15. OBJEM, ORIENTÁCIA A VEKTOROVÝ SÚČIN

Naše zavedenie determinantov v kapitole 10 sme motivovali úvahami o n-rozmernom objeme a orientovanom objeme v priestore $\mathbb{R}^n$, a definíciu determinantu sme potom dostali prenesením formálnych vlastností orientovaného objemu do (stĺpcových) vektorových priestorov K^n nad ľubovoľným poľom K. Prísne vzaté však vo vektorových priestoroch, v ktorých nevieme povedať, ani čo je to dĺžka vektora, nedáva pojem objemu ani orientovaného objemu žiadny zmysel. Na druhej strane, vo vektorovom priestore V so skalárnym súčinom možno pre každé kladné celé číslo $k \leq \dim V$ zmysluplne definovať *k-rozmerný objem* ako aj *orientovaný k-rozmerný objem* k-rozmerného rovnobežnostena

$$\{a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{u}_k;\ a_1, \ldots, a_k \in \langle 0, 1\rangle\}$$

vytvoreného vektormi $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V$ (o skutočne k-rozmerný rovnobežnosten ide samozrejme len vtedy, keď vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne nezávislé, inak je to útvar nižšej dimenzie). Práve definícia takýchto objemov a vyjasnenie ich súvisu s determinantmi ako i s tzv. *vektorovým súčinom* bude náplňou tejto kapitoly. Objemami zložitejších útvarov sa tu zaoberať nebudeme – ich štúdium je predmetom *teórie miery a integrálu*, ktorá využíva viaceré podstatne hlbšie myšlienky a náročnejšie metódy, než sú tie, s ktorými sme sa doposiaľ zoznámili.

15.1. Objem

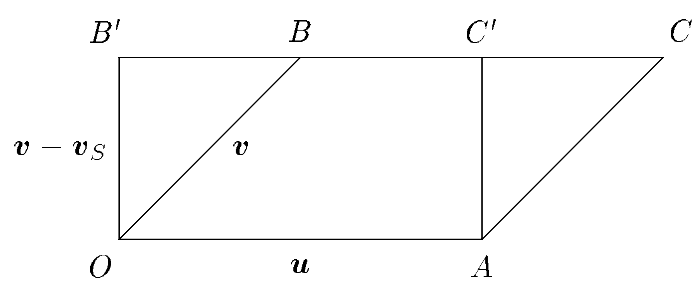
Pripomeňme si, ako počítame plošný obsah (t. j. dvojrozmerný objem) $\mathrm{vol}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ rovnobežníka vytvoreného vektormi $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ v $\mathbb{R}^2$ alebo v $\mathbb{R}^3$ (označenie vol je z anglického *volume*). Jeden z vektorov, dajme tomu $\boldsymbol{v}$, rozložíme na súčet dvoch zložiek

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_S + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S),$$

kde $\boldsymbol{v}_S$ je kolmý priemet vektora $\boldsymbol{v}$ do podpriestoru $S = [\boldsymbol{u}]$ a zložka $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S$ je kolmá na $\boldsymbol{u}$. Príslušný obsah potom dostaneme ako súčin dĺžok

$$\mathrm{vol}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S\|\,.$$

Zo zhodnosti trojuholníkov OBB' a ACC' totiž vyplýva, že rovnobežník $OACB$ a obdĺžnik $OAC'B'$ majú rovnaký obsah. (Na obrázku vynechávame šípky vektorov.)



Podobne, trojrozmerný objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ dostaneme ako súčin

$$\mathrm{vol}_3(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathrm{vol}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_T\|$$

plošného obsahu $\mathrm{vol}_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ a dĺžky $\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_T\|$ zložky vektora $\boldsymbol{w}$ kolmej na podpriestor $T = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$.

Podľa tejto schémy budeme pokračovať aj do vyšších dimenzií. Inak povedané, *k-rozmerný objem* rovnobežnostena vytvoreného k vektormi z vektorového priestoru so skalárnym súčinom V budeme definovať ako funkciu $\mathrm{vol}_k \colon V^k \to \mathbb{R}$ rekurziou cez k. Pre $k = 1$, $\boldsymbol{u} \in V$ kladieme

$$\mathrm{vol}_1(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|,$$

t. j. jednorozmerný objem je jednoducho dĺžka vektora. Ak $k > 1$ a $(k-1)$-rozmerný objem vol_{k-1} už máme definovaný, tak pre $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k \in V$ položíme

$$\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k) = \mathrm{vol}_{k-1}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1})\, \|\boldsymbol{u}_k - \mathrm{pr}_S(\boldsymbol{u}_k)\|,$$

kde $\mathrm{pr}_S(\boldsymbol{u}_k)$ je kolmý priemet vektora $\boldsymbol{u}_k$ do podpriestoru $S = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{k-1}]$.

Dôkaz nasledujúceho jednoduchého tvrdenia prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

15.1.1. Tvrdenie. *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom a $k \geq 1$. Potom pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in V$ platí:*

(a) $\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) \geq 0$, *pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne závislé;*

(b) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ *sú ortogonálne práve vtedy, keď* $\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) = \|\boldsymbol{u}_1\| \dots \|\boldsymbol{u}_k\|$;

(c) *ak $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne nezávislé, tak*

$$\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) = \mathrm{vol}_k(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = \|\boldsymbol{v}_1\| \dots \|\boldsymbol{v}_k\|,$$

kde vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ sú získané z vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačným procesom podľa vety 13.4.5.

Časť (c) nám dáva priamy návod na výpočet objemu $\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$. Stačí utvoriť Gramovu maticu $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ a upraviť ju úpravami typu (1^+) na diagonálny tvar. Ak sa nám to podarí, tak na diagonále máme druhé mocniny noriem vektorov $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ – stačí teda zobrať druhú odmocninu ich súčinu. Ak sa nám to nepodarí, môže to byť len z toho dôvodu, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ nie sú lineárne nezávislé – v takom prípade je objem ich rovnobežnostena 0. Objem $\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ však možno vyjadriť aj bez Gramovho-Schmidtovho ortogonalizačného procesu len pomocou Gramovho determinantu.

15.1.2. Veta. *Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom a $k \geq 1$. Potom pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k \in V$ platí*

$$\mathrm{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)|^{1/2}.$$

Dôkaz. Ak vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ sú lineárne závislé, tak potrebný záver vyplýva z podmienky 15.1.1 (a) a dôsledku 13.2.2. Ak sú lineárne nezávislé, tak podľa predošlej úvahy a vety 12.2.3 spolu s poznámkou, ktorá ju predchádza, existuje horná trojuholníková matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ s jednotkami na diagonále, taká, že

$$\boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) \cdot \boldsymbol{P} = \operatorname{diag}\big(\|\boldsymbol{v}_1\|^2, \dots, \|\boldsymbol{v}_k\|^2\big),$$

kde vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ sú výsledkom Gramovej-Schmidtovej ortogonalizácie vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$. Keďže $|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^T| = 1$, priamym výpočtom s použitím 15.1.1 (c). dostávame

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)^2 &= \|\boldsymbol{v}_1\|^2 \dots \|\boldsymbol{v}_k\|^2 = \big|\operatorname{diag}\big(\|\boldsymbol{v}_1\|^2, \dots, \|\boldsymbol{v}_k\|^2\big)\big| \\ &= \big|\boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k) \cdot \boldsymbol{P}\big| = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)|. \end{aligned}$$

Zámena poradia i-teho a j-teho vektora sa na Gramovej matici $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ prejaví zámenou i-teho a j-teho stĺpca a zároveň i-teho a j-teho riadku – teda jej determinant, a preto ani objem $\operatorname{vol}_k(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$, sa tým nezmení. Doteraz uvažované objemy vol_k teda možno právom nazvať neorientovanými.

15.2. Orientácia

Skôr než sa začneme zaoberať orientovaným objemom v euklidovskom priestore, je potrebné najprv stručne pojednať o *orientácii* ako takej. Ukazuje sa, že tento pozoruhodný jav nezávisí na skalárnom súčine, ale možno sa s ním stretnúť v ľubovoľnom konečnorozmernom vektorovom priestore nad poľom $\mathbb{R}$.

Nech teda V je reálny vektorový priestor konečnej dimenzie $n \geq 1$. Hovoríme, že dve bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V sú *súhlasne orientované*, ak matica prechodu $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ má kladný determinant.

Keďže $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{I}_n$, každá báza je súhlasne orientovaná sama so sebou, t. j. vzťah súhlasnej orientácie je *reflexívny*. Z rovnosti $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1}$ zasa vyplýva *symetria* tohto vzťahu. Konečne z rovnosti $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}$ výplýva, že vzťah súhlasnej orientácie je *tranzitívny*. Podčiarknuté a zrátané, vzťah súhlasnej orientovanosti je *ekvivalenciou* na množine všetkých báz priestoru V. Keďže každá matica prechodu je regulárna, jej determinant môže byť len kladný alebo záporný. Tým sa nám množina všetkých báz priestoru V rozpadne na dve disjunktné triedy, z ktorých každá pozostáva so súhlasne orientovaných báz, kým dve bázy patriace do rôznych tried sú orientované nesúhlasne.

Orientácia konečnorozmerného reálneho vektorového priestoru V spočíva vo výbere jednej jeho bázy $\boldsymbol{\alpha}$, ktorú prehlásime za *kladne orientovanú*, rovnako ako všetky bázy orientované súhlasne s ňou – tieto tvoria jednu zo spomínaných tried. Druhá z týchto tried obsahuje bázy orientované nesúhlasne s $\boldsymbol{\alpha}$ – nazveme ich *záporne orientované* bázy. Vektorový priestor, v ktorom sme uskutočnili voľbu nejakej kladne orientovanej bázy nazveme *orientovaný*. Na konečnorozmernom reálnom vektorovom priestore tak možno zadať dve rôzne, navzájom opačné orientácie. Priestor $\mathbb{R}^n$ je prirodzené orientovať tak, aby kanonická báza $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ mala kladnú orientáciu; tejto orientácii $\mathbb{R}^n$ hovoríme *kanonická*. V abstraktnom n-rozmernom priestore, kde nemáme žiadnu privilegovanú bázu, však aj táto pomoc pri voľbe orientácie odpadá – nanajvýš si môžeme hodiť mincou.

Orientovateľnosť konečnorozmerného reálneho vektorového priestoru V sa zakladá na tom, že každá nadrovina vo V má „dve strany“, t. j. delí V na dva polpriestory, pričom z jedného do druhého sa nemožno dostať spojitým pohybom bez toho, aby sme preťali deliacu nadrovinu. Navyše v euklidovskom priestore V nemožno útvar ležiaci v jednom z polpriestorov previesť na jeho „zrkadlový obraz“, t. j. na útvar s ním súmerne združený podľa nadroviny, nijakým zhodným zobrazením, ktoré možno realizovať spojitým pohybom vo V.

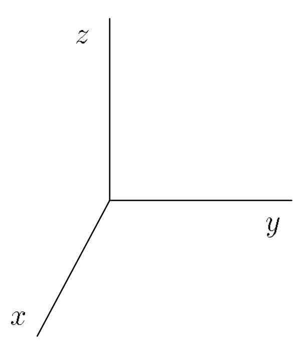
Intuitívne zodpovedá voľba orientácie priestoru V, t. j. pririeknutie jednej z dvoch možných orientácií nejakej jeho báze $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, rozdeleniu V nadrovinou $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}]$ na dva polpriestory a prehláseniu jedného z nich za kladný a druhého za záporný polpriestor. Podľa toho, do ktorého z nich smeruje vektor $\boldsymbol{u}_n$, bude i báza $\boldsymbol{\alpha}$ kladne alebo záporne orientovaná. Ak napr. prehlásime bázu $\boldsymbol{\alpha}$ za kladne orientovanú, bude báza $\boldsymbol{\alpha}' = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}, -\boldsymbol{u}_n)$ orientovaná záporne.

Orientácia jednorozmerného priestoru pomocou nejakého vektora (kladne orientovanej bázy) $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ teda zodpovedá vyznačeniu kladného smeru od počiatku $\mathbf{0}$, t. j. polpriamky $\{a\boldsymbol{u}; 0 < a \in \mathbb{R}\}$. Opačná polpriamka $\{a\boldsymbol{u}; 0 > a \in \mathbb{R}\}$ potom vyznačuje záporný smer.

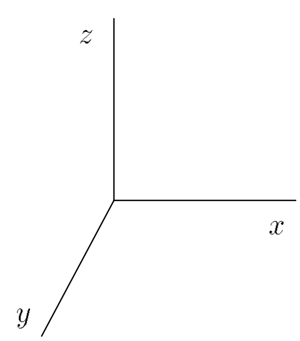
V dvojrozmernom priestore sa na zadanie orientácie voľbou kladne orientovanej bázy $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ možno dívať aj ako na vyznačenie kladného zmyslu otáčania roviny okolo počiatku $\mathbf{0}$ od $\boldsymbol{u}_1$ k $\boldsymbol{u}_2$. Zmysel otáčania od $\boldsymbol{u}_2$ k $\boldsymbol{u}_1$ je potom záporný, čo sa intuitívne zhoduje s tým, že „opačná“ báza $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1)$ k báze $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ zadáva opačnú orientáciu dvojrozmerného priestoru.

Vo všeobecnom prípade sú bázy $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ a $(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{u}_{\sigma(n)})$, kde $\sigma \in \mathcal{S}_n$, súhlasne orientované práve vtedy, keď σ je párna permutácia (dokážte).

V trojrozmernom priestore zadanie orientácie voľbou nejakej kladne orientovanej bázy zodpovedá napr. výberu pravej alebo ľavej strany. Pri tom môžeme využiť asymetriu našej fyziológie (napr. až na celkom ojedinelé výnimky majú ľudia srdce na ľavej strane, výrazná väčšina populácie sú praváci). Kladnú orientáciu možno fixovať napr. *pravidlom pravej ruky*: vystretý ukazovák, prostredník zohnutý kolmo k dlani a palec vztýčený kolmo na ich rovinu (v tomto poradí) tvoria kladne orientovanú „bázu“. Po stotožnení vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ s trojrozmerným fyzikálnym priestorom a smerového vektora $\boldsymbol{e}_1$ osi x s ukazovákom, smerového vektora $\boldsymbol{e}_2$ osi y s prostredníkom a smerového vektora $\boldsymbol{e}_3$ osi z s palcom pravej ruky tak dostávame tzv. *pravotočivú súradnú sústavu* v $\mathbb{R}^3$. Analogickým spôsobom dostaneme i *ľavotočivú súradnú sústavu*, ak zadáme kladnú orientáciu v $\mathbb{R}^3$ pomocou zrejmého *pravidla ľavej ruky*.



Pravotočivá súradná sústava



Ľavotočivá súradná sústava

Všetky zákony klasickej fyziky sú invariantné voči zrkadlovej reflexii v priestore aj v čase, to znamená, že ich matematická formulácia sa nezmení, ak v nich vystupujúce veličiny vyjadrené v jednej báze vyjadríme vzhľadom na s ňou nesúhlasne orientovanú bázu. Výnimkou sú niektoré zákony štatistickej fyziky, menovite zákon rastu entropie, ktorý nepripúšťa obrátenie smeru plynutia času. Otázka, či existujú fyzikálne zákony, ktoré nie sú invariantné voči zrkadlovej reflexii priestoru, bola na všeobecné prekvapenie zodpovedaná kladne v druhej polovici 50. rokov 20. storočia, keď sa experimentálne potvrdilo, že pri tzv. *slabých interakciách* sa nezachováva *parita*. Tento výsledok nám samozrejme nehovorí, ktorej z dvoch možných orientácií priestoru by sme mali dať prednosť, ale iba to, že matematický tvar istého fyzikálneho zákona sa môže zmeniť zmenou orientácie priestoru. Voľbou jednej z dvoch možných matematických foriem tohto zákona teda môžeme fixovať orientáciu „nášho“ trojrozmerného fyzikálneho priestoru aj menej antropomorfným spôsobom než len niektorým z pravidiel pravej alebo ľavej ruky. Neskôr sa zistilo, že pri slabých interakciách dochádza taktiež k (ešte podstatne slabšiemu) narušeniu invariancie voči zrkadlovej reflexii času.

Podľa v súčasnosti prevládajúcich kozmologických predstáv práve narušeniu tzv. *kombinovanej parity* (CP) vďačíme za to, že vo veľmi ranom štádiu vývoja vesmíru vzniklo nepatrne viac *baryónov* (ťažkých častíc ako napr. protóny a neutróny) než ich zrkadlových dvojníkov, tzv. *antibaryónov*, takže postupne nedošlo k úplnej anihilácii všetkej hmoty s antihmotou (presnejšie baryónov s antibaryónmi) na žiarenie, čo teprv umožnilo vznik atómov, hviezd, planét, a napokon i nás samotných.

15.3. Orientovaný objem

V našich úvahách o orientovanom objeme sa v tomto paragrafe obmedzíme len na n-rozmerný orientovaný objem v n-rozmernom euklidovskom priestore.

Nech teda V je n-rozmerný euklidovský priestor. Vyberme v ňom pevnú *ortonormálnu* bázu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, ktorú prehlásime za kladne orientovanú. Pre ľubovoľnú usporiadanú n-ticu $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \in V^n$ definujeme n-rozmerný *orientovaný objem* rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ ako determinant

$$\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_n \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u}_n \rangle \end{vmatrix}$$

matice $\big(\langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_i \rangle\big) = \big((\boldsymbol{x}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\boldsymbol{x}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ktorej stĺpce sú tvorené súradnicami vektorov $\boldsymbol{x}_j$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ (pozri tvrdenie 13.4.4 (a)).

Orientovaný objem sme teda definovali ako istý determinant, pričom za jeho jednotku sme zvolili orientovaný objem n-rozmernej kocky vytvorenej vektormi kladne orientovanej ortonormálnej bázy $\boldsymbol{\alpha}$. V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom a kanonickou orientáciou, t. j. pri voľbe $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

$$\det \boldsymbol{A} = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})),$$

teda, presne v zhode s kapitolou 10, $\det \boldsymbol{A}$ je orientovaný n-rozmerný objem rovnobežnostena vytvoreného stĺpcami matice $\boldsymbol{A}$. Taktiež naopak, všetky podstatné vlastnosti orientovaného n-rozmerného objemu možno teraz odvodiť ako bezprostredné dôsledky príslušných vlastností determinantu, takže nemusíme čitateľa unavovať ich vymenúvaním. Zostáva sa presvedčiť, že

(1) orientovaný objem nezávisí od výberu konkrétnej kladne orientovanej ortonormálnej bázy $\boldsymbol{\alpha}$ (čo prenechávame ako cvičenie čitateľovi);

(2) medzi orientovaným a neorientovaným objemom naozaj je očakávaná súvislosť.

To sa udeje v nasledujúcej vete (v jej znení i v celom jej dôkaze zvislé zátvorky $|\ |$ označujú výlučne absolútnu hodnotu, kým determinant dôsledne značíme det).

15.3.1. Veta. *Nech V je orientovaný n-rozmerný euklidovský priestor. Potom pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in V$ platí*

$$\operatorname{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \big|\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\big|;$$

pričom lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots . \boldsymbol{x}_n$ tvoria kladne orientovanú bázu vo V práve vtedy, keď $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) > 0$.

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je kladne orientovaná ortonormálna báza vo V. Označme

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_n \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Podľa našej definície je $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \det \boldsymbol{X}$. Z tvrdenia 13.4.4 (b) zase vyplýva $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X}$. Teda podľa vety 15.1.2 máme

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) &= \sqrt{\det \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)} = \sqrt{\det(\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X})} \\ &= \sqrt{\det \boldsymbol{X}^T \det \boldsymbol{X}} = |\det \boldsymbol{X}| = \big|\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)\big|. \end{aligned}$$

Keďže stĺpce matice $\boldsymbol{X}$ sú tvorené súradnicami vektorov $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$, ak sú tieto lineárne nezávislé, tak $\boldsymbol{X}$ je zároveň maticou prechodu z bázy $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$ (pozri paragraf 7.5). Teda bázy $\boldsymbol{\alpha}$ a $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ sú orientované súhlasne práve vtedy, keď $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \det \boldsymbol{X} > 0$.

15.3.2. Dôsledok. *Nech V je orientovaný n-rozmerný euklidovský priestor. Potom vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in V$ sú lineárne nezávislé (t. j. tvoria bázu priestoru V) práve vtedy, keď $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \neq 0$.*

Orientovaný objem $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ sa zvykne nazývať aj *vonkajší súčin* vektorov $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ a v tejto súvislosti sa značí $(\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_n)$. V kurze fyziky sa vonkajší súčin $(\boldsymbol{xyz})$ v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom zavádza pomocou skalárneho a vektorového súčinu formulou

$$(\boldsymbol{xyz}) = \langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z}$$

a zvykne sa tiež nazývať *zmiešaný súčin* vektorov $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. V nasledujúcom paragrafe si ukážeme, ako je tento súčin „zmiešaný“ zo skalárneho a vektorového súčinu vo všeobecnom n-rozmernom euklidovskom priestore. Postupovať však budeme opačným smerom – orientovaný objem (t. j. vonkajší súčin) spolu so skalárnym súčinom nám poslúžia ako východisko na definíciu vektorového súčinu.

15.4. Vektorový súčin

Predpokladajme i naďalej, že V je orientovaný euklidovský priestor dimenzie $n \geq 2$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je nejaká jeho kladne orientovaná ortonormálna báza.

Nech $0 \leq k \leq n$ a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in V$ sú pevne zvolené vektory. Dosadením na prvých k-miest orientovaného objemu (vonkajšieho súčinu) tieto vektory definujú vzťahom

$$F(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{n-k}) = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_{n-k}) = (\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_k \boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{n-k})$$

$(n-k)$-lineárne alternujúce zobrazenie $F\colon V^{n-k} \to \mathbb{R}$. V prípade $k = n$ nám, samozrejme, nezostáva miesto na dosadzovanie ypsilonov, takže F prirodzene stotožňujeme s hodnotou $\mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}$; touto otázkou sme sa už zaoberali v predchádzajúcom paragrafe. V tomto paragrafe sa budeme zaoberať prípadom $k = n-1$.

Pevne zvolené vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ definujú vzťahom

$$\psi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_{n-1} \boldsymbol{y})$$

lineárny funkcionál $\psi\colon V \to \mathbb{R}$. Uvedomme si, že skalárny súčin je *regulárna* symetrická bilineárna forma na V. Preto podľa dôsledku 11.1.8 má každý lineárny funkcionál $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ tvar $\varphi(\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} \rangle$ pre jednoznačne určený vektor $\boldsymbol{v} \in V$. Aplikované na náš konkrétny prípad to znamená, že existuje jediný vektor $\boldsymbol{v} \in V$ taký, že

$$\psi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_{n-1} \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} \rangle$$

pre všetky $\boldsymbol{y} \in V$. Tento jednoznačne určený vektor nazývame *vektorovým súčinom* prípadne tiež *ortokomplementom* vektorov $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ a značíme ho

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 \times \dots \times \boldsymbol{x}_{n-1}.$$

Z uvedenej defnície priamo vyplýva, že, rovnako ako orientovaný n-rozmerný objem, ani vektorový súčin nezávisí na výbere konkrétnej kladne orientovanej ortonormálnej bázy vo V.

V dimenzii $n = 2$ ide len o unárnu (jednomiestnu) operáciu $V \to V$ – z toho dôvodu nehovoríme o vektorovom súčine ale výlučne o *ortokomplemente* vektora $\boldsymbol{x}$, ktorý značíme $\boldsymbol{x}^{\perp}$ (keďže znak súčinu $\times$ nemáme medzi čo umiestniť). V dimenzii $n = 3$ ide o binárnu (dvojmiestnu) operáciu $V \times V \to V$ vektorového súčinu, známeho z kurzov fyziky. No v dimenzii $n \geq 4$ je už $n-1 > 2$ a vektorový súčin je $(n-1)$-miestna operácia na V.

Vzťah medzi skalárnym (t. j. vnútorným), vektorovým a vonkajším súčinom zachytáva nasledujúca rovnosť, platná pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n \in V$,

$$\langle \boldsymbol{x}_1 \times \dots \times \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n \rangle = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_{n-1} \boldsymbol{x}_n).$$

Čítaná zľava doprava je to už uvedená definícia vektorového súčinu $\boldsymbol{x}_1 \times \dots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ prostredníctvom orientovaného objemu a skalárneho súčinu. Môžeme ju však čítať aj sprava doľava – vtedy sa z nej stáva definícia vonkajšieho súčinu (orientovaného objemu) ako istej kompozície skalárneho a vektorového súčinu. Takto sa bežne postupuje v kurzoch fyziky, kde sa najprv zavedie skalárny a vektorový súčin v dimenzii $n = 3$ geometrickým spôsobom a zmiešaný (t. j. vonkajší) súčin príde na rad až po nich.

Pokúsme sa teraz vyjadriť súradnice vektorového súčinu $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ pomocou súradníc jednotlivých vektorov $\boldsymbol{x}_j$.

Začneme najjednoduchším prípadom $n = 2$. Ortokomplement $\boldsymbol{x}^\perp$ vektora $\boldsymbol{x}$ je taký vektor, že

$$\langle \boldsymbol{x}^\perp, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{vol}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}_2 \rangle \end{vmatrix}$$

platí pre každé $\boldsymbol{y} \in V$. Ak za $\boldsymbol{y}$ postupne dosadíme hodnoty $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, dostaneme

$$\langle \boldsymbol{x}^\perp, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \mathbf{vol}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle & 1 \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle & 0 \end{vmatrix} = -\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{x}^\perp, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \mathbf{vol}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle & 0 \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle & 1 \end{vmatrix} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle.$$

Ak označíme $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, x_2)^T$, kde $x_1 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle$, $x_2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ sú súradnice vektora $\boldsymbol{x}$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$, tak pre súradnice vektora $\boldsymbol{x}^\perp$ dostaneme

$$(\boldsymbol{x}^\perp)_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\boldsymbol{x}^\perp$ teda môžeme zapísať v tvare

$$\boldsymbol{x}^\perp = -x_2 \boldsymbol{u}_1 + x_1 \boldsymbol{u}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \boldsymbol{u}_1 \\ x_2 & \boldsymbol{u}_2 \end{vmatrix} = \det\bigl((\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}^T\bigr),$$

kde posledný determinant treba chápať ako úsporný zápis predošlej lineárnej kombinácie, ktorá je tak jeho čiste *formálnym* Laplaceovým rozvojom podľa druhého stĺpca.

Rovnako si budeme počínať pre ľubovoľné $n \geq 3$. Najprv položíme $x_{ij} = \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_i \rangle$ pre $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, a označíme $\boldsymbol{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ maticu, ktorej stĺpce tvoria súradnice vektorov $\boldsymbol{x}_j$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$. Vektorový súčin $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ je taký vektor, že

$$\langle \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y} \rangle = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}) = \det\bigl(\boldsymbol{X}, (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}}\bigr)$$

platí pre každé $\boldsymbol{y} \in V$. Ak za $\boldsymbol{y}$ postupne dosadíme hodnoty $\boldsymbol{u}_i$, kde $1 \leq i \leq n$, pre súradnice vektora $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ v báze $\boldsymbol{\alpha}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{u}_i \rangle &= \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{u}_i) \\ &= \det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}_i) = (-1)^{n+i} |\boldsymbol{X}_i|, \end{aligned}$$

kde matica $\boldsymbol{X}_i \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ vynechaním i-teho riadku. Vektor $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ teda možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} |\boldsymbol{X}_i| \, \boldsymbol{u}_i \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1\,n-1} & \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1\,n} & \ldots & x_{n-1\,n-1} & \boldsymbol{u}_{n-1} \\ x_{n1} & \ldots & x_{n\,n-1} & \boldsymbol{u}_n \end{vmatrix} = \det\bigl(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}^T\bigr). \end{aligned}$$

Pritom posledný determinant treba chápať najmä ako pomôcku na ľahké zapamätanie predošlej lineárnej kombinácie, ktorú z neho možno dostať *formálnym* Laplaceovým rozvojom podľa n-tého stĺpca.

V trojrozmernom euklidovskom priestore $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom sa vektory (kladne orientovanej) kanonickej bázy $\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}$ niekedy zvyknú značiť $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$. Vektorový súčin vektorov $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ v tomto prípade nadobúda známy tvar

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \boldsymbol{i} \\ x_2 & y_2 & \boldsymbol{j} \\ x_3 & y_3 & \boldsymbol{k} \end{vmatrix},$$

pričom v pravotočivom (ľavotočivom) súradnom systéme v $\mathbb{R}^3$ sú jeho smer a orientácia dané *pravidlom pravej (ľavej) ruky*: ak položíme dlaň príslušnej ruky v smere vektora $\boldsymbol{x}$ tak, že zohnuté prsty ukazujú v smere „kratšieho“ otočenia vektora $\boldsymbol{x}$ do vektora $\boldsymbol{y}$ okolo počiatku, tak vztýčený palec ukazuje v smere vektora $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$.

Všetky základné vlastnosti operácie vektorového súčinu $V^{n-1} \to V$ možno teraz jednoducho odvodiť na základe jej definície, prípadne jej vzťahu k n-rozmernému orientovanému objemu a reprezentácie v tvare uvedeného formálneho determinantu.

15.4.1. Veta. *Nech V je orientovaný euklidovský priestor dimenzie $n \geq 2$ a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1} \in V$. Potom*

(a) *vektorový súčin je $(n-1)$-lineárne alternujúce zobrazenie $V^{n-1} \to V$;*
(b) *vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1} = \boldsymbol{0}$;*
(c) *ak vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ sú lineárne nezávislé, tak $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ je normálový vektor nadroviny $[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}]$ a vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v}$ tvoria kladne orientovanú bázu priestoru V;*
(d) $\|\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}\| = \mathrm{vol}_{n-1}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1})$.

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je nejaká kladne orientovaná báza priestoru V. Označme $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{n\times(n-1)}$, kde $x_{ij} = \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_i\rangle$. Potom $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1} = \det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}^T)$.

(a) je zrejmé z reprezentácie vektorového súčinu $\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}$ v tvare uvedeného formálneho determinantu.

(b) Uvedomme si, že podľa dôsledku 11.1.8 je rovnosť $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ekvivalentná s podmienkou $(\forall\, \boldsymbol{y} \in V)(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}\rangle = 0)$. Podľa definície vektorového súčinu však platí

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}\rangle = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}).$$

Z dôsledku 15.3.2 potom vyplýva, že $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ práve vtedy, keď pre každé $\boldsymbol{y} \in V$ sú vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}$ lineárne závislé. Keďže $\dim V > n-1$, tento prípad zrejme nastane práve vtedy, keď už samotné vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ sú lineárne závislé.

(c) Podľa 15.3.2 pre ľubovoľné $1 \leq j \leq n-1$ platí

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_j\rangle = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_j, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_j) = 0,$$

t. j. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{x}_j$. Navyše, ak $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ sú lineárne nezávislé, tak $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, teda $\boldsymbol{v}$ je normála nadroviny $[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}]$.

Dokážeme, že báza $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v})$ priestoru V je súhlasne orientovaná s bázou $\boldsymbol{\alpha}$. Uvedomme si, že matica prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$ má tvar $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big(\boldsymbol{X}, (\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\alpha}}\big)$. Rozvojom jej determinantu podľa posledného stĺpca a s využitím našej znalosti súradníc

$$(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{\alpha}} = \big((-1)^{n+1}|\boldsymbol{X}_1|, \ldots, (-1)^{n+n}|\boldsymbol{X}_n|\big)^T,$$

kde $\boldsymbol{X}_i$ vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ vynechaním i-teho riadku, dostávame

$$\big|\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\big| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}|\boldsymbol{X}_i|\,(-1)^{n+i}|\boldsymbol{X}_i| = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{X}_i|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 > 0,$$

lebo v dôsledku (b) je $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. To však znamená, že bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú súhlasne orientované.

(d) Keďže $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}]^{\perp}$, s využitím definície vektorového súčinu, vety 15.3.1, práve dokázanej druhej časti (c) a rekurzívnej definície k-rozmerného objemu môžeme písať

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v}\rangle = \mathbf{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v})\\ &= \mathrm{vol}_n(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{vol}_{n-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1})\,\|\boldsymbol{v}\|\,.\end{aligned}$$

Ak $\|\boldsymbol{v}\| = 0$, tak podľa (b) sú $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ lineárne závislé, preto na základe tvrdenia 15.1.1 (a) tiež $\mathrm{vol}_{n-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}) = 0$. V opačnom prípade požadovanú rovnosť dostaneme krátením oboch strán členom $\|\boldsymbol{v}\| \neq 0$.

Z časti (d) a vety 15.1.2 priamo dostávame nasledujúci dôsledok.

15.4.2. Dôsledok. *(a) V dvojrozmernom orientovanom euklidovskom priestore V pre každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ platí $\|\boldsymbol{x}^{\perp}\| = \|\boldsymbol{x}\|$.*

(b) V trojrozmernom orientovanom euklidovskom priestore V pre všetky nenulové vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ platí $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| \sin \sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(c) Pre $n \geq 2$ v n-rozmernom orientovanom euklidovskom priestore V pre všetky $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1} \in V$ platí $\|\boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{n-1}\| = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1})|^{1/2}$.