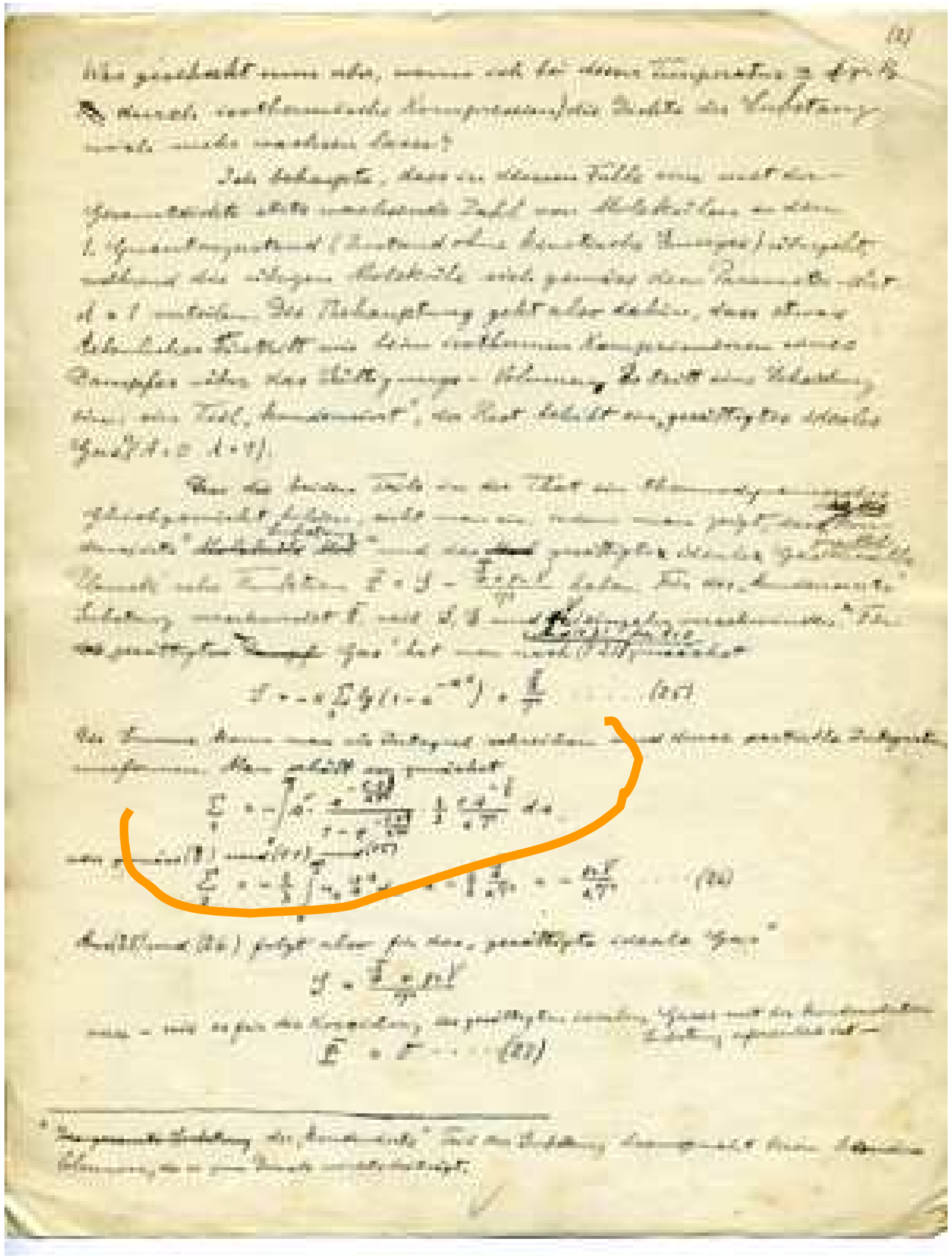
Einsteinův rukopis s odvozením BEC





Einsteinův rukopis s odvozením BEC





KRITICKÁ TEPLOTA

nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$\boxed{N = \tilde{\mathcal{N}}_{\mathrm{G}}(T_c) = V \times 4\pi \left(\frac{2mk_B T_c}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(\tfrac{3}{2}) \zeta(\tfrac{3}{2})}$$

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A} = 8{,}0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A}$$

KRITICKÁ TEPLOTA

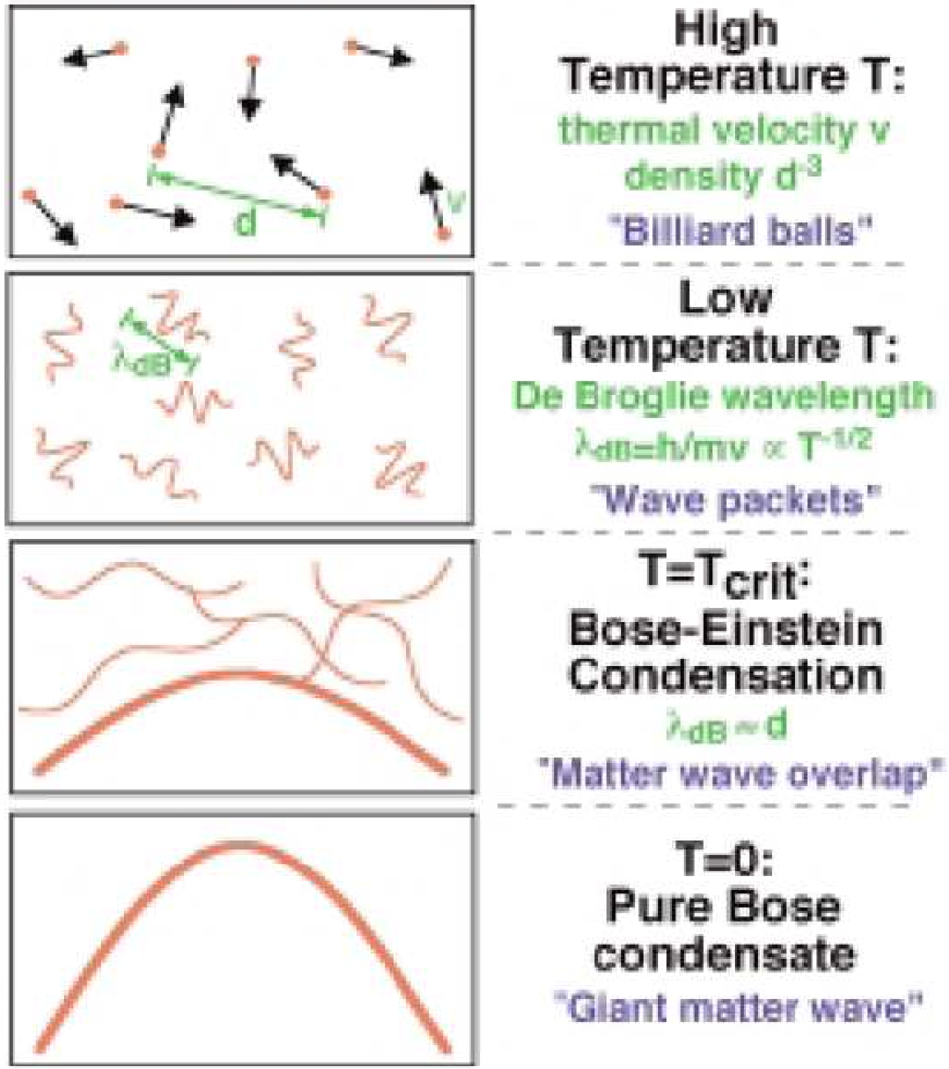
nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M} = 8,0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M}$$

Několik odhadů:

system	*M*	*n*	T_C
He-4 kapalné	4	2×10^{28}	1.47 K
Na past	23	2×10^{20}	1.19 μK
Rb past	87	2×10^{17}	3.16 nK

Ketterle vysvětluje BEC švédskému králi



Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} \qquad m = A\text{u}$$

V tepelné rovnováze

... rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3\text{u}\, k_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}} = 2{,}5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{3}{2} T / 11600 \quad \text{eV} \quad \text{K} \qquad \bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158\sqrt{\frac{T}{A}}$$

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612 V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední meziatomová vzdálenost

tepelná de Broglieova vlnová délka

Fyzikální interpretace T_C podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612 V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední
meziatomová
vzdálenost

tepelná
de Broglieova
vlnová délka

Kvantový přechod nastane když

vlnová oblaka atomů se začnou překrývat

Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad T < T_C$$

Hustota kondensátu

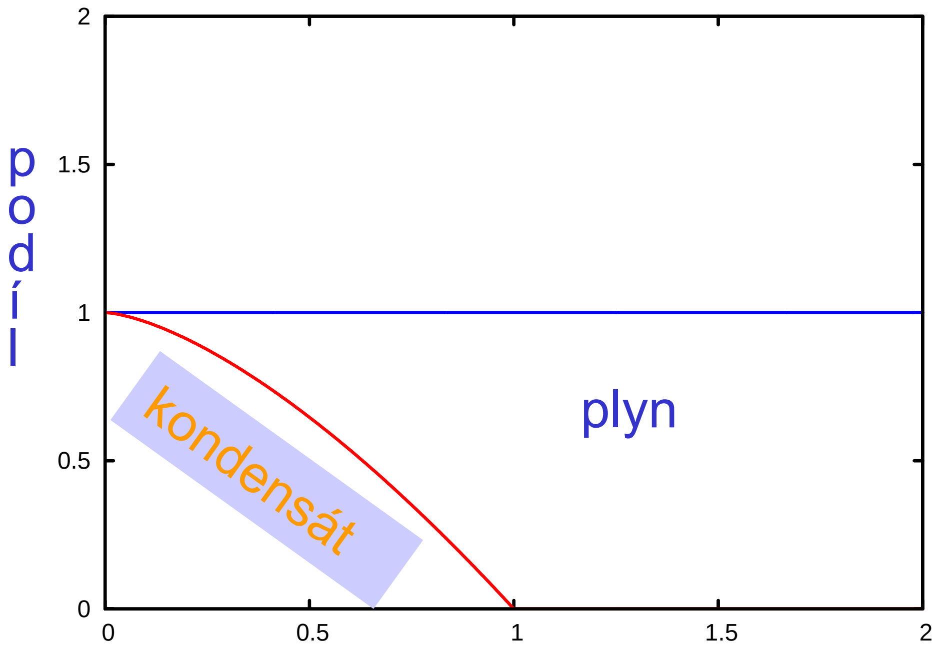
$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad T < T_C$$

$$\boxed{n \;\equiv\; n_G + n_{BEC} \;=\; n\cdot\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} + n\cdot\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$

Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} + \boxed{n\cdot\left[1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$



T / T_C

Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve

Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam

Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam
- I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna

Podrobnější rozbor BEC

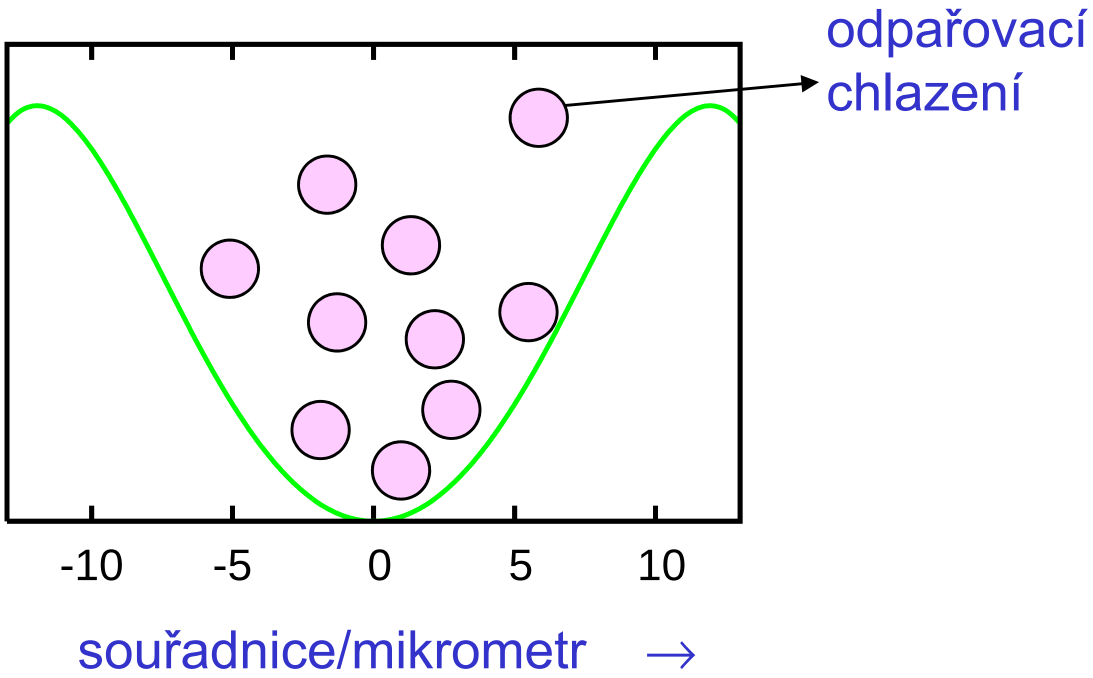
- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam
- I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna
- BEC je **makroskopický kvantový jev** ve dvou ohledech:
  - ♠ korelace makroskopické frakce všech atomů
  - ♠ odpovídající koherence prochází celým makroskopicky rozlehlým vzorkem

BEC v atomových pastech

Potenciál pasti

Typický profil

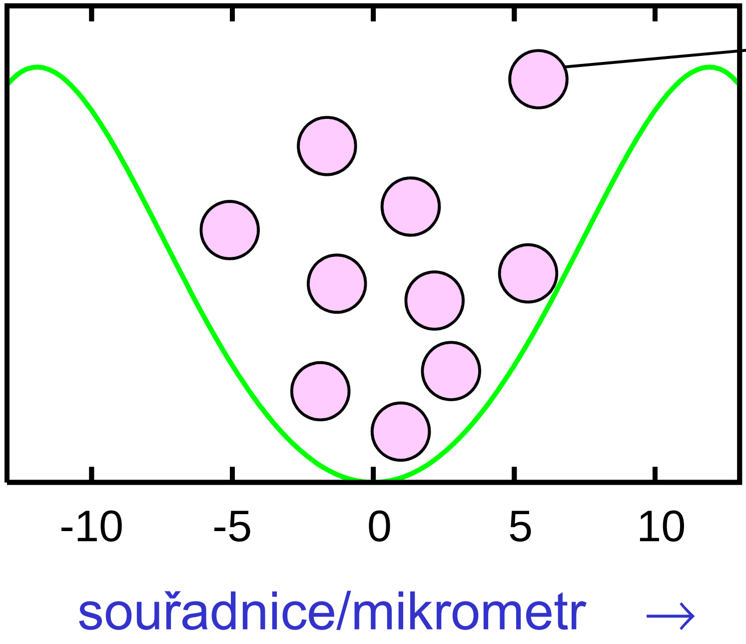
?



Potenciál pasti

Typický profil

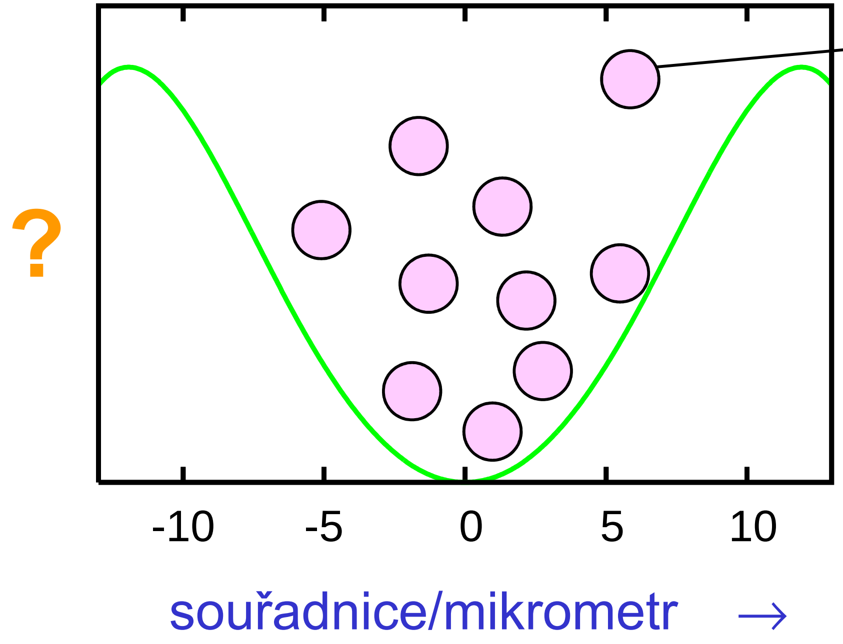
?



odpařovací chlazení ... to teprve sníží teplotu až ke kritické

Potenciál pasti

Typický profil



odpařovací chlazení ... to teprve sníží teplotu až ke kritické

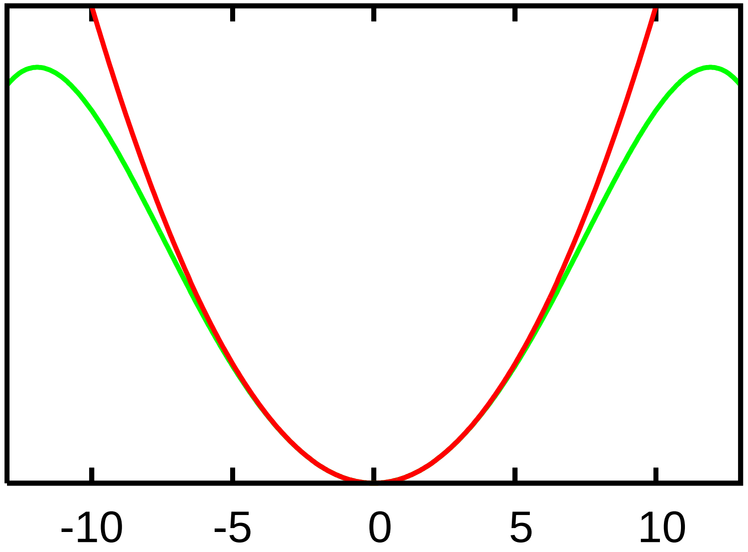
Jeden směr

past zpravidla 3D, tvaru protáhlého elipsoidu

Pasti jsou z reálného světa, obláčky víceméně viditelné okem

Parabolická approximace

zpravidla anisotropní harmonický oscilátor *s axiální symetrií*



$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

$$= H_x + H_y + H_z$$

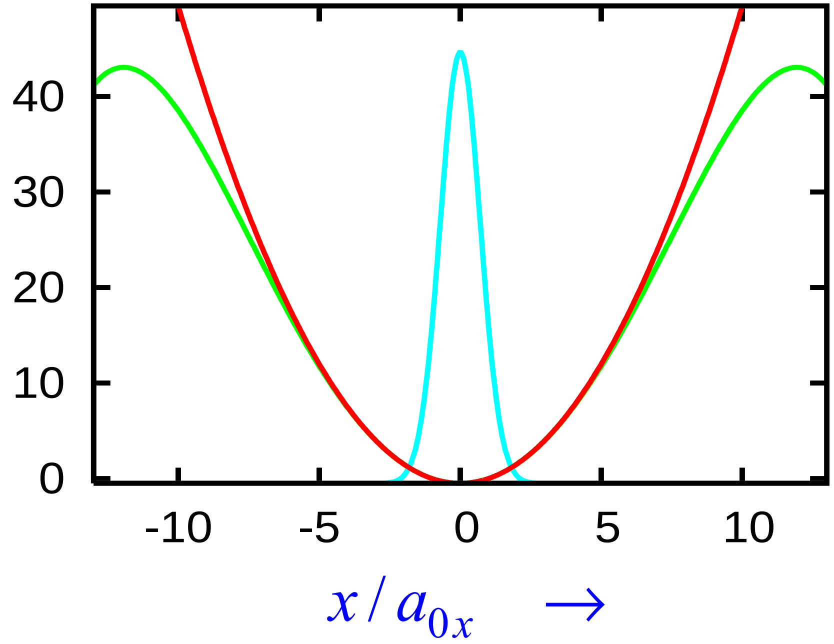
1D

2D

3D

Základní stav a potenciál

číslo hladiny lineárního oscilátoru



200 nK

100 nK

^{87}Rb

$a_0 = 1\mu$m

$\hbar\omega$=10 nK

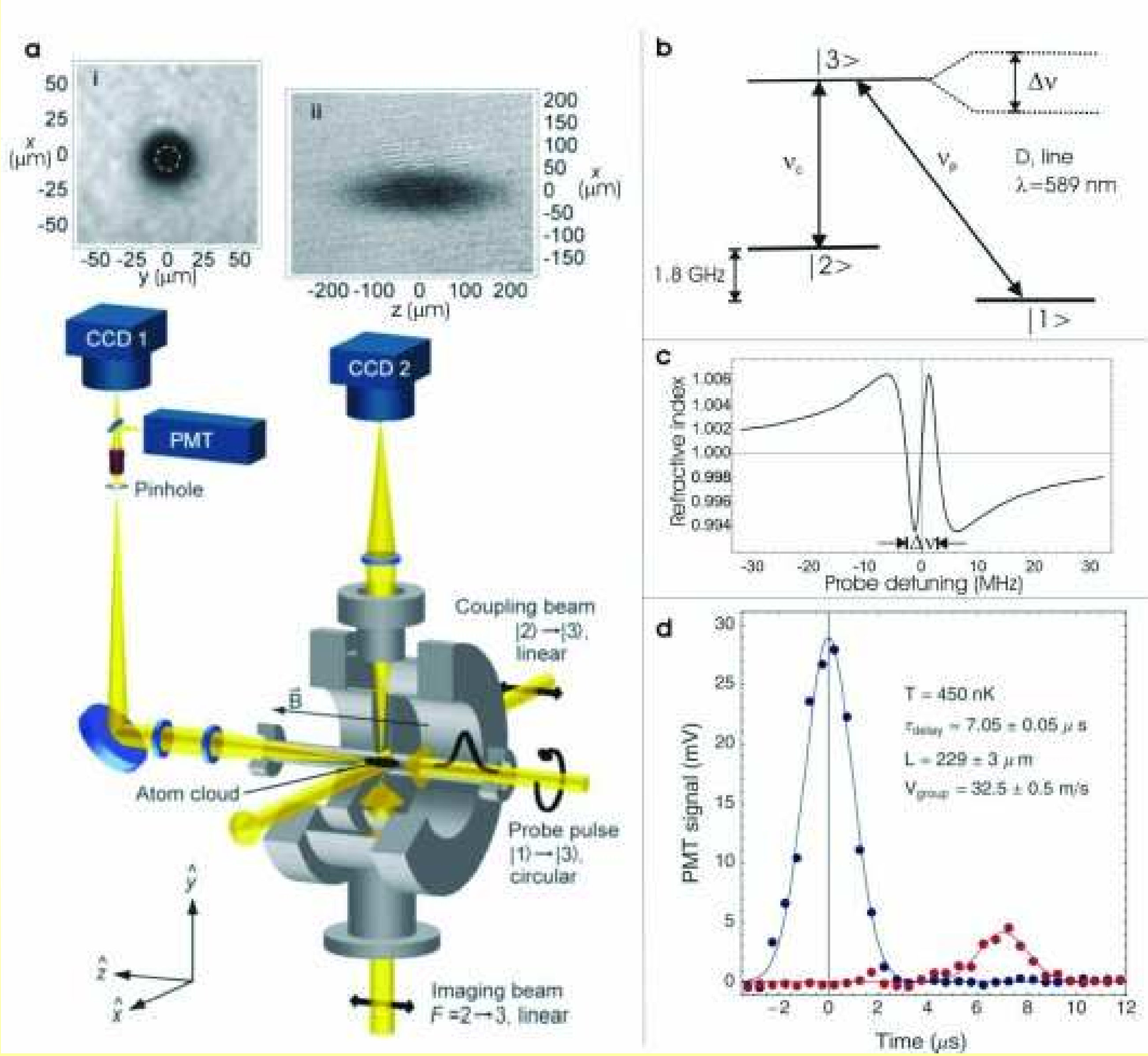
$N \square 10^6$

$$\psi_0(x,y,z) = \phi_{0x}(x)\phi_{0y}(y)\phi_{0z}(z)$$

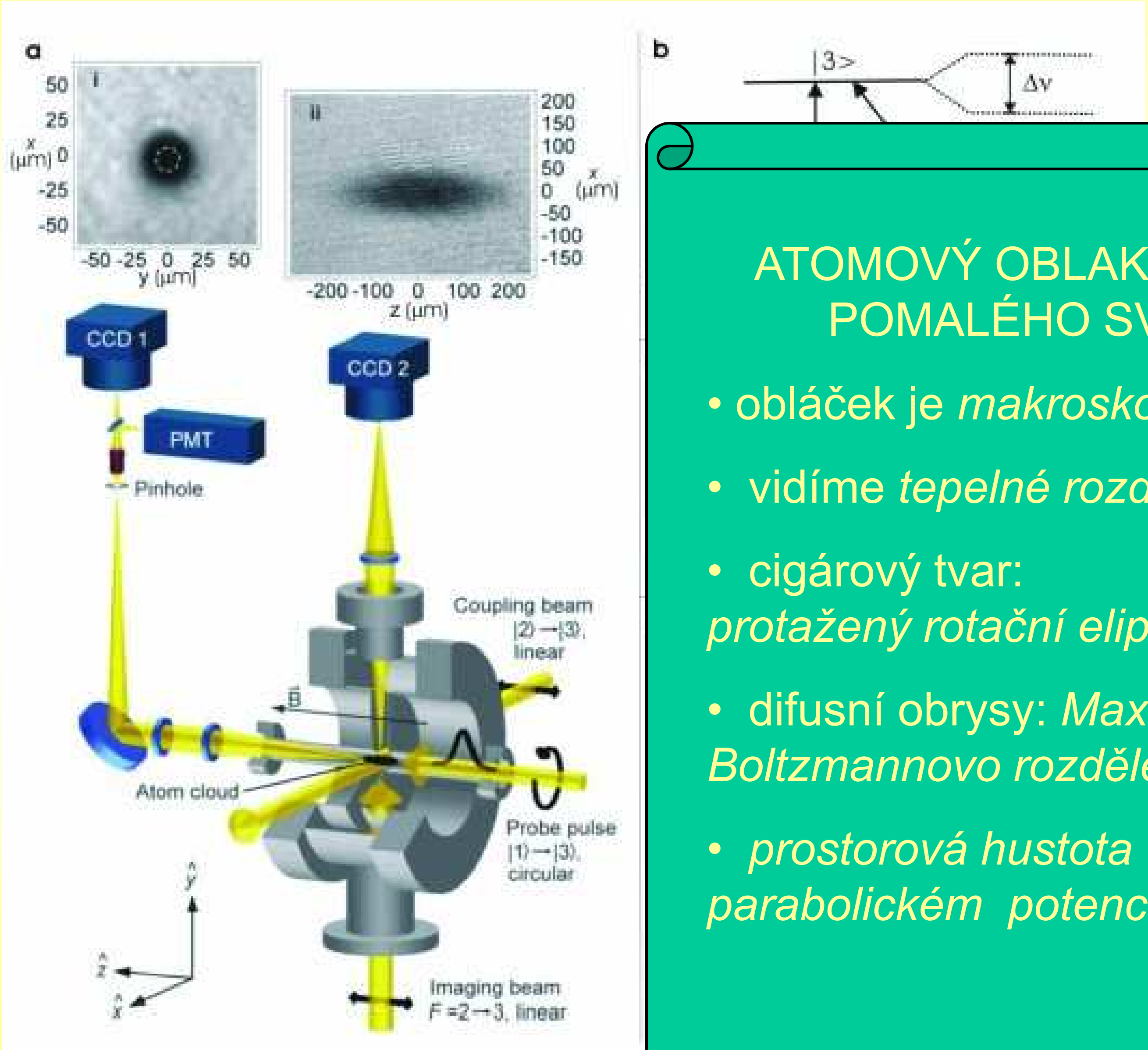
$$\phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2a_0^2}}, \quad \boxed{a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}, \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{ma_0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{Mu_m a_0^2}$$

$$\boxed{V(u) = \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{u}{a_0}\right)^2}$$

K12: Pomalé světlo ve studených parách sodíku



K12: Pomalé světlo ve studených parách sodíku



ATOMOVÝ OBLAK -- NOSIČ POMALÉHO SVĚTLA

- obláček je *makroskopický*
- vidíme *tepelné rozdělení*
- cigárový tvar: *protažený rotační elipsoid*
- difusní obrysy: *Maxwellovo–Boltzmannovo rozdělení*
- *prostorová hustota v parabolickém potenciálu*

Hustota částic v prostoru: I. Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}$$

Hustota částic v prostoru: I. Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$
\begin{aligned}
f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) &= \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))} \\
n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\
&\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}
\end{aligned}
$$

Vzpomínka na Perrina a barometrickou formuli

Hustota částic v prostoru: II. BE kondensát při $T = 0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

Hustota částic v prostoru: II. BE kondensát při $T=0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1}$$

$$= \frac{1}{a_{0x}a_{0y}a_{0z}\pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2}-\frac{y^2}{a_{0y}^2}-\frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1} \to N \quad \text{při} \quad T \to 0$$

Hustota částic v prostoru: III. srovnání obou limit

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}$$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$= \frac{1}{a_{0x}a_{0y}a_{0z}\pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

BE kondensát při $T = 0$ a makroskopická vlnová funkce

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = N \cdot \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2$$

$$= \frac{N}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}}$$

$$= N \int \mathrm{d}^3 \bar{\boldsymbol{r}}\, \varphi^*(\bar{\boldsymbol{r}}) \delta(\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}) \varphi(\bar{\boldsymbol{r}}) \equiv \int \mathrm{d}^3 \bar{\boldsymbol{r}}\, \Psi^*(\bar{\boldsymbol{r}}) \delta(\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}) \Psi(\bar{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{N} \varphi(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \equiv \sqrt{N} \sqrt{n(\boldsymbol{r})}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}}$$

Jediná vlnová funkce normovaná ne na 1, ale na *N*, popisuje chování kondensátu ... ***extrémní koherence*** *("zpívají unisono")*

ALE → → →

F.Laloë: Do we really understand Quantum mechanics, Am.J.Phys.**69**, 655 (2001)

In passing, and as a side remark, it is amusing to notice that the recent observation of the phenomenon of Bose–Einstein condensation in dilute gases (Ref. 25) can be seen, in a sense, as a sort of realization of the initial hope of Schrödinger: This condensation provides a case where the many-particle matter wave does propagate in ordinary space. Before condensation takes place, we have the usual situation: The atoms belong to a degenerate quantum gas, which has to be described by wave functions defined in a huge configuration space. But, when they are completely condensed, they are restricted to a much simpler many-particle state that can be described by the same wave function, exactly as a single particle. In other words, the matter wave becomes similar to a classical field with two components (the real part and the imaginary part of the wave function), resembling an ordinary sound wave for instance. This illustrates why, somewhat paradoxically, the "exciting new states of matter" provided by Bose–Einstein condensates are not an example of an extreme quantum situation; they are actually more classical than the gases from which they originate (in terms of quantum description, interparticle correlations, etc.). Conceptually, of course, this remains a very special case and does not solve the general problem associated with a naive view of the Schrödinger waves as real waves.

Studium BEC metodou TOF
(time of flight -- doby letu)

BEC pozorovaná metodou TOF

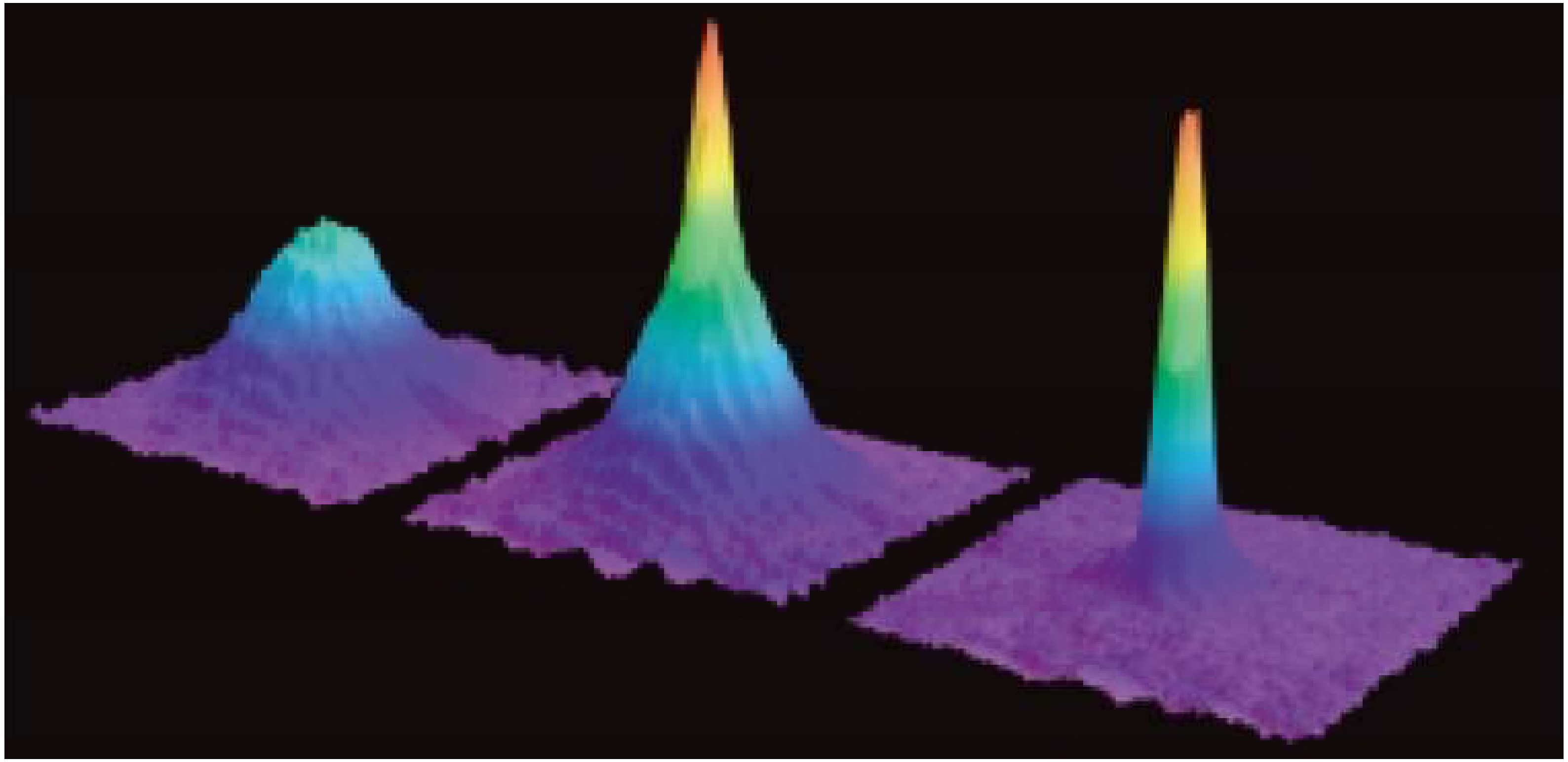


Figure 7. Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about 7×10^5, the temperature at the transition point is 2 μK.

BEC pozorovaná metodou TOF

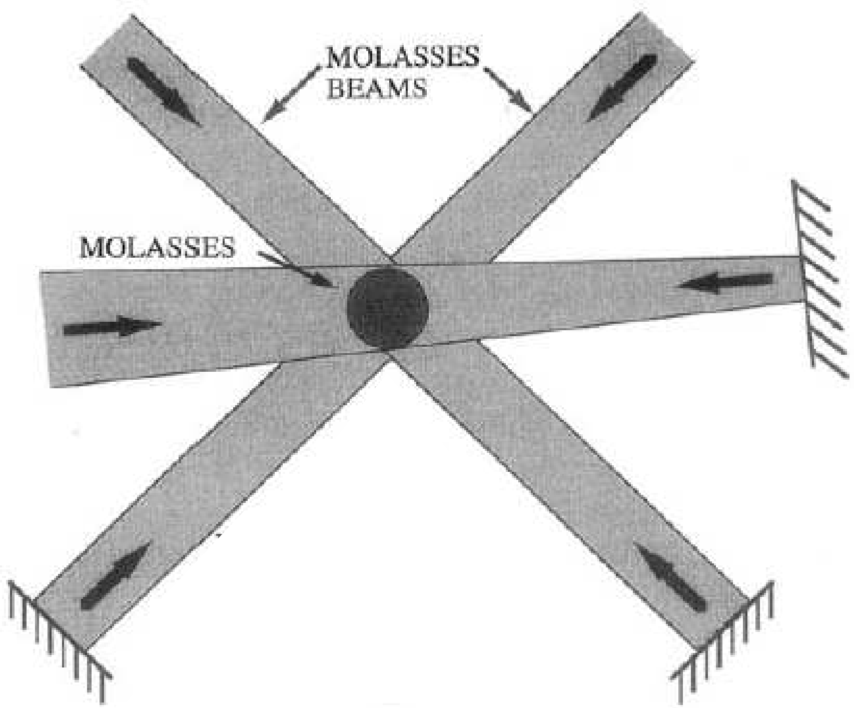
Figure 7. Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about 7×10^5, the temperature at the transition point is $2\ \mu K$.

3D laserové chlazení

20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund



TOF experiment

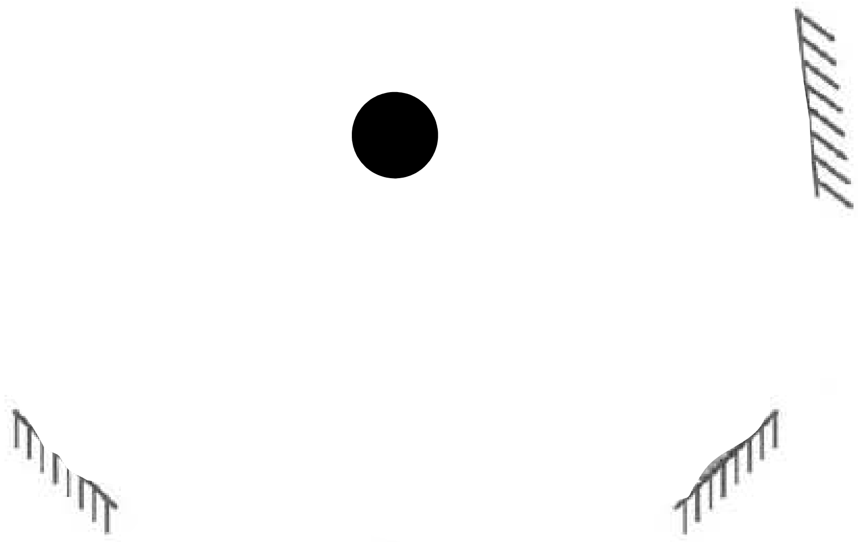
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



TOF experiment

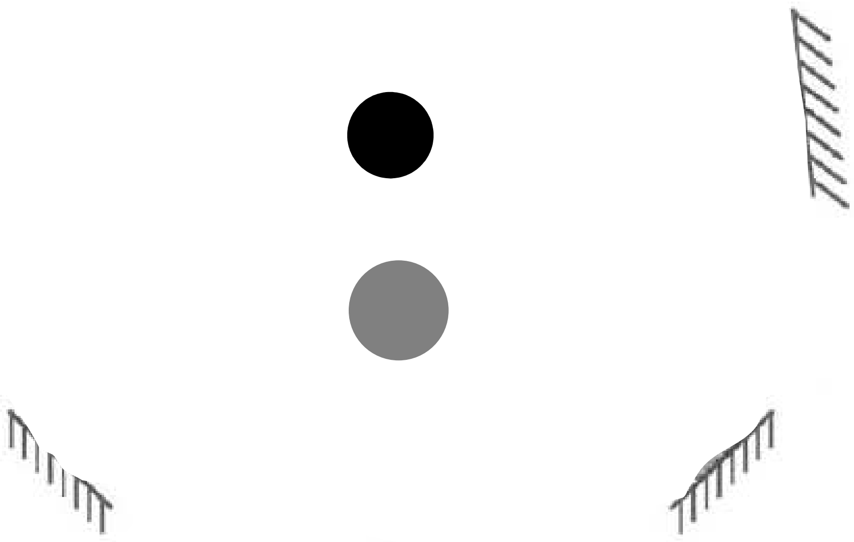
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



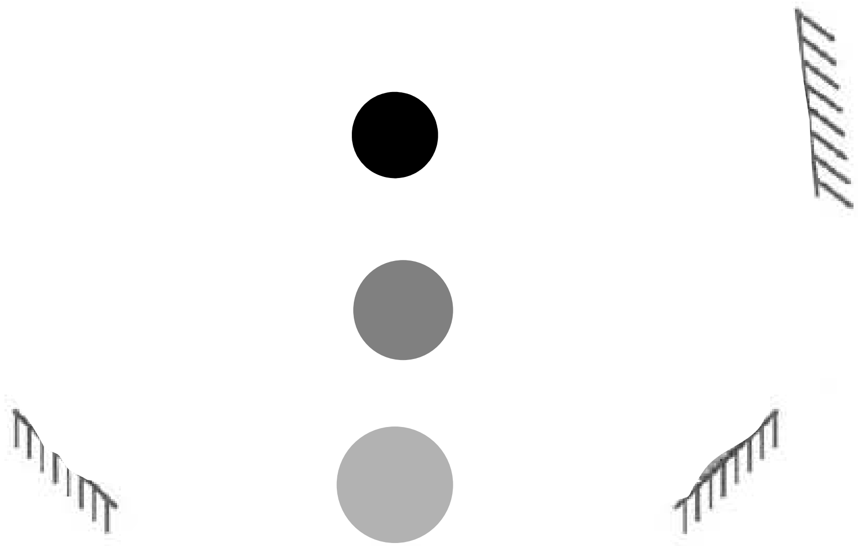
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



měření distribuce

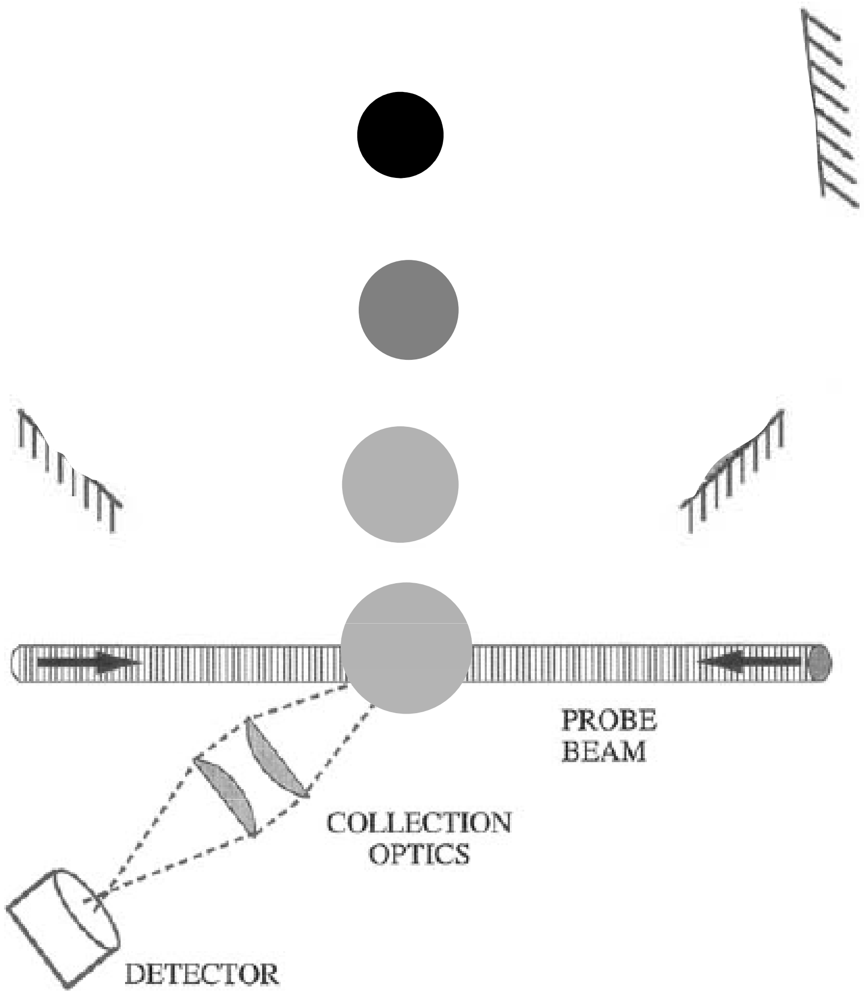
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



sondovací laserový svazek vyvolá fluorescenci atomů

z tvaru a velikosti obláčku je určeno rychlostní rozdělení

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$\boxed{\begin{aligned} f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) &= \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))} \\ f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) &= \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\ &\propto \mathrm{e}^{-\beta W} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \end{aligned}}$$

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\ &\propto \mathrm{e}^{-\beta W} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)} \end{aligned}$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) &= \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1} \\ &\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2}-\frac{p_y^2}{b_{0y}^2}-\frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}} \end{aligned}$$

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Dvojí přímo měřitelné charakteristické délky

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{a_0},$$

$$B_T = 1\Big/\sqrt{\beta m}$$

$$= b_0\sqrt{k_B T/\hbar\tilde{\omega}} \; \square \; b_0$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Dvojí přímo měřitelné charakteristické délky

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{a_0},$$

$$B_T = 1\Big/\sqrt{\beta m}$$

$$= b_0 \sqrt{k_B T / \hbar\tilde{\omega}} \gg b_0$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

BEC pozorovaná v rozdělení rychlostí metodou TOF

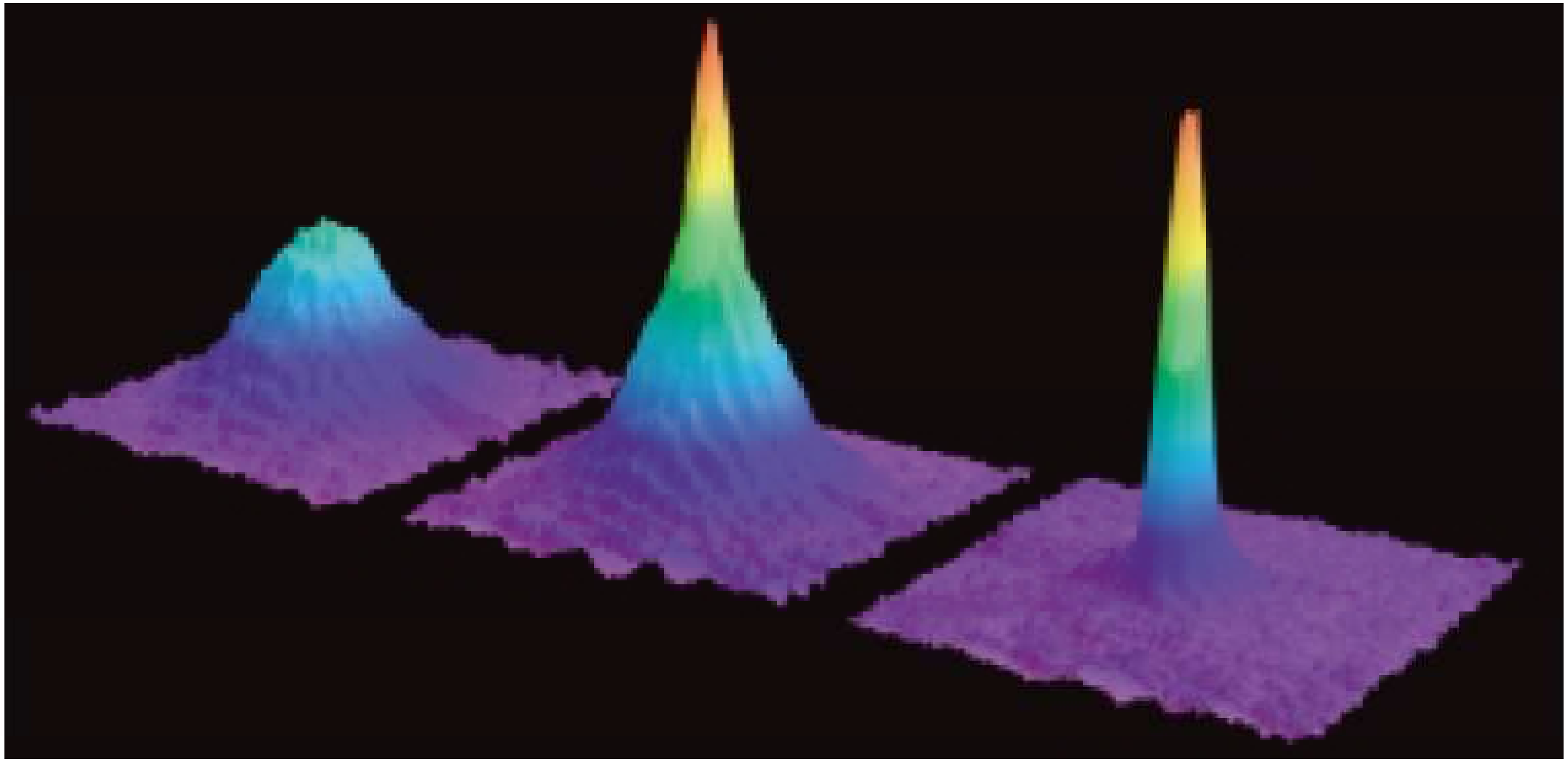


Figure 7. C … n by absorption imaging. Shown is absorption
vs. two sp … ensate is characterized by its slow expansion
observed … e shows an expanding cloud cooled to just
above the … condensate appeared; right: after further
evaporati … sate. The total number of atoms at the phase
transition … transition point is 2 μK.

Kvalitativní vlastnosti:

- ♠ Gaussovy profily
- ♠ široké *vs.* úzké
- ♠ isotropní *vs.* anisotropní

Kvantitativní vyhodnocení: vliv atomových interakcí

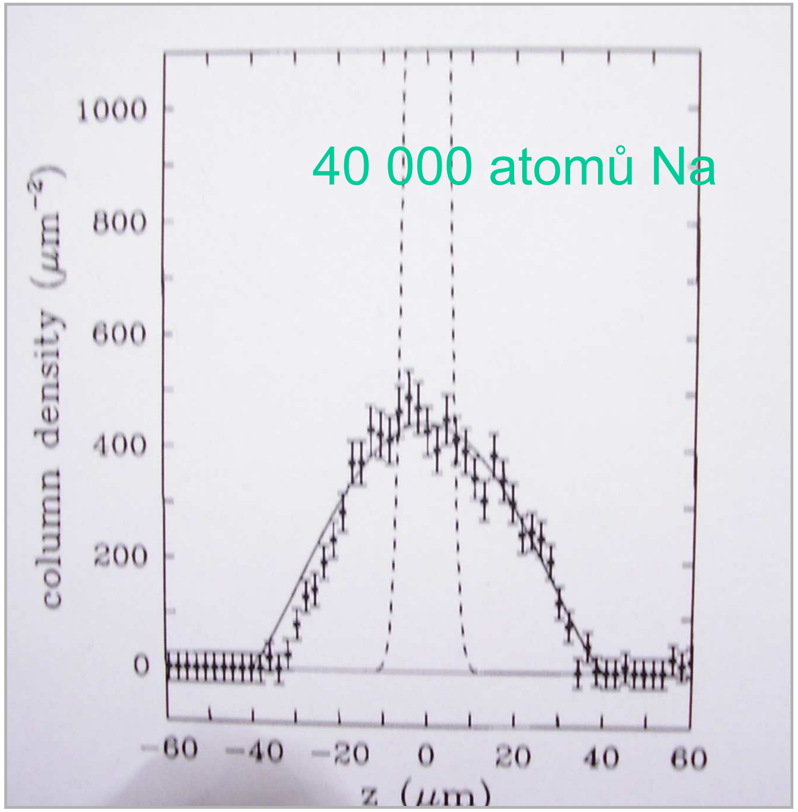
Oblak by se rozplýval jako kvantové klubko i bez meziatomových interakcí

Výsledek by pak odpovídal balistickému rozletování atomů jako klasických kuliček

Interakce jsou sice slabé, ale protože past drží atomy pohromadě, jejich účinek je značný,

jednak ještě za působení potenciálu pasti,

jednak v počátečních stadiích rozletu, kdy obláček je ještě hustý



MAKROSKOPICKÁ VLNOVÁ FUNKCE KONDENSÁTU

bez interakcí by kondensát byl v základním stavu oscilátoru (čárkovaně - - - - -)

Experiment ukazuje významné "nafouknutí" vnitřním tlakem; to je přesně reprodukováno řešením tzv. Gross-Pitajevského rovnice

Příklad výpočtu balistického rozletu

Repulsivní interakce působí zpočátku silněji a atomy "předbíhají čas" proti čistě balistickému rozletu

Později je rozlet již zase lineární.

Výpočet byl ve shodě s experimentem pro vhodnou sílu interakce, která odpovídá nezávislým měřením atomových srážek.

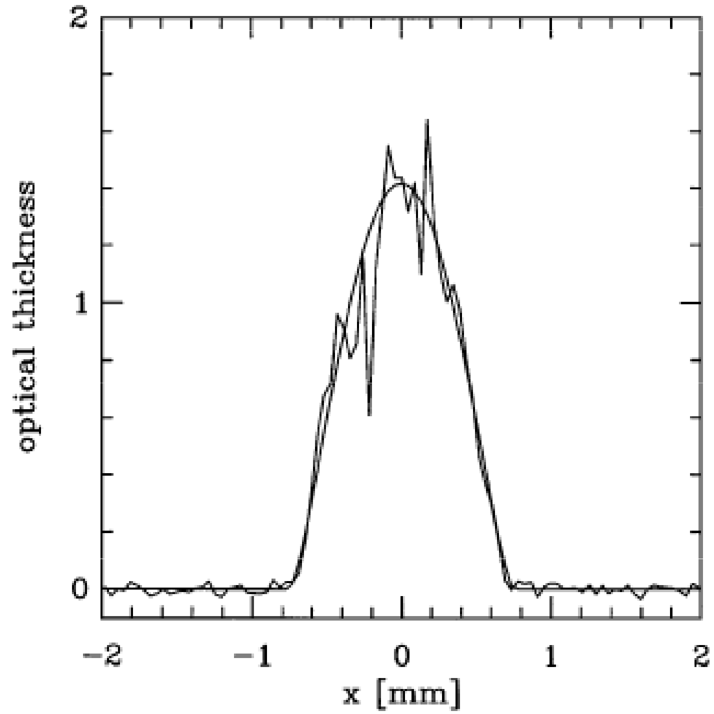
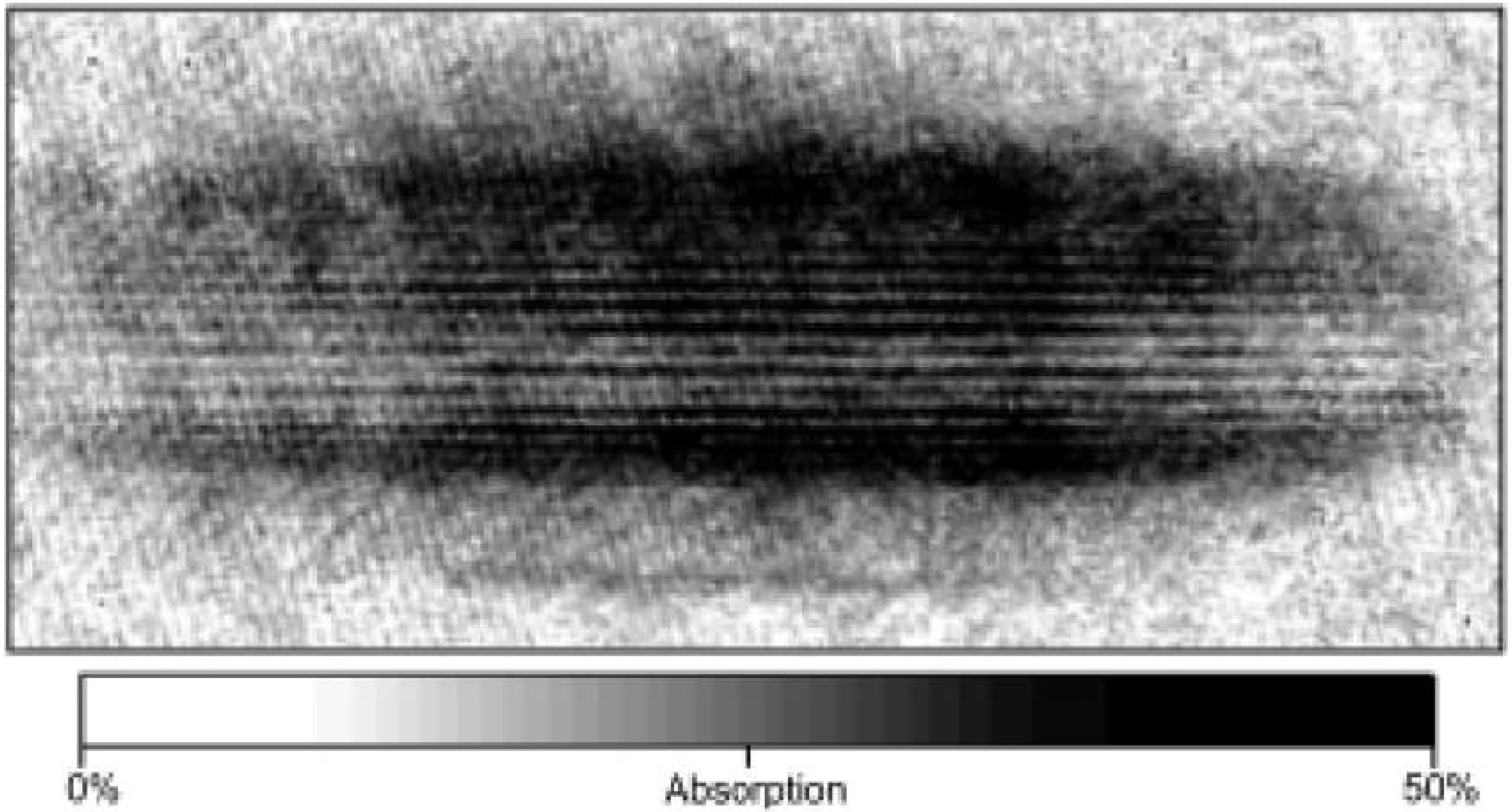


FIG. 1. Spatial density of an expanding condensate integrated along the y axis, cut along the x axis (that is, at $z = 0$). Experimental data obtained at MIT (expansion time of 40 ms) and fit from theory.

Castin&Dum,
PRL **77**, 5315 (1996)

První přímý důkaz kvantové koherence atomárního BE kondensátu

Interference atomů



Dva koherentní kondensáty se pronikají a interferují.
Vertikální vzdálenost proužků je 15 μm
Vodorovný rozměr obláčku 1,5mm

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.

vlny na vodě

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

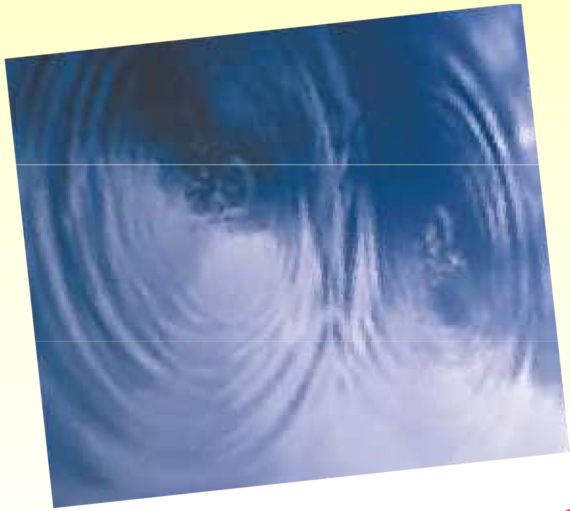
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

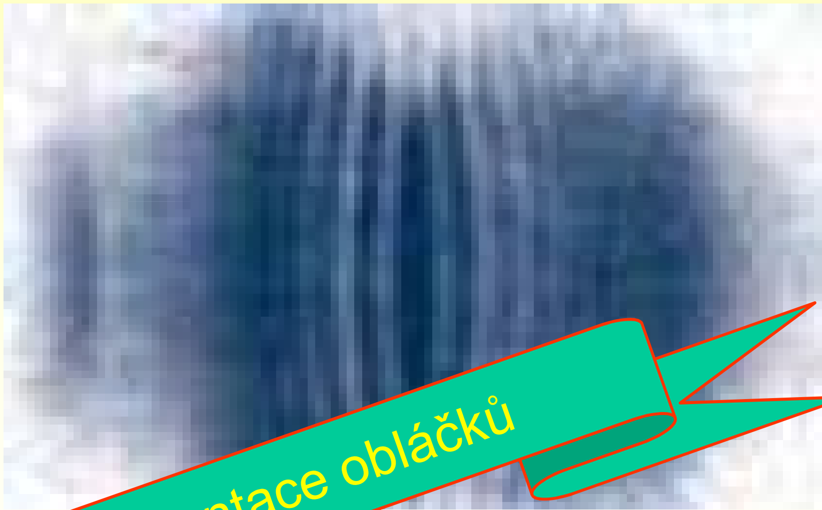
Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.





skutečná orientace obláčků

vlny na vodě

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

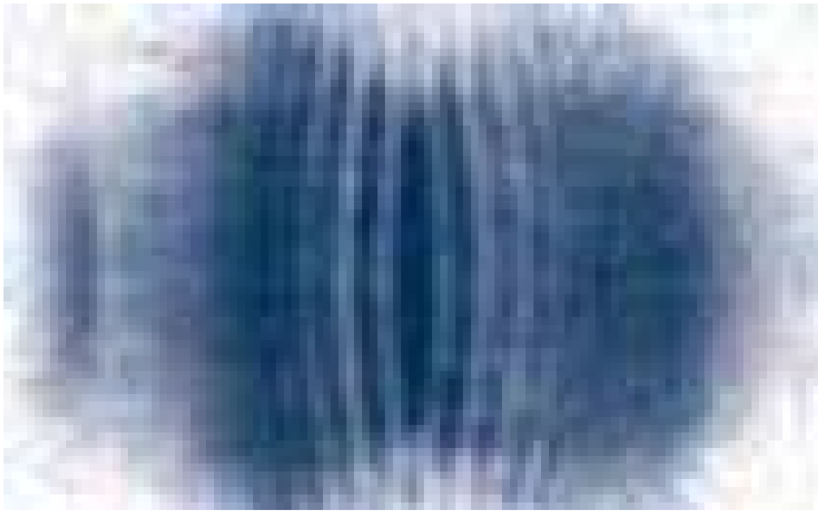
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

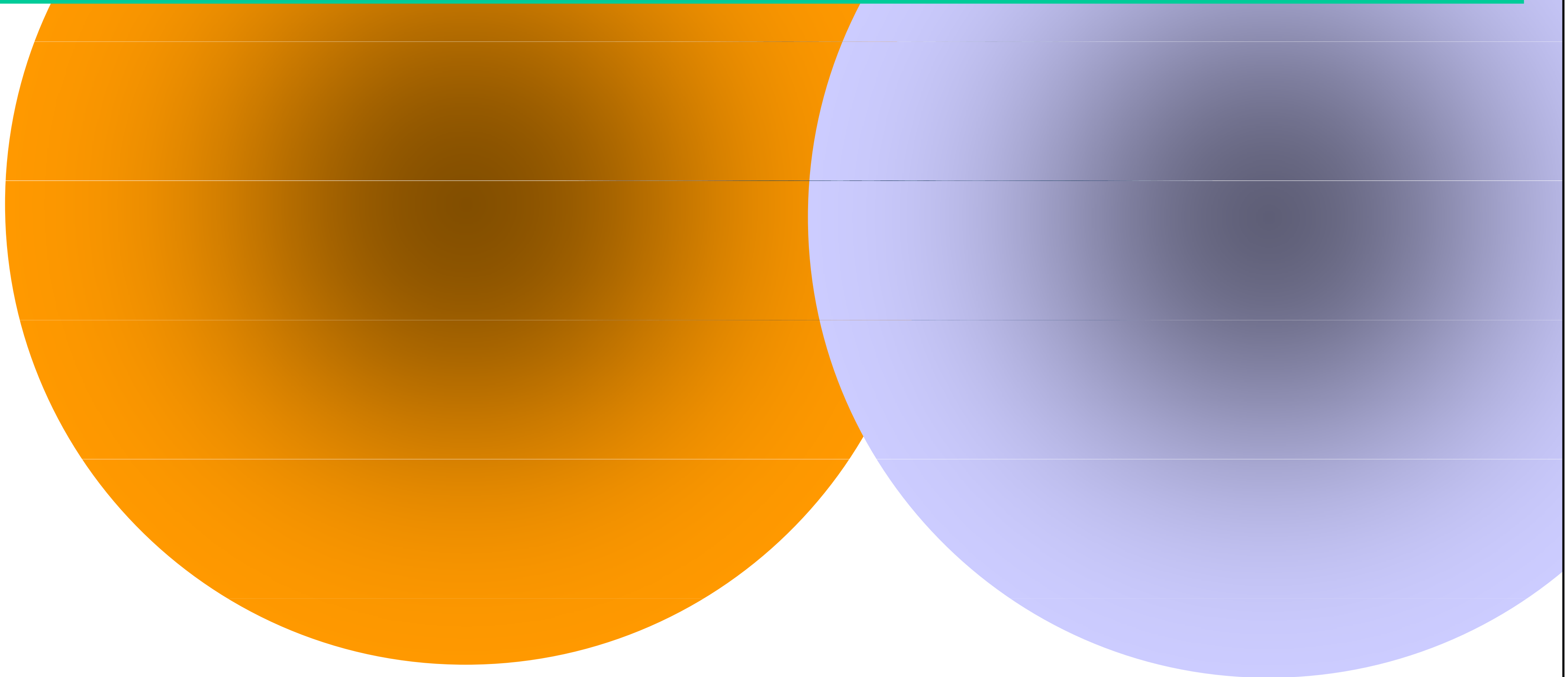
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



Boom BEC, teď ještě mnohem živější

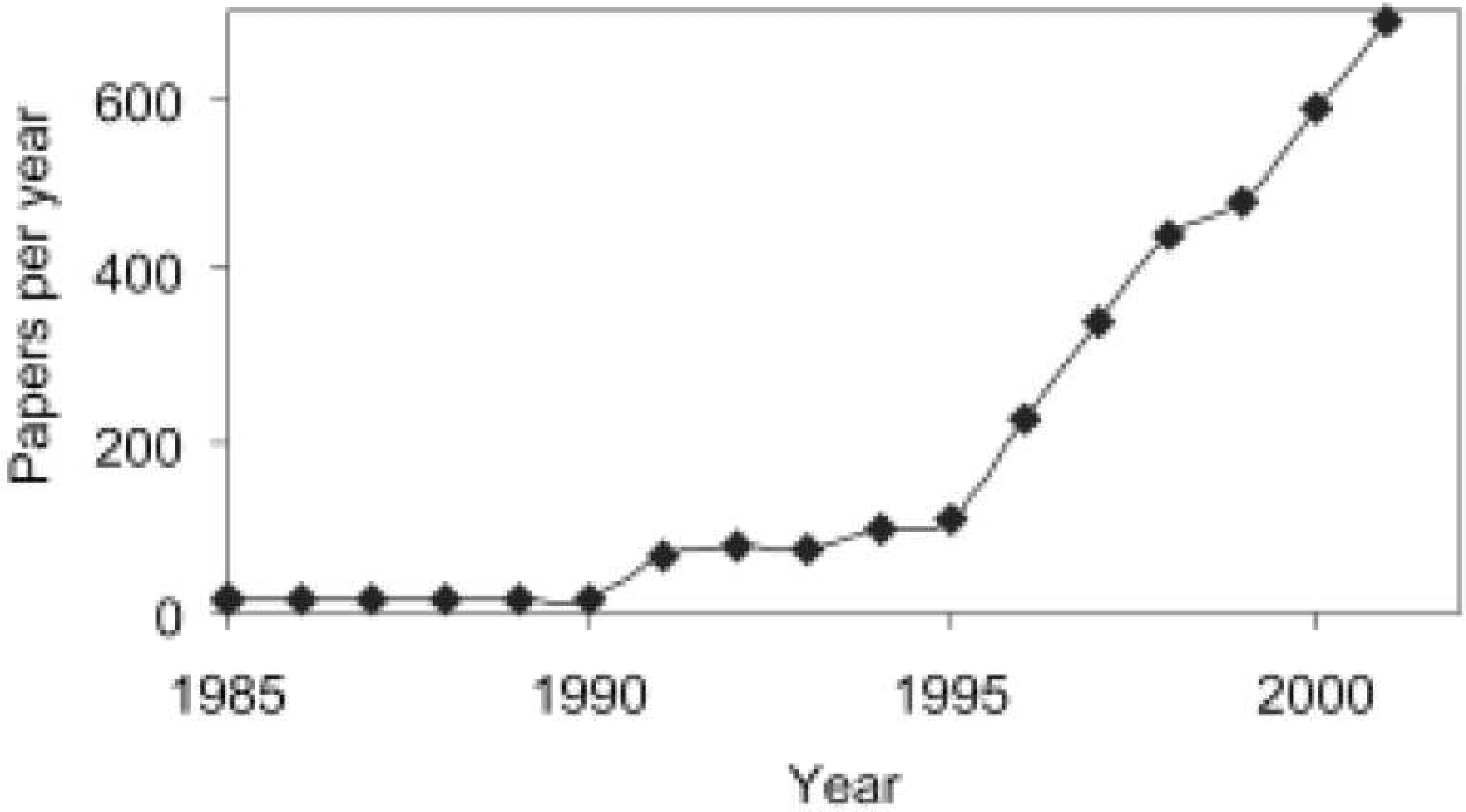
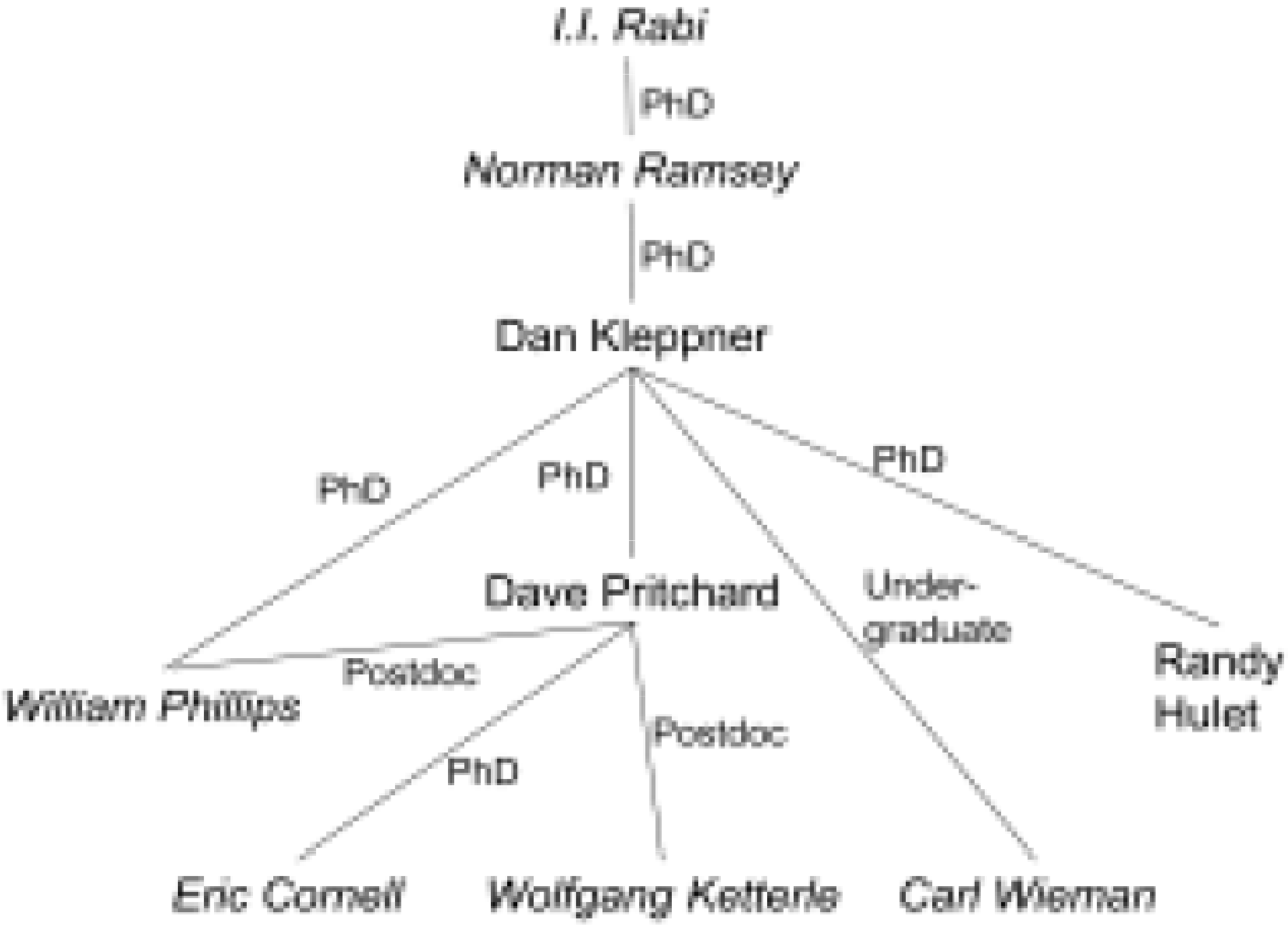


Figure 1. Annual number of published papers, which have the words "Bose" and "Einstein" in their title, abstracts or keywords. The data were obtained by searching the ISI (Institute for Scientific Information) database.

Strom nobelistů (kursivou) v atomové fyzice



The end