16. ÚVOD DO ŠPECIÁLNEJ TEÓRIE RELATIVITY

V predchádzajúcich troch kapitolách sa nám podarilo zrekonštruovať v podstate celú štruktúru euklidovskej geometrie, zovšeobecnenej do ľubovoľnej konečnej dimenzie, z jedinej kladne definitnej symetrickej bilineárnej formy na reálnom vektorovom priestore. V tejto kapitole najprv stručne preskúmame geometriu konečnorozmerných reálnych vektorových priestorov vybavených indefinitnou regulárnou symetrickou bilineárnou formou. Potom si predvedieme, ako možno z jedinej takejto formy signatúry $(1, n, 0)$ odvodiť matematický aparát *špeciálnej teórie relativity.* Postupovať však budeme v opačnom smere, ako je zvykom vo fyzike. Nebudeme budovať matematický model analýzou fyzikálnej situácie, ale naopak, matematický model, tzv. *Minkowského časopriestor*, nájdeme už hotový. Fyzika sa nám začne vynárať pri jeho matematickom štúdiu takpovediac samovoľne, keď pre niektoré javy a objekty, s ktorými sa v ňom stretneme, začneme používať fyzikálnu terminológiu. Pri tom, samozrejme, budeme dbať na to, aby takéto pomenúvanie bolo v zhode s našou fyzikálnou intuíciou. To nebude zďaleka také ľahké, ako by sa vari dalo čakať – čitateľovi sú iste aspoň zbežne známe niektoré „populárne“ dôsledky špeciálnej teórie relativity, ktoré našej každodennej fyzikálnej skúsenosti zdanlivo protirečia. Aj nimi sa tu budeme pomerne podrobne zaoberať.

Základom špeciálnej teórie relativity je dôsledne uplatnený Galileov princíp relativity pohybu, postulujúci ekvivalenciu popisu pohybu a mechanických dejov z pohľadu ktoréhokoľvek z navzájom rovnomerne priamočiaro sa pohybujúcich pozorovateľov. Einstein tento princíp rozšíril do postulátu ekvivalencie popisu prírody z hľadiska ktoréhokoľvek z takýchto pozorovateľov. Presnejšia formulácia *Einsteinovho princípu relativity* hovorí, že *všetky prírodné zákony majú rovnakú matematickú podobu nezávisle od inerciálnej sústavy, vzhľadom na ktorú ich formulujeme.* Druhý zo základných relativistických princípov – *princíp stálosti rýchlosti svetla* – možno už tak trochu považovať za dôsledok prvého. Ak totiž medzi prírodné zákony zahrnieme aj rýchlosť, akou sa šíri svetelný signál vo vákuu, stane sa z tejto hodnoty fundamentálna konštanta, rovnaká pre všetky inerciálne sústavy. Matematická podoba formúl teórie relativity si potom vynucuje uznanie *princípu medznej hodnoty rýchlosti svetla*: relatívna rýchlosť pohybu hmotných objektov je vždy menšia než rýchlosť svetla.

Rozpisovať sa o epochálnom význame Einsteinovho objavu špeciálnej a potom všeobecnej teórie relativity by dnes už bolo nosením dreva do lesa. Patrí sa však poznamenať, že základy špeciálnej relativity možno do istej miery nájsť už u Lorentza a jej značnú časť rozvinul prakticky súčasne s Einsteinom a nezávisle na ňom Poincaré. Výlučným Einsteinovým objavom je až *všeobecná teória relativity* – no jej formulácia už nevystačí s matematickým aparátom lineárnej algebry. Vznik všeobecnej relativity však bol do značnej miery umožnený Minkowského formuláciou špeciálnej relativity, ktorá predstavuje jeden z prvých a rozhodujúcich momentov mimoriadne plodného a dodnes živého programu tzv. *geometrizácie fyziky.* Práve výklad špeciálnej teórie relativity v Minkowského geometrickom poňatí bude náplňou tejto kapitoly.

16.1. Pseudoeuklidovské priestory

Pseudoeuklidovským priestorom nazývame ľubovoľný konečnorozmerný vektorový priestor V nad poľom $\mathbb{R}$, vybavený regulárnou indefinitnou symetrickou bilineárnou formou. Túto formu nazývame *pseudoskalárny súčin* a jej hodnotu na vektoroch $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ značíme $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, t. j. rovnako, ako sme značili skalárny súčin. *Signatúrou pseudoeuklidovského priestoru* V rozumieme signatúru príslušnej formy. Táto má tvar $(p, q, 0)$, kde $p, q \geq 1$ a $p + q = \dim V$, čo nám umožňuje vynechať z nej posledný člen 0 a hovoriť o nej len ako o signatúre (p, q); v takom prípade hovoríme tiež o (p, q)-*rozmernom pseudoeuklidovskom priestore*. Od tejto chvíle až do konca tohto paragrafu V označuje nejaký pevne zvolený pseudoeuklidovský priestor a $n = \dim V$.

Pseudoskalárny súčin vo V takisto spĺňa prvé tri podmienky z definície skalárneho súčinu zo začiatku paragrafu 13.1, ako aj ich o kúsok ďalej uvedené dva dôsledky. Podmienku kladnej definitnosti (z ktorej už vyplýva regularita) však treba nahradiť nasledujúcimi dvoma podmienkami

$$(\exists\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle < 0 < \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle\big) \qquad \text{(indefinitnosť)},$$

$$(\forall\, \boldsymbol{y})\big(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0\big) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \text{(regularita)},$$

pričom ekvivalencia poslednej implikácie a regularity vyplýva z dôsledku 11.1.8.

Väčšinu pojmov, s ktorými sme sa zoznámili v euklidovských priestoroch, možno, niekedy s istými nevyhnutnými úpravami, zaviesť aj pre pseudoeuklidovské priestory. Taktiež celý rad výsledkov o euklidovských priestoroch si, opäť s istými modifikáciami, zachováva platnosť aj pre pseudoeuklidovské priestory. Keďže podrobné štúdium týchto priestorov nie je našim cieľom, nevydáme sa cestou systematickej revízie výsledkov troch predchádzajúcich kapitol. Obmedzíme sa len na niekoľko málo príkladov, ktoré nám budú užitočné v ďalších paragrafoch. To si však vyžiada zaviesť aj niekoľko pojmov a dokázať zopár výsledkov, ktoré nemajú priame analógie v euklidovských priestoroch.

Dvojmiestny vzťah ortogonality a ortokomplement množiny zavádzame rovnako ako v euklidovskom priestore

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0,$$

$$X^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \in V;\, (\forall\, \boldsymbol{x} \in X)(\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y})\},$$

pre $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $X \subseteq V$.

Gramovou maticou (usporiadanej k-tice) vektorov $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) \in V^n$ nazývame maticu

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = \big(\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle\big)_{k \times k};$$

jej determinant $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})|$ nazývame *Gramovým determinantom* vektorov $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Hovoríme, že *báza* $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ lineárneho podpriestoru $S \subseteq V$ je *ortonormálna*, ak pre všetky $i, j \leq k$ platí $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = 0$, ak $i \neq j$, a $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i \rangle = \pm 1$, t. j. práve vtedy, keď jej Gramova matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$ je diagonálna, len s prvkami ± 1 na diagonále.

Štandardný pseudoskalárny súčin signatúry (p, q) na (stĺpcovom) vektorovom priestore $\mathbb{R}^{p+q}$ je daný predpisom

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \Leftrightarrow \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i = \boldsymbol{x}^T \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_p, \Leftrightarrow \boldsymbol{I}_q) \cdot \boldsymbol{y}.$$

Ako vyplýva z výsledkov kapitol 11, 12, každý pseudoskalárny súčin tejto signatúry možno voľbou vhodnej ortonormálnej bázy, pri správnom poradí jej členov, upraviť na uvedený tvar. Pseudoeuklidovský priestor $\mathbb{R}^n$ so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry (p,q) budeme značiť $\mathbb{R}^{(p,q)}$.

Lineárny podpriestor $S \subseteq V$ sa nazýva *kladne definitný*, *záporne definitný*, *indefinitný*, *regulárny*, resp. *singulárny*, ak bilineárna forma $\langle\ ,\ \rangle$ zúžená na S má príslušnú vlastnosť. Zrejme kladne alebo záporne definitný podpriestor je regulárny.

Podobne, nenulový *vektor* $\boldsymbol{u} \in V$ sa nazýva *kladne* resp. *záporne definitný*, ak $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle > 0$, resp. $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle < 0$, t. j. práve vtedy, keď ním generovaný lineárny podpriestor má príslušnú vlastnosť. (Rozmyslite si, prečo nemá zmysel hovoriť o indefinitných vektoroch.)

Vektor $\boldsymbol{u} \in V$ sa nazýva *izotropný*, ak $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 0$, t. j. ak $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{u}$. V opačnom prípade hovoríme, že $\boldsymbol{u}$ je *anizotropný vektor*. Na rozdiel od euklidovských priestorov, v pseudoeuklidovských priestoroch existujú nenulové izotropné vektory (presvedčte sa o tom), ako aj netriviálne singulárne podpriestory (napr. každý podpriestor generovaný nenulovým izotropným vektorom je taký). Na druhej strane, každá ortonormálna báza lineárneho podpriestoru vo V nutne pozostáva len z anizotropných vektorov.

16.1.1. Tvrdenie. *(a) Lineárny podpriestor $S \subseteq V$ je regulárny práve vtedy, keď má ortonormálnu bázu.*

(b) Ľubovoľnú ortonormálnu bázu lineárneho podpriestoru $S \subseteq V$ možno doplniť do ortonormálnej bázy celého priestoru V.

Dôkaz. (a) Nech S je regulárny a $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ je jeho ľubovoľná báza. Potom aj Gramova matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})$, ako matica bilineárnej formy $\langle\ ,\ \rangle$ zúženej na S vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$, je regulárna. Podľa vety 12.1.2 existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ taká, že $\boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{P}$ je diagonálna matica len s prvkami ± 1 na diagonále. Potom $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P}$ je ortonormálna báza podpriestoru S. Obrátená implikácia je triviálna.

(b) Nech $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ je nejaká ortonormálna báza (regulárneho) podpriestoru S. Doplňme ju (hocakým spôsobom) do bázy $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ priestoru V. Potom aj Gramova matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta})$ je regulárna a jej ľavý horný roh rozmeru $k \times k$ je diagonálny len s ± 1 na diagonále, čiže túto jej časť už upravovať nemusíme. Preto dvojicami ERO a ESO možno celú maticu upraviť na diagonálnu maticu $\boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{Q}$ s ± 1 na diagonále tak, že ani jeden z prvých k riadkov resp. stĺpcov pôvodnej matice $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta})$ nezmení polohu, nebude vynásobený skalárom $\neq 0$, ani k nemu nepripočítame násobok iného riadku či stĺpca. To znamená, že regulárna matica $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodpovedajúca príslušným ESO má blokový tvar $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix}$. Preto bázy $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{Q}$ majú prvých k vektorov rovnakých, teda $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{Q}$ je hľadaná ortonormálna báza priestoru V.

16.1.2. Tvrdenie. *Nech $S \subseteq V$ je regulárny lineárny podpriestor. Potom aj $S^\perp$ je regulárny lineárny podpriestor a platí*

$$V = S \oplus S^\perp, \qquad S^{\perp\perp} = S.$$

Dôkaz. Podľa tvrdenia 16.1.1 má S nejakú ortonormálnu bázu $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$, ktorú možno doplniť do ortonormálnej bázy $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ celého priestoru V. Ľahko nahliadneme, že $S^\perp = [\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n]$. Z toho už priamo vyplýva regularita podpriestoru $S^\perp$ ako aj rovnosti $S \cap S^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$, $S + S^\perp = V$ a $S^{\perp\perp} = S$.

16.1.3. Tvrdenie. *Ak $S \subseteq V$ je maximálny kladne definitný podpriestor, tak $S^{\perp}$ je maximálny záporne definitný podpriestor.*

Samozrejme tiež naopak, ak $S \subseteq V$ je maximálny záporne definitný podpriestor, tak $S^{\perp}$ je maximálny kladne definitný podpriestor.

Dôkaz. Maximalita kladne definitného podpriestoru S znamená, že lineárny podpriestor $S + [\boldsymbol{x}]$ nie je kladne definitný pre žiadny vektor $\boldsymbol{x} \in V \smallsetminus S$. Keďže S je regulárny, podľa predchádzajúceho tvrdenia je regulárny aj $S^{\perp}$. Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$, $\boldsymbol{\alpha}' = (\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ sú ľubovoľné ortonormálne bázy podpriestorov S resp. $S^{\perp}$. Potom $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je zrejme ortonormálna báza celého V. Z kladnej definitnosti S vyplýva, že $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{I}_k$; z jeho maximality a Sylvestrovho zákona zotrvačnosti (veta 12.1.1) zas $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}') = -\boldsymbol{I}_{n-k}$. Preto $S^{\perp}$ je záporne definitný podpriestor, ktorý je v dôsledku vety 12.1.1 zrejme maximálny s touto vlastnosťou.

Podľa ostatných dvoch tvrdení je každý pseudoeuklidovský priestor priamym súčtom $V = S \oplus T$ maximálneho kladne definitného podpriestoru S a maximálneho záporne definitného podpriestoru T; tento rozklad však nie je zďaleka jednoznačný. Pseudoskalárny súčin na podpriestore S je priamo skalárnym súčinom, takže S je vlastne euklidovský priestor. Takisto T možno považovať za euklidovský priestor – stačí formálne zmeniť znamienko pseudoskalárneho súčinu a priradením $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto -\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ je už definovaný skalárny súčin na T. Štruktúra pseudoeuklidovského priestoru vzniká takpovediac prepojením dvoch euklidovských štruktúr opačných znamienok. V dôsledku toho sa môže Cauchyho-Schwartzova nerovnosť niekedy zmeniť na opačnú.

16.1.4. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ sú anizotropné vektory. Potom platí*

(a) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$
práve vtedy, keď $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé alebo $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je dvojrozmerný singulárny podpriestor;

(b) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$
práve vtedy, keď $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne nezávislé a podpriestor $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je kladne alebo záporne definitný;

(c) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 > \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$
práve vtedy, keď $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ je indefinitný podpriestor.

Dodajme, že v prípade, keď niektorý z vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je izotropný, triviálne platí $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 \geq 0 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.

Dôkaz. Keďže $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2$, uvedená rovnosť z (a), resp. nerovnosti z (b), (c) sú postupne ekvivalentné s podmienkami $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = 0$, $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| > 0$, resp. $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| < 0$.

Ak $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé, tak rovnosť $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = 0$ možno jednoducho overiť priamym výpočtom. Ak sú nezávislé, tak $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je maticou pseudoskalárneho súčinu na podpriestore $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ v báze $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Z toho vyplýva:

(a) Podpriestor $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je singulárny práve vtedy, keď matica $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ je singulárna, t. j. práve vtedy, keď $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = 0$.

(b) Podľa Sylvestrovho kritéria (veta 12.2.4) je podpriestor $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ kladne definitný práve vtedy, keď $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0$ a $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| > 0$, a záporne definitný práve vtedy, keď $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle < 0$ a $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| > 0$. Keďže pre anizotropný vektor $\boldsymbol{u}$ iná možnosť nenastane, $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| > 0$ práve vtedy, keď $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je kladne alebo záporne definitný.

(c) Ako vidno z (b), $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je indefinitný práve vtedy, keď $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| < 0$.

16.2. Minkowského časopriestor

Vo fyzike, presnejšie v špeciálnej teórii relativity, sa pod Minkowského časopriestorom zvyčajne rozumie pseudoeuklidovský priestor $\mathbb{R}^4$ so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry $(1,3)$, t. j.

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = \boldsymbol{x}^T \cdot \operatorname{diag}(1, -\boldsymbol{I}_3) \cdot \boldsymbol{y}.$$

pre $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$. V niektorých učebniciach sa miesto toho možno stretnúť so signatúrou $(3,1)$. Pritom súradnica x_0 sa interpretuje ako čas a x_1, x_2, x_3 ako súradnice polohy v euklidovskom priestore. My tento pojem rozšírime na vyššie aj na nižšie dimenzie a na abstraktné pseudoeuklidovské priestory. *Minkowského časopriestorom* budeme teda nazývať ľubovoľný pseudoeuklidovský priestor V signatúry $(1,n)$, kde $n \geq 1$. $\mathbb{R}^{(1,n)}$ označuje Minkowského časopriestor $\mathbb{R}^{n+1}$ so štandardným pseudoskalárnym súčinom signatúry $(1,n)$. V našom výklade budú hrať dôležitú úlohu práve časopriestory „malej“ signatúry $(1,1)$ a $(1,2)$, ktoré ešte pripúšťajú názorné grafické znázornenie.

Na Minkowského časopriestor V budeme v prevažnej miere pozerať afinne, t. j. jeho prvky budeme častejšie považovať za body než za vektory – tentokrát ich však budeme nazývať *udalosťami* alebo tiež *svetobodmi*. Svetobody predstavujú idealizované okamžité bodové udalosti (ako napr. vyžiarenie fotónu atómom, či zrážku dvoch elementárnych častíc), pri ktorých abstrahujeme od toho, „čo sa stalo“, a zaznamenávame len ich čas a polohu.

Ak $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ sú dva svetobody, tak skalárny súčin $\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle$ nazývame štvorcom ich *časopriestorovej odľahlosti*. Podľa toho, či $\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle$ je väčšie, rovné alebo menšie ako 0 (t. j. vektor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ je kladne definitný, izotropný alebo záporne definitný), hovoríme, že udalosti $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ sú *časovo*, *svetelne*, resp. *priestorovo odľahlé*. Miesto kladne definitný, záporne definitný, resp. izotropný vektor hovoríme tiež *časový*, *priestorový*, resp. *svetelný vektor.*[1] Množinu

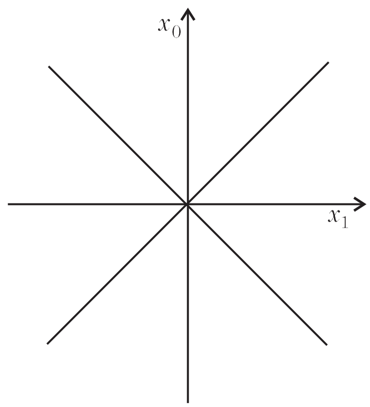
$$\mathrm{LC}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x} \in V;\ \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \rangle = 0\}$$

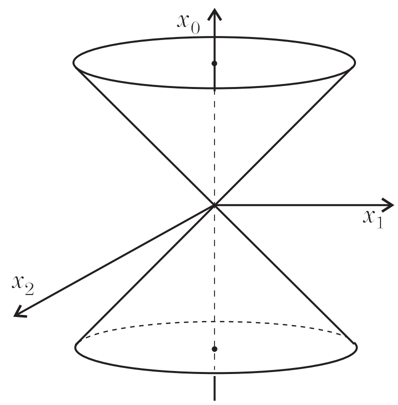
všetkých udalostí, ktoré sú od daného svetobodu $\boldsymbol{p} \in V$ svetelne odľahlé, nazývame *svetelný kužeľ* (anglicky *light cone*) s počiatkom v $\boldsymbol{p}$. Tento názov je motivovaný tvarom svetelného kužeľa v Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,2)}$, ktorý je znázornený na obrázku vpravo; vľavo vidíme svetelný kužeľ v Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,1)}$, tvorený dvoma priamkami $x_0 = \pm x_1$.

V pozadí práve zavedeného názvoslovia stojí fyzikálna interpretácia Minkowského časopriestoru, ktorá bude v priebehu nášho výkladu vychádzať najavo čoraz zreteľnejšie. Zatiaľ si len všimnime, že vyslaniu svetelného signálu v istom okamihu z istého miesta možno priradiť istú udalosť v Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,3)}$, ktorú si bez ujmy na všeobecnosti možno zvoliť za počiatok odpočtu času i súradnej sústavy v priestore. Tento signál sa šíri rovnakou rýchlosťou c všetkými smermi, takže v čase $t > 0$ bude vytvárať sférickú vlnoplochu s polomerom ct a rovnicou

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2.$$

[1] Používajú sa aj možno výstižnejšie, no ťažkopádnejšie názvy *časupodobný*, *priestorupodobný* a *svetlupodobný vektor*.





Po voľbe rýchlosti svetla za jednotku rýchlosti ($c = 1$) a substitúcii $x_0 = ct = t$ vidíme, že všetky svetobody, do ktorých dospeje svetelný signál vyslaný v okamihu 0 z počiatku priestorovej súradnej sústavy, vytvárajú „hornú polovicu“ svetelného kužeľa, niekedy nazývanú tiež *svetelný kužeľ budúcnosti*,

$$\mathrm{LC}^+(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{(1,3)};\ x_0 \geq 0\ \&\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0\}.$$

Jeho „dolná polovica“, nazývaná aj *svetelný kužeľ minulosti*,

$$\mathrm{LC}^-(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{(1,3)};\ x_0 \leq 0\ \&\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0\}.$$

je tvorená svetobodmi, z ktorých svetelný signál dospel do počiatku priestorovej súradnej sústavy v okamihu 0. Hviezdy, ktoré vidíme na jasnej nočnej oblohe, sú rôzne vzdialené, preto svetlo z nich k nám letí rôzne dlho – všetky takéto lúče však ležia na svetelnom kuželi minulosti $\mathrm{LC}^-(\mathbf{0})$. Svetobody, z ktorých bol svetelný signál vyslaný v čase $t < 0$ opäť vytvárajú sférickú vlnoplochu s polomerom $\Leftrightarrow ct$ a rovnakou rovnicou ako v predošlom prípade. Príkladom takejto vlnoplochy je belasá nebeská sféra, ktorej časť vidíme za jasného dňa nad hlavou.

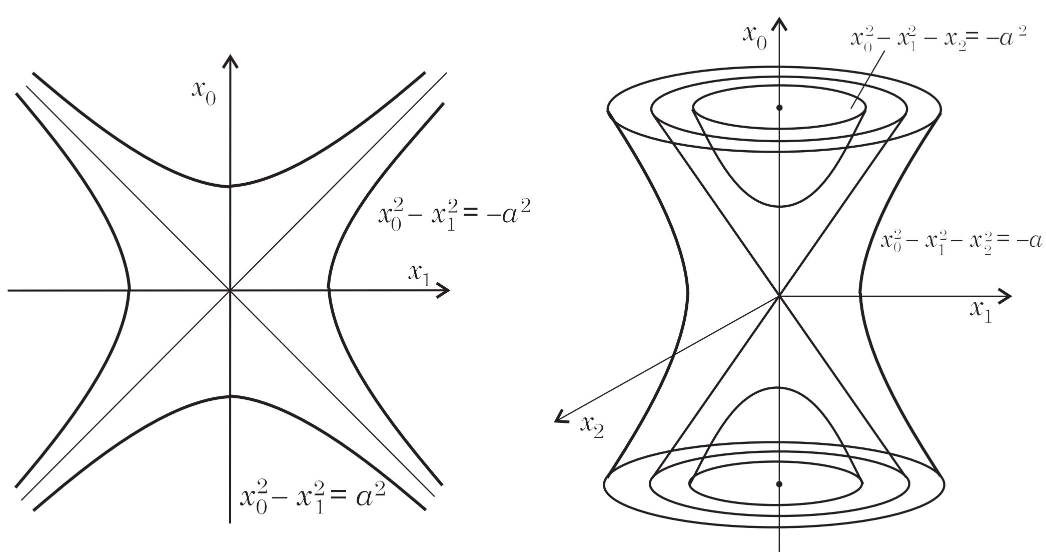
Pri potlačení jednej priestorovej súradnice x_3 možno situáciu názorne ilustrovať v Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,2)}$ (predchádzajúci obrázok vpravo). Miesto trojrozmerného priestoru si predstavme dvojrozmernú vodnú hladinu a miesto vyslania svetelného signálu hoďme kameň do vody. Vznikne vlnenie, ktorého čelo sa šíri po hladine v tvare kružnice a za čas $t > 0$ dospeje do vzdialenosti ct, kde c je rýchlosť jeho šírenia. „Hornú polovicu“ svetelného kužeľa si predstavme ako kruhové čelo vlny „unášané plynúcim časom“ – jeho stav v nejakom okamihu t je daný rezom kužeľa rovinou $x_0 = ct$.

Tento príklad navodzuje predstavu Minkovského časopriestoru signatúry $(1, n)$ ako n-rozmerného euklidovského priestoru „unášaného časom“ pozdĺž časovej osi. I keď táto predstava býva často užitočná, uvidíme, že v Minkowského časopriestore neexistuje privilegovaná časová os ani kanonický, jednoznačný rozklad na časovú a priestorovú zložku, ako by sa nám mohlo zdať pri zbežnom pohľade na Minkowského časopriestor $\mathbb{R}^{(1,n)}$. Skutočnosť, že „časom unášaný fyzikálny priestor“ je euklidovský, čiže „plochý“, poukazuje na to, že špeciálna relativita skúma vlastne prázdny časopriestor, presnejšie, abstrahuje od gravitačného pôsosobenia v ňom rozloženej hmoty.

Tieto otázky tematizuje až *všeobecná teória relativity*, ktorá gravitačné pôsobenie zachytáva opäť geometricky – ako spojite sa meniace zakrivenie časopriestoru.

Pre časový vektor $\boldsymbol{u} \in V$ možno definovať normu alebo dĺžku $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$ rovnako ako v euklidovskom prípade. Pre priestorový vektor $\boldsymbol{v} \in V$ však kladieme $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\Leftrightarrow\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$.

V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^2$ vytvárajú vektory rovnakej dĺžky $r > 0$ (presnejšie ich konce) kružnicu s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 = r^2$; v $\mathbb{R}^3$ je to sféra s rovnicou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$. Na rozdiel od toho v Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,1)}$ vytvárajú časové vektory dĺžky $r > 0$ rovnoosú hyperbolu s rovnicou $x_0^2 \Leftrightarrow x_1^2 = r^2$; priestorové vektory dĺžky r zasa vytvárajú rovnoosú hyperbolu s rovnicou $x_0^2 \Leftrightarrow x_1^2 = \Leftrightarrow r^2$ (ďalší obrázok vľavo). V Minkowského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,2)}$ vytvoria takéto časové vektory dvojdielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_0^2 \Leftrightarrow x_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 = r^2$, ktorý leží „vovnútri" svetelného kužeľa; zodpovedajúce priestorové vektory tvoria jednodielny rotačný hyperboloid s rovnicou $x_0^2 \Leftrightarrow x_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 = \Leftrightarrow r^2$, ktorý obaľuje svetelný kužeľ „zvonka" (obrázok vpravo). Do vyšších dimenzií, vrátane „nášho" časopriestoru $\mathbb{R}^{(1,3)}$, bohužiaľ, už naša predstavivosť nesiaha.

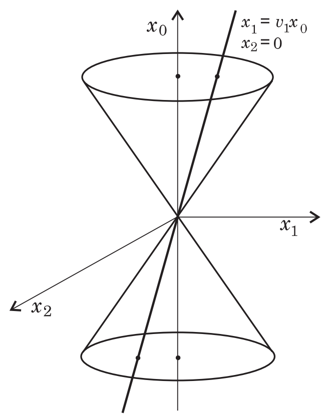


Varujeme však čitateľa, aby podobným obrázkom neprikladal väčšiu váhu, než im náleží – Minkowského časopriestory $\mathbb{R}^{(1,1)}$ a $\mathbb{R}^{(1,2)}$ sú na nich totiž zobrazené skreslene prostredníctvom euklidovskej geometrie. To vidno napr. už z toho, že časové vektory rovnakej dĺžky sú zobrazené ako vektory nerovnakej euklidovskej dĺžky. Len na okraj poznamenajme, že napr. na jednom diele hyperboloidu $x_0^2 \Leftrightarrow x_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 = r^2$ v $\mathbb{R}^{(1,2)}$ sa realizuje dvojrozmerná *Bolyaiho-Lobačevského geometria*, zo zrejmých dôvodov nazývaná tiež *hyperbolickou*, ktorá je historicky prvým známym príkladom neeuklidovskej geometrie. Štúdium podobných, nesporne zaujímavých otázok však už nie je predmetom tohto kurzu.

16.3. Inerciálny pozorovateľ a jeho vzťažná sústava

Inerciálneho pozorovateľa v Minkovského časopriestore V si predstavujeme ako rovnomerne priamočiaro sa pohybujúceho, čertovsky malého (presnejšie bodového) trpaslíka, vybaveného hodinkami a metrom. Matematicky však nebudeme zavádzať nijakých inerciálnych trpaslíkov – úplne vystačíme s dráhami, ktoré opisujú vo V.

Na začiatok si uvedomme, akú dráhu opisuje v $\mathbb{R}^{(1,n)}$ nehybný bod. Keďže čas neustále plynie, i nehybný bod sa v $\mathbb{R}^{(1,n)}$ „pohybuje“ – a to po „zvislej“ priamke s rovnicami $x_1 = p_1, \ldots, x_n = p_n$, kde $(p_1, \ldots, p_n)^T$ sú jeho priestorové súradnice v niektorom okamihu p_0. Jej smerový vektor je $\boldsymbol{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. A akú dráhu v $\mathbb{R}^{(1,n)}$ opisuje bod pohybujúci sa rovnomerne priamočiaro rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ so zložkami $v_1, \ldots, v_n$ v smere jednotlivých osí $x_1, \ldots, x_n$? Zrejme je to priamka s parametrickými rovnicami $x_0 = t$, $x_1 = p_1 + v_1 t, \ldots, x_n = p_n + v_n t$, kde $(p_1, \ldots, p_n)^T$ sú jeho priestorové súradnice v okamihu $t = 0$. Jej smerový vektor má tvar $(1, v_1, \ldots, v_n)^T$. To si najlepšie znázorníme v $\mathbb{R}^{(1,2)}$, keď si zvolíme os x_1 v smere vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$, teda $\boldsymbol{v} = (v_1, 0)^T$. Situácia pre $p_1 = p_2 = 0$ je znázornená na obrázku. Keďže rýchlosť pohybu hmotného bodu je menšia než rýchlosť svetla, t. j. $|v_1| < 1$, naša priamka leží „vovnútri“ svetelného kužeľa. Vo všeobecnom prípade máme $v_1^2 + \ldots + v_n^2 < 1$, čiže $(1, v_1, \ldots, v_n)^T$ je časový vektor.



Teraz si uvedomme, že naše otázky boli chybne položené. Hovoriť o nehybnom alebo pohybujúcom sa pozorovateľovi ako takom nedáva rozumný fyzikálny zmysel. Neexistuje absolútny kľud ani absolútny pohyb, ale kľud i pohyb sú relatívne. Nejaký fyzikálny objekt môže byť v kľude alebo v pohybe len vzhľadom na nejaký iný objekt. Aspoň tak nás to učí klasická mechanika od čias Galileových. Aj tak však z našich chybne položených otázok možno vyťažiť netriviálny poznatok: *inerciálni pozorovatelia sa v Minkowského časopriestore pohybujú po priamkach s časovými smerovými vektormi.*

Svetočiarou inerciálneho pozorovateľa, alebo len *inerciálnou svetočiarou* nazývame ľubovoľnú *orientovanú* priamku (t. j. jednorozmerný afinný podpriestor) vo V tvaru $\boldsymbol{p} + [\boldsymbol{a}]$, kde $\boldsymbol{p} \in V$ je svetobod a $\boldsymbol{a} \in V$ je časový vektor, čiže $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle > 0$, spolu s orientáciou zadanou vektorom $\boldsymbol{a}$. Túto svetočiaru budeme značiť $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ (z anglického *world line*). Jej orientovanosť znamená, že opačne orientovanú svetočiaru $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{a})$ považujeme za rôznu od $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, hoci ako množiny bodov predstavujú tú istú priamku.

Tu treba upozorniť na ďalšie skreslenie, idúce na vrub zobrazenia v euklidovskej geometrii. Svetočiara $\mathrm{WL}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}_0)$ v $\mathbb{R}^{(1,2)}$ je zobrazená ako os svetelného kužeľa $\mathrm{LC}(\boldsymbol{0})$, kým svetočiara $\mathrm{WL}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a})$ s iným časovým vektorom $\boldsymbol{a}$ vedie akoby bližšie popri jeho okraji. Z postulátu stálosti rýchlosti svetla však vyplýva, že svetočiary všetkých inerciálnych pozorovateľov „majú rovnako ďaleko k okraju svetelného kužeľa“.

Svetočiara $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ inerciálneho pozorovateľa predstavuje jeho „vlastný tok času“ (a nie jeho pohyb – ten je možný len vzhľadom na iného inerciálneho pozorovateľa).

Orientácia svetočiary zodpovedá orientácii času z minulosti do budúcnosti – prostriedkami špeciálnej teórie relativity ju však nemožno odlíšiť od orientácie z budúcnosti do minulosti, presnejšie, rozhodnúť, ktorá z nich je „tá pravá“. Možno však rozhodnúť, či sú dve inerciálne svetočiary orientované súhlasne alebo nesúhlasne, t. j. či ich vlastné časy plynú tým istým alebo opačným smerom.

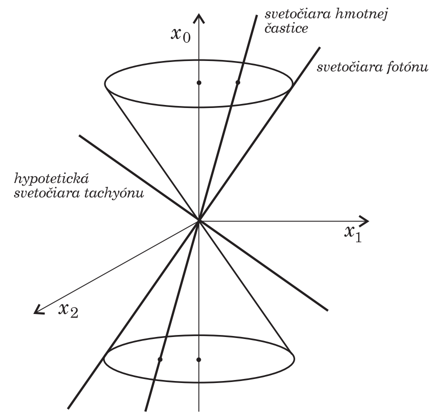
Časové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sa nazývajú *súhlasne orientované*, ak $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle > 0$; ak $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle < 0$, hovoríme, že $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú *nesúhlasne orientované*. (Samostatne si dokážte, že prípad $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ nemôže nastať.) Inerciálne svetočiary $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, $\mathrm{WL}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b})$ sú potom súhlasne resp. nesúhlasne orientované práve vtedy, keď sú súhlasne resp. nesúhlasne orientované ich časové vektory. Keďže $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle > 0$ a vektory $\boldsymbol{x}$, pre ktoré $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$, tvoria nadrovinu $[\boldsymbol{a}]^\perp$ oddeľujúcu obe „polovice“ svetelného kužeľa $\mathrm{LC}(\mathbf{0})$, súhlasná orientácia časových vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ znamená, že ležia „vovnútri tej istej polovice“ svetelného kužeľa $\mathrm{LC}(\mathbf{0})$; nesúhlasne orientované časové vektory potom ležia „vovnútri opačných polovíc“ $\mathrm{LC}(\mathbf{0})$.

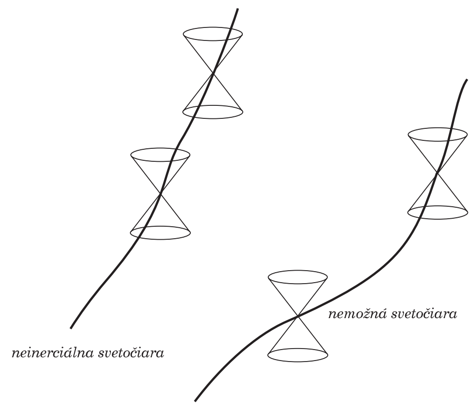
Formálne možno svetočiary $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ zaviesť rovnako pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ vo V. Obmedzenie sa na časové smerové vektory je dôsledkom postulátu, podľa ktorého sa všetky hmotné objekty pohybujú rýchlosťou menšou než rýchlosť svetla. Svetočiary tvaru $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, kde $\boldsymbol{a}$ je svetelný vektor, t. j. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$, predstavujú pohyb svetelnou rýchlosťou – takto sa však môžu pohybovať len nehmotné častice (presnejšie, častice s nulovou kľudovou hmotnosťou), napr. fotóny. Svetočiary tvaru $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, kde $\boldsymbol{a}$ je priestorový vektor, t. j. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle < 0$, by zodpovedali pohybu nadsvetelnou rýchlosťou, teda – aspoň v rámci špeciálnej teórie relativity – nemajú fyzikálny význam. Hoci o časticiach pohybujúcich sa nadsvetelnými rýchlosťami, tzv. *tachyónoch*, sa v teoretickej fyzike stále špekuluje, všetky doterajšie pokusy objaviť ich skončili neúspešne.

Pohyb má podľa našich fyzikálnych predstáv vždy relatívny charakter. V abstraktnom Minkowského časopriestore, kde nemáme privilegovanú časovú os, sú všetky inerciálne svetočiary rovnocenné. Pokiaľ teda budeme hovoriť o pohybe inerciálneho pozorovateľa, vždy pôjde o jeho pohyb vzhľadom na iného inerciálneho pozorovateľa. Na druhej strane, niektoré *vlastnosti* pohybu sú absolútne. V Minkowského časopriestore V je to napr. vlastnosť „pohybovať sa rovnomerne priamočiaro“ (t. j. opisovať inerciálnu svetočiaru vo V), a v dôsledku toho tiež vlastnosť „pohybovať sa premennou rýchlosťou“. Svetočiara hmotného bodu v Minkowského časopriestore V pohybujúceho sa premennou rýchlosťou totiž nie je inerciálna. Zmena rýchlosti sa prejaví zakrivením príslušnej svetočiary. Nakoľko však okamžitá rýchlosť pohybu hmotného bodu je vždy menšia než rýchlosť svetla, dotykový vektor k takejto svetočiare v každom jej svetobode $\boldsymbol{p}$ je časový, t. j. leží „vovnútri“ svetelného kužeľa $\mathrm{LC}(\boldsymbol{p})$.

Okamžitým fyzikálnym priestorom inerciálneho pozorovateľa nachádzajúceho sa v svetobode $\boldsymbol{q}$ svojej svetočiary $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ nazývame *afinný* podpriestor $\boldsymbol{q} + [\boldsymbol{a}]^\perp$ Minkowského časopriestoru V; každý z týchto afinných podpriestorov potom nazývame *okamžitým fyzikálnym priestorom svetočiary* $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$.

Keďže $[\boldsymbol{a}]$ je zrejme maximálny kladne definitný lineárny podpriestor vo V, jeho ortokomplement $[\boldsymbol{a}]^\perp$ je podľa tvrdenia 16.1.3 záporne definitný a podľa 16.1.2 platí $V = [\boldsymbol{a}] \oplus [\boldsymbol{a}]^\perp$. Na $[\boldsymbol{a}]^\perp$ sa budeme dívať ako na euklidovský priestor vybavený skalárnym súčinom $\Leftrightarrow\!\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ a normou $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\Leftrightarrow\!\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$. Uvedomme, že okamžité fyzikálne priestory $\boldsymbol{p} + [\boldsymbol{a}]^\perp$ nášho inerciálneho pozorovateľa sú vlastne tvorené tým istým euklidovským priestorom $[\boldsymbol{a}]^\perp$ „unášaným tokom jeho času“ pozdĺž jeho svetočiary a dohromady vytvárajú celý Minkowského časopriestor $V = \boldsymbol{p} + [\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}]^\perp$. Všetky udalosti v okamžitom fyzikálnom priestore $\boldsymbol{p} + [\boldsymbol{a}]^\perp$ sa z hľadiska príslušného inerciálneho pozorovateľa odohrávajú súčasne. On sám však nemá ako odlíšiť svoj stav od kľudu, teda preňho je jeho okamžitý fyzikálny priestor stále ten istý a splýva so zameraním $[\boldsymbol{a}]^\perp$ jeho okamžitého fyzikálneho priestoru. Preto $[\boldsymbol{a}]^\perp$ predstavuje *subjektívny fyzikálny priestor* inerciálneho pozorovateľa so svetočiarou $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$. Pre inerciálneho pozorovateľa s iným časovým vektorom $\boldsymbol{b} \notin [\boldsymbol{a}]$ však platí $[\boldsymbol{a}]^\perp \neq [\boldsymbol{b}]^\perp$, čiže udalosti súčasné pre jedného z nich sa tak nemusia javiť druhému.





Pre $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ v $\mathbb{R}^{(1,1)}$ je $[\boldsymbol{a}]^\perp$ priamka súmerne združená s priamkou $[\boldsymbol{a}]$ podľa osi $x_0 = x_1$ (alebo, čo je to isté, podľa osi $x_0 = -x_1$). Teda okrem prípadu, keď $\boldsymbol{a}$ leží v smere niektorej z osí x_0, x_1, priamky $[\boldsymbol{a}]$, $[\boldsymbol{a}]^\perp$ nie sú na seba euklidovsky kolmé. (Nakreslite si obrázok!) Ďalej si rozmyslite, ako je rovina $[\boldsymbol{a}]^\perp$ „súmerne združená" s priamkou $[\boldsymbol{a}]$ podľa svetelného kužeľa v $\mathbb{R}^{(1,2)}$.

K danej svetočiare $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ inerciálneho pozorovateľa v Minkowského časopriestore V existuje jednoznačne určený vektor $\boldsymbol{a}_0 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle^{-1/2} \boldsymbol{a}$ taký, že $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = \mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_0)$ a $\langle \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0 \rangle = 1$, ktorý nazývame jej *časovým šípom* alebo *šípom času* (vo fyzike sa v Minkovského časopriestore $\mathbb{R}^{(1,3)}$ používa tiež názov *štvorrýchlosť*). To znamená, že parameter t vo vyjadrení svetobodov $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a}_0$ svetočiary $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_0)$ možno skutočne interpretovať ako vlastný čas príslušného inerciálneho pozorovateľa, počítaný od udalosti $\boldsymbol{p}$. Nech ďalej $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ je nejaká ortonormálna báza podpriestoru $[\boldsymbol{a}_0]^\perp$. Potom $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ je zrejme ortonormálna báza pseudoeuklidovského priestoru V s Gramovou maticou $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{diag}(1, -\boldsymbol{I}_n)$, nazývanou tiež *Minkowského symbol* alebo *Minkowského metrický tenzor*. Takúto bázu nazývame *inerciálnou bázou* svetočiary $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ a k nej prislúchajúcu sústavu súradníc nazývame *inerciálnou súradnou sústavou*. Pre vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ so súradnicami $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$, $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T$ potom platí

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n,$$

čiže pseudoskalárny súčin vo V nadobúda tvar štandardného pseudoskalárneho súčinu v $\mathbb{R}^{(1,n)}$. Ešte si všimnite, že – na rozdiel od časového šípu $\boldsymbol{a}_0$ – priestorové vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ uvedenej bázy nie sú určené jednoznačne, teda vo všeobecnosti existuje mnoho rôznych inerciálnych báz spojených s daným inerciálnym pozorovateľom.

Fyzikálne si pod šípom času $\boldsymbol{a}_0$ inerciálnej bázy $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ treba predstavovať hodinky, ktorými náš trpaslík meria čas, a pod priestorovými vektormi $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

sústavu n navzájom kolmých kovových tyčí jednotkovej dĺžky pevne zvarených v jednom spoločnom koncovom bode, ktoré slúžia na fixovanie jednotlivých súradných osí a meranie vzdialeností v ich smeroch (v „našom“ časopriestore, samozrejme, $n = 3$).

Nasledujúce zrejmé tvrdenie dodatočne oprávňuje spôsob, akým sme definovali okamžité fyzikálne priestory a subjektívny priestor inerciálneho pozorovateľa.

16.3.1. Tvrdenie. *Nech* $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ *je svetočiara inerciálneho pozorovateľa s časovým šípom* $\boldsymbol{a}_0$ *a* $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ *je jej ľubovoľná inerciálna báza. Pre ľubovoľné udalosti* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *so súradnicami* $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$, $(\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ *nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $x_0 = y_0$, *t. j.* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *sú súčasné udalosti vzhľadom na na vzťažnú sústavu* $\boldsymbol{\alpha}$*;*

(ii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *patria do toho istého okamžitého fyzikálneho priestoru svetočiary* $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$*;*

(iii) $\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{a}]^{\perp}$, *čiže* $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

16.4. Paradox dvojčiat

Náš výklad začneme malým doplnkom k obrátenej Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti z tvrdenia 16.1.4.

16.4.1. Tvrdenie. *Nech* V *je Minkovského časopriestor a aspoň jeden z vektorov* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *je časový. Potom*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 \geq \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sú lineárne závislé.*

Dôkaz. Nech napr. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ je časový vektor. Potom $[\boldsymbol{u}]$ je maximálny kladne definitný lineárny podpriestor vo V, teda $[\boldsymbol{u}]^{\perp}$ je záporne definitný podpriestor podľa tvrdenia 16.1.3 a $V = [\boldsymbol{u}] \oplus [\boldsymbol{u}]^{\perp}$ podľa tvrdenia 16.1.2. Preto $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u} + \boldsymbol{z}$ pre jednoznačne určený skalár a a vektor $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{u}]^{\perp}$. Z úvah o ortogonalizácii, prípadne priamym výpočtom dostaneme

$$|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})| = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

Z toho vyplýva, že podpriestor $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}]$ je singulárny práve vtedy, keď $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, t. j. práve vtedy, keď $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne závislé. Preto ak $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú lineárne nezávislé, tak podpriestor $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je indefinitný, a požadovaný záver vyplýva z tvrdenia 16.1.4 (c).

Dôsledkom práve dokázaného tvrdenia je nasledujúca „obrátená trojuholníková nerovnosť“.

16.4.2. Dôsledok. *Nech* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sú súhlasne orientované časové vektory v Minkovského časopriestore* V*. Potom aj* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ *je časový vektor a platí*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \geq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sú lineárne závislé.*

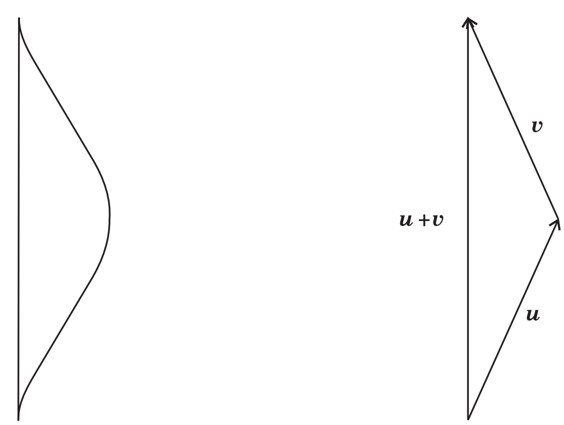
Dôkaz. Keďže $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$, priamym výpočtom dostávame

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\ &\geq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \big(\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|\big)^2, \end{aligned}$$

pričom rovnosť zrejme nastane práve vtedy, keď $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$.

Predstavme si teraz dvoch pozorovateľov-dvojčatá. Nazvime ich trebárs Kýblik a Spachtoš. Jeden z nich, dajme tomu Spachtoš, je inerciálny a celý čas nášho rozprávania prespí doma. Druhý z nich, Kýblik, sa vyberie na vesmírny výlet raketou. Nejaký čas sa vzďaľuje rovnomerne zrýchleným pohybom, po dosiahnutí istej dosť veľkej rýchlosti sa dlho pohybuje rovnomerne priamočiaro, potom začne brzdiť a po dosiahnutí nulovej rýchlosti obráti svoju vesmírnu loď a začne sa vracať domov na Zem – najprv rovnomerne zrýchleným pohybom naberie istú veľkú rýchlosť, ktorou potom dlho letí rovnomerne priamočiaro, a keď sa priblíži k Zemi, začne brzdiť, až napokon pristane doma na priedomí, kde ho už čaká Spachtoš, ktorý sa práve zobudil a vyšiel von nadýchať sa čerstvého vzduchu. Ukážeme si, že Kýblik je po návrate mladší než Spachtoš, čiže z jeho hľadiska uplynul kratší čas než z hľadiska jeho spiaceho brata.

Príslušné úseky svetočiar oboch bratov sú znázornené na obrázku vľavo. Kým Spachtošov úsek je časťou inerciálnej svetočiary, Kýblikov úsek je neinerciálny – parabolicky zakrivené úseky zodpovedajú zrýchľovaniu resp. brzdeniu rakety, priame letu stálou rýchlosťou. Ak zrýchľovanie a brzdenie trvá v porovnaní s rovnomerným priamočiarym letom zanedbateľne krátko, príslušný úsek Kýblikovej svetočiary možno pre naše účely dostatočne presne aproximovať (fyzikálne neuskutočniteľnou) lomenou svetočiarou na obrázku vpravo. Jej úseky zodpovedajú vektorom $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Spachtošov úsek potom zodpovedá vektoru $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. Zo Spachtošovho pohľadu uplynie čas $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$, kým z Kýblikovho $\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$. Keďže, ako (u)vidíme, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú súhlasne orientované časové vektory, podľa práve dokázaného dôsledku platí $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \geq \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$.



Celú situáciu možno popísať v $\mathbb{R}^{(1,1)}$. Ak si označíme v veľkosť rýchlosti Kýblikovej rakety v rovnomerných priamočiarych úsekoch, a t čas Spachtošovho spánku, máme $\boldsymbol{u}=(t/2, vt/2)$, $\boldsymbol{v}=(t/2, -vt/2)$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(t,0)$ a $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = t^2(1+v^2)/4>0$, čiže $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú súhlasne orientované. Jednoduchým výpočtom možno dostať presnejší odhad

$$\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\| = t\sqrt{1-v^2} < t = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|.$$

Pomer vlastných časov oboch bratov teda závisí na rýchlosti v.

Názvom *paradox dvojčiat* sa zvykne označovať zdanlivý rozpor, ktorý vzniká, ak sa na uvedenú situáciu pokúšame neuvážene aplikovať relativistický princíp ekvivalencie ľubovoľných inerciálnych sústav. Ak totiž zabudneme, že Kýblikova svetočiara je neinerciálna, a začneme celú situáciu posudzovať z jeho hľadiska, vyjde nám, že by nakoniec mal byť mladší vzhľadom na Kýblika sa pohybovavší Spachtoš. K tejto otázke sa ešte vrátime v paragrafe 16.6, venovanom dilatácii času.

16.5. Relatívna rýchlosť dvoch inerciálnych pozorovateľov

Uvažujme dvoch inerciálnych pozorovateľov so svetočiarami $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})$, $\mathrm{WL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$ v Minkowského časopriestore V a kvôli jednoduchosti predpokladajme, že vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú ich šípy času, t. j. $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle = 1$.

Svetočiara $\mathrm{WL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$ druhého inerciálneho pozorovateľa pretína okamžitý fyzikálny priestor $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}]^{\perp}$ prvého pozorovateľa vo svetobode $\boldsymbol{q} + t'\boldsymbol{b}$, kde t' nájdeme z podmienky $(\boldsymbol{q} + t'\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a}) \in [\boldsymbol{a}]^{\perp}$, čiže

$$0 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} + t'\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \Leftrightarrow t\boldsymbol{a}\rangle = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle t' + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}\rangle \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle t = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle t' + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}\rangle \Leftrightarrow t.$$

Z toho vyplýva

$$t' = \frac{t \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}.$$

Z pohľadu prvého inerciálneho pozorovateľa, t. j. v jeho subjektívnom fyzikálnom priestore $[\boldsymbol{a}]^{\perp}$, tomuto okamihu zodpovedá poloha

$$(\boldsymbol{q} + t'\boldsymbol{b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}\boldsymbol{b} + \frac{t}{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow t\boldsymbol{a}$$

druhého inerciálneho pozorovateľa.

Nejakému časovému intervalu $\Delta t = t_2 \Leftrightarrow t_1$ prvého inerciálneho pozorovateľa tak zodpovedá časový interval

$$\Delta t' = t_2' \Leftrightarrow t_1' = \frac{t_2 \Leftrightarrow t_1}{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle} = \frac{\Delta t}{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}$$

druhého z nich. Za ten čas sa poloha druhého pozorovateľa v subjektívnom fyzikálnom priestore $[\boldsymbol{a}]^{\perp}$ prvého zmení o priestorový vektor $\Delta t\big(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^{-1}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\big) \in [\boldsymbol{a}]^{\perp}$. Priestorový vektor

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^{-1}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in [\boldsymbol{a}]^{\perp}$$

potom samozrejme predstavuje rýchlosť, akou sa druhý inerciálny pozorovateľ pohybuje v subjektívnom fyzikálnom priestore prvého. Keďže $\boldsymbol{v}$ nezávisí od času t, pohyb druhého inerciálneho pozorovateľa sa prvému skutočne javí ako rovnomerný priamočiary. Pre veľkosť tejto rýchlosti platí

$$v = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} = \sqrt{\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^{-2}\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle + 2 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle} = \sqrt{1 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^{-2}}.$$

Teda veľkosť v rýchlosti, ktorou sa z pohľadu prvého inerciálneho pozorovateľa pohybuje druhý z nich možno vyjadriť pomocou pseudoskalárneho súčinu $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ ich časových šípov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Taktiež naopak, pseudoskalárny súčin $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ možno až na znamienko vyjadriť pomocou veľkosti relatívnej rýchlosti v:

$$|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| = \frac{1}{\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}},$$

v čom čitateľ asi spozná známy Lorentzov koeficient, hoci vo fyzike ho častejšie zapisujeme v tvare $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, kde c je rýchlosť svetla. Zrejme princíp medznej hodnoty rýchlosti svetla je ekvivalentný s požiadavkou reálnosti a konečnosti tohto výrazu. Ak navyše prijmeme prirodzený predpoklad, že $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sú súhlasne orientované, dostaneme

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ešte podotknime, že ak by sme si na začiatku nezjednodušili život podmienkou $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = 1$, čiže za $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ by sme si vzali ľubovoľné súhlasne orientované časové vektory, poslednú rovnosť by sme dostali v tvare

$$\frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

čo na základe analógie s euklidovskými priestormi navodzuje myšlienku, že Lorentzov koeficient predstavuje „kosínus“ akéhosi „pseudouhla“ vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Keďže je však uvedený výraz vždy ≥ 1, o obyčajný kosínus uhla ísť nemôže. Zvyšok paragrafu je venovaný upresneniu týchto úvah.

Z *Eulerových vzťahov*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha,$$

ktoré tu nebudeme odvodzovať, vyplývajú nasledujúce vyjadrenia goniometrických funkcií pomocou exponenciály imaginárneho argumentu

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}$$

pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkcie *hyperbolický kosínus* a *hyperbolický sínus* sú definované reálnou analógiou uvedených rovností

$$\cosh\theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}{2}, \qquad \sinh\theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{2}$$

pre ľubovoľné $\theta \in \mathbb{R}$.

Všetko, čo potrebujeme v tejto chvíli vedieť, je jednotkový vzťah

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

(overte si samostatne jednoduchým výpočtom), z ktorého vyplýva, že všetky dvojice $(\cosh\theta, \sinh\theta)$ ležia na jednej vetve rovnoosej hyperboly $x^2 - y^2 = 1$, $(x \geq 1)$, a že každý bod (x, y) tejto vetvy má uvedený tvar. Naozaj, stačí položiť $\theta = \ln(x + y)$. Druhá vetva $(x \leq -1)$ tejto hyperboly je tvorená dvojicami $(-\cosh\theta, \sinh\theta)$, pre $\theta \in \mathbb{R}$.

Pre súhlasne orientované časové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ potom existuje jednoznačne určené reálne číslo θ, nazývané tiež *hyperbolický uhol* vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, také, že

$$\cosh\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \sinh\theta = \frac{\sqrt{-|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Explicitné vyjadrenie pre θ je

$$\theta = \ln\frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \sqrt{-|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \ln\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

16.6. Relativistická dilatácia času

Ako sme odvodili v predošlom paragrafe, pre časový úsek $\Delta t'$ druhého inerciálneho pozorovateľa, ktorý zodpovedá časovému úseku Δt s ním súhlasne orientovaného prvého pozorovateľa, platí

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} = \Delta t \sqrt{1 \Leftrightarrow v^2},$$

teda $\Delta t' \leq \Delta t$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 0$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 1$, a na základe tvrdenia 16.4.1 s lineárnou závislosťou časových šípov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, čo v tomto prípade znamená $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Z hľadiska prvého pozorovateľa, ktorý sám seba považuje za nehybného, tak medzi dvoma okamihmi t_1 a t_2 uplynie dlhší čas, než z hľadiska druhého pozorovateľa medzi okamihmi t'_1, t'_2, v ktorých sa tento pozorovateľ nachádza v okamžitých fyzikálnych priestoroch $\boldsymbol{p} + t_1 \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}]^\perp$, resp. $\boldsymbol{p} + t_2 \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}]^\perp$ prvého. Tento efekt sa nazýva *relativistické spomalenie*, prípadne *relativistická dilatácia času*.

V uvedenej rovnosti sa však skrýva zdanlivý paradox, niekedy nazývaný *paradox času*. Z matematických dôvodov symetrie ako aj z fyzikálnych dôvodov rovnocennosti inerciálnych sústav by malo takisto platiť

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} = \Delta t' \sqrt{1 \Leftrightarrow v^2},$$

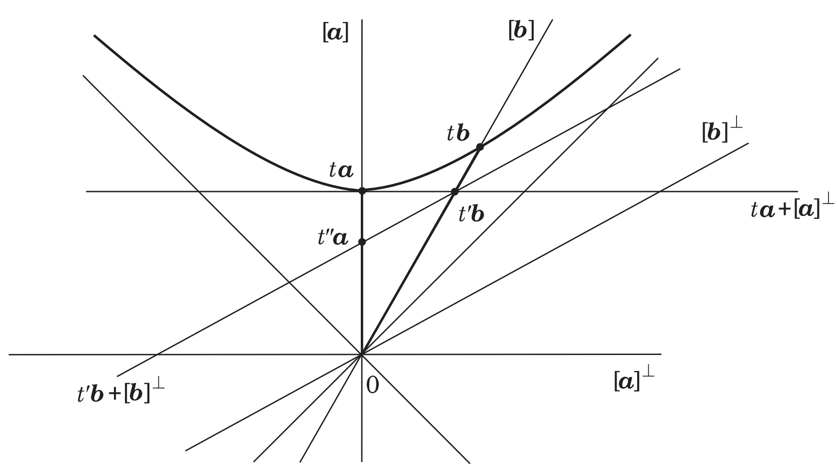
teda $\Delta t \leq \Delta t'$. Potom nevyhnutne $\Delta t = \Delta t'$, $v = 0$ a $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 1$, t. j. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ pre ľubovoľné súhlasne orientované časové šípy $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, čo je zrejmý nezmysel. Teda niekde v našich úvahách je asi chyba. Odhaliť ju nie je až také ťažké. Časový okamih prvého inerciálneho pozorovateľa, zodpovedajúci časovému okamihu t' druhého inerciálneho pozorovateľa z pohľadu druhého pozorovateľa, nie je pôvodný okamih t, ale okamih

$$t'' = \frac{t' \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \rangle}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} = \frac{t \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \rangle}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2}.$$

Teda časovému intervalu $\Delta t' = t'_2 \Leftrightarrow t'_1$ druhého inerciálneho pozorovateľa zodpovedá z jeho pohľadu časový interval

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t'}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} = \frac{\Delta t}{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2},$$

a nie Δt, prvého pozorovateľa. Situácia pre špeciálny prípad $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $t_1 = 0$, $t_2 = t = \Delta t$ je znázornená na obrázku v $\mathbb{R}^{(1,1)}$.



Na obrázku nám asi udrie do očú, že dĺžka vektora $t'\boldsymbol{b}$ je *väčšia* ako dĺžka vektora $t\boldsymbol{a}$, aj keď $\|t'\boldsymbol{b}\| = t' = t\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2} < t = \|t\boldsymbol{a}\|$. Nezaškodí preto znova pripomenúť, že vzdialenosti, ktoré nám vnucuje obrázok, sú euklidovské, netreba ich preto brať vážne – geometria Minkowského časopriestoru je totiž neeuklidovská. Z hľadiska tejto geometrie sú rovnako dlhé napr. vektory $t\boldsymbol{a}$ a $t\boldsymbol{b}$ (ich „konce“ ležia na tej istej hyperbole).

Experimentálny dôkaz dilatácie času poskytujú *μ-mezóny*, zvané tiež *mióny* (niečo ako „ťažké elektróny“) – elementárne častice s veľmi krátkou priemernou dobou života (asi $2,2 \cdot 10^{-6}$s). Mióny vznikajú vplyvom primárneho kozmického žiarenia v horných vrstvách atmosféry (t. j. vo výškach 10 a viac km) a prilietajú veľkými rýchlosťami (až $0,998$ rýchlosti svetla) na zemský povrch. Za čas $2,2 \cdot 10^{-6}$s by však ani rýchlosťou svetla $c \approx 300\,000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ nemali preletieť viac než 660 m. Z hľadiska pozemského pozorovateľa však času $\Delta t'$ v sústave letiaceho miónu zodpovedá čas $\Delta t = \Delta t'/\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}$, kde v je jeho rýchlosť v pomere k rýchlosti svetla. Namerané hodnoty priemernej doby života miónov pri rôznych rýchlostiach (či už v kozmických lúčoch alebo v pozemských urýchľovačoch) sa so značnou presnosťou zhodujú s uvedeným vzťahom. Napríklad vlastnému času $2,2 \cdot 10^{-6}$s v sústave miónu letiaceho rýchlosťou $0,998\,c$, zodpovedá v sústave pozemského pozorovateľa čas asi $34,8 \cdot 10^{-6}$s, za ktorý mión preletí dráhu približne $10,4$ km.

Všimnite si, že vo formule pre dilatáciu času vystupuje rovnaký koeficient $\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}$ ako v *približnom* kvantitatívnom odhade z paradoxu dvojčiat. Navyše dilatácia času je – popri neinerciálnosti Kýblikovej svetočiary – naozaj spoluzodpovedná za jeho „pomalšie starnutie“. To sú dôvody, pre ktoré sa oba tieto efekty často pletú. Ešte stále sa možno z času na čas stretnúť s naivnou kritikou špeciálnej teórie relativity, ktorá si berie na mušku práve paradox dvojčiat a používa pri tom už spomínaný argument, akým možno zdanlivo spochybniť dilatáciu času: „Keďže pohyb je relatívny, môžeme rovnako dobre z Kýblikovho hľadiska považovať Spachtoša za pohybujúceho sa a Kýblika za nehybného. Potom by mal viac zostarnúť Kýblik.“ Podobná symetria tu však nemá miesto. Aby sa mohli Kýblik a Spachtoš, opisujúci najprv tú istú svetočiaru, rozdeliť a potom opäť stretnúť, musí sa (aspoň) jeden z nich v istých úsekoch svojej svetočiary „zneinerciálniť“, t. j. pohybovať sa so zrýchlením. Rozdiel medzi inerciálnou Spachtošovou a neinerciálnou Kýblikovou svetočiarou má tak – v protiklade k našim inerciálnym pozorovateľom z tohto paragrafu – absolútny charakter a rozdiel veku sa pri stretnutí oboch bratov prejaví „hmatateľne“.

Tento efekt bol potvrdený aj experimentálne – neexperimentovalo sa však s dvojčatami ale s veľmi presnými hodinami, merajúcimi čas pomocou oscilácií v elektrónovom obale atómov cézia. Štvoro céziových hodín obletelo Zem v dvoch prúdových lietadlách – dvojo v smere od západu na východ, dvojo v smere od východu na západ – a po prílete ich porovnali s referenčnými hodinami, ktoré zostali „doma“ v Námornom observatóriu v USA. Namerané časové rozdiely sa veľmi dobre zhodovali s hodnotami predpovedanými teóriou. Poznamenajme však, že vzhľadom na účinky rotácie a gravitačného poľa Zeme je reálna situácia podstatne zložitejšia než náš umelý príklad s Kýblikom a Spachtošom, a jej matematický popis si vyžaduje i čo-to zo všeobecnej teórie relativity. V skutočnosti v porovnaní s pozemskými hodinami „omladli“ len hodiny, ktoré leteli smerom na východ – o $(59 \pm 10) \cdot 10^{-9}$s; naopak hodiny, ktoré leteli na západ, v porovnaní s pozemskými hodinami dokonca „zostarli“ o $(273 \pm 7) \cdot 10^{-9}$s. Teoretická predpoveď dávala hodnoty $(40 \pm 23) \cdot 10^{-9}$s, resp. $(275 \pm 21) \cdot 10^{-9}$s.

16.7. Lorentzova transformácia

Vráťme sa ešte raz k našim inerciálnym pozorovateľom v Minkowského časopriestore V so súhlasne orientovanými časovými šípmi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Označme $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}$ a predpokladajme, že $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ sú inerciálne bázy prislúchajúce ich svetočiaram $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ resp. $\mathrm{WL}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b})$. *Lorentzova transformácia* z inerciálnej bázy $\boldsymbol{\beta}$ do inerciálnej bázy $\boldsymbol{\alpha}$ je transformácia súradníc vzhľadom na tieto bázy, t. j. lineárne zobrazenie $\varphi\colon \mathbb{R}^{(1,n)} \to \mathbb{R}^{(1,n)}$ také, že

$$(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\alpha}} = \varphi(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\beta}}$$

pre každé $\boldsymbol{u} \in V$, alebo, čo je to isté,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} \cdot \varphi(\boldsymbol{x})$$

pre každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{(1,n)}$. Z uvedených vzťahov okamžite vidno, že Lorentzova transformácia φ je danými bázami $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jednoznačne určená a jej matica vzhľadom na kanonickú ortonormálnu bázu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ v $\mathbb{R}^{(1,n)}$ je zároveň maticou prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$, t. j.

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

16.7.1. Tvrdenie. *Nech φ je Lorentzova transformácia z inerciálnej bázy $\boldsymbol{\beta}$ do inerciálnej bázy $\boldsymbol{\alpha}$ v Minkowského časopriestore V. Potom pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{(1,n)}$ platí*

$$\langle \varphi\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

Inými slovami, Lorentzova transformácia zachováva štandardný pseudoskalárny súčin.

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{(1,n)}$. Vzhľadom na výber báz $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ platí

$$\langle \varphi\boldsymbol{x}, \varphi\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \varphi\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{\beta} \cdot \varphi\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle,$$

pričom v dvoch krajných výrazoch ide o štandardný pseudoskalárny súčin v $\mathbb{R}^{(1,n)}$, kým v dvoch vnútorných výrazoch o pseudoskalárny súčin vo V.

Ak φ je Lorentzova transformácia z inerciálnej bázy $\boldsymbol{\beta}$ do inerciálnej bázy $\boldsymbol{\alpha}$, ktoré prislúchajú svetočiaram $\mathrm{WL}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{q})$ resp. $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, pričom naši pozorovatelia si za počiatky odpočtu svojich súradníc zvolili udalosti $\boldsymbol{q}$ resp. $\boldsymbol{p}$, tak vzťah medzi súradnicami ľubovoľnej udalosti $\boldsymbol{z} \in V$ v takto zvolených inerciálnych súradných systémoch udáva afinná transformácia

$$(\boldsymbol{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{p})_{\boldsymbol{\alpha}} = \varphi(\boldsymbol{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{q})_{\boldsymbol{\beta}},$$

nazývaná tiež *Poincarého transformáciou.*

Preniknúť do štruktúry Lorentzových transformácií možno tak, že popíšeme štruktúru ich matíc. To je vo všeobecnom prípade pomerne náročná úloha. Ukážeme si však, že dané súhlasne orientované časové šípy $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0$ možno vždy vhodne doplniť do inerciálnych báz $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ tak, že vzhľadom na ne má matica Lorentzovej transformácie z $\boldsymbol{\beta}$ do $\boldsymbol{\alpha}$ obzvlášť jednoduchý a prehľadný tvar $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{L}_v, \boldsymbol{I}_{n-1})$, kde $\boldsymbol{L}_v \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je matica Lorentzovej transformácie

Minkowského časopriestoru $\mathbb{R}^{(1,1)}$, ktorej prvky možno vyjadriť výlučne pomocou veľkosti v relatívnej rýchlosti uvažovaných inerciálnych pozorovateľov. V takom prípade hovoríme o tzv. *špeciálnej Lorentzovej transformácii.*

Ak $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, nájdeme ľubovoľnú ortonormálnu bázu $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ časopriestoru V s prvým členom $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{b}_0$. Lorentzova transformácia z $\boldsymbol{\beta}$ do $\boldsymbol{\alpha}$ je potom identické zobrazenie s maticou $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{I}_{n+1}$.

Ak $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, tak ide o nezávislé vektory. V dôkaze tvrdenia 16.4.1 sme ukázali, že $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ je indefinitný podpriestor vo V. Preto existuje $\boldsymbol{a}_1 \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ také, že $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)$ je ortonormálna báza podpriestoru $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Potom nevyhnutne $\boldsymbol{a}_1 \in [\boldsymbol{a}]^\perp$ je priestorový vektor. Rovnako existuje $\boldsymbol{b}_1 \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cap [\boldsymbol{b}]^\perp$ také, že $(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1)$ je ortonormálna báza podpriestroru $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Ak si označíme $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}_n$ ľubovoľnú ortonormálnu bázu záporne definitného podpriestoru $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]^\perp$, tak $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ a $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ sú inerciálne bázy, ktoré majú posledných $n - 1$ členov rovnakých. Ich matica prechodu má tvar $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{I}_{n-1})$, kde $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ označuje maticu prechodu z bázy $[\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1]$ do bázy $[\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1]$, ktorú vyjadríme explicitne. Na ten účel stačí poznať vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$.

V paragrafe 16.5 sme odvodili tvar vektora $\boldsymbol{v}$ rýchlosti, ktorou sa v subjektívnom fyzikálnom priestore inerciálneho pozorovateľa s časovým šípom $\boldsymbol{a}$ pohybuje inerciálny pozorovateľ s časovým šípom $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

Keďže $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cap [\boldsymbol{a}]^\perp$ a $\dim\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \cap [\boldsymbol{a}]^\perp\big) = 1$, stačí položiť

$$\boldsymbol{a}_1 = v^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{-1} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{-2}}} = \frac{\boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}}{\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1}}.$$

S využitím symetrie úlohy možno písať

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{-\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{-1} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{\sqrt{1 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{-2}}} = \frac{-\boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{b}}{\sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1}}.$$

Z rovnosti pre $\boldsymbol{a}_1$ si vyjadríme

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}_0 + \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1}\, \boldsymbol{a}_1,$$

čo po dosadení do rovnosti pre $\boldsymbol{b}_1$ a malých úpravách dáva

$$\boldsymbol{b}_1 = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1}\, \boldsymbol{a}_0 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}_1.$$

To znamená, že

$$(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1) \cdot \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle & \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1} \\ \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1} & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \end{pmatrix}.$$

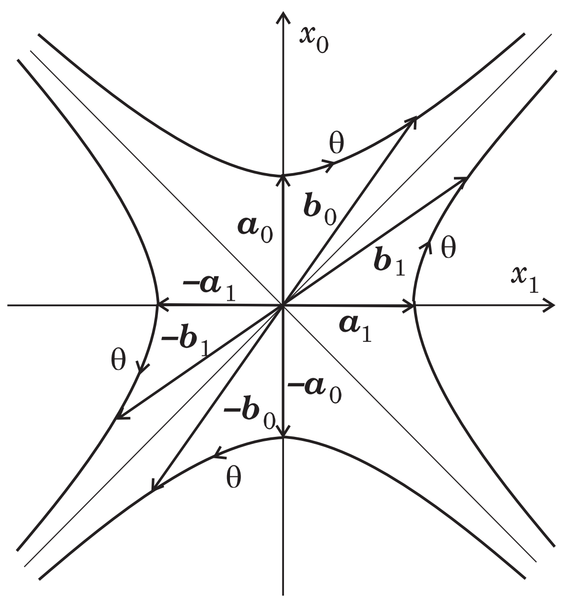
Ak si ešte spomenieme na vzťah medzi pseudoskalárnym súčinom $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a veľkosťou rýchlosti v, dostaneme dvojaké vyjadrenie matice prechodu $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ alias Lorentzovej transformácie $\boldsymbol{L}_v$:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle & \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1} \\ \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^{2} - 1} & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{1 - v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_v.$$

Po substitúcii $\theta = \ln \sqrt{(1+v)/(1-v)}$ dostávame ešte tretie vyjadrenie v tvare tzv. *hyperbolickej rotácie*

$$\boldsymbol{Rh}_\theta = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{L}_v.$$

Všimnite si, že pre $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, čiže $v = 0$, $\theta = 0$, dostávame $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{Rh}_0 = \boldsymbol{I}_2$, čo je v zhode so skôr prijatým riešením tohto špeciálneho prípadu. Všeobecný prípad je znázornený na obrázku.



Z fyzikálneho hľadiska je najdôležitejšia signatúra $(1,3)$, t. j. $n = 3$, kedy sa Lorentzova transformácia súradníc vzhľadom na inerciálne bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ obvykle uvádza v jednom z nasledujúcich tvarov:

$$\begin{aligned} x_0 = ct &= \frac{x_0' + (v/c)x_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{ct' + (v/c)x_1'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \\ x_1 &= \frac{(v/c)x_0' + x_1'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{vt' + x_1'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \\ x_2 &= x_2', \\ x_3 &= x_3', \end{aligned}$$

kde c je rýchlosť svetla, v je relatívna rýchlosť pohybu pozorovateľov s inerciálnymi bázami $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ v smere osi x_1 a $(x_0 = ct,\, x_1, x_2, x_3)^T$, $(x_0' = ct',\, x_1', x_2', x_3')^T$ sú časopriestorové súradnice ľubovoľnej udalosti vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$ resp. $\boldsymbol{\beta}$. Ešte raz však pripomíname, že takýto pomerne jednoduchý tvar má Lorentzova transformácia len pri „správnej“ voľbe priestorových vektorov oboch báz.

16.8. Relativistická kontrakcia dĺžky

Pomocou Lorentzovej transformácie možno jednoducho odvodiť ďalší zo známych relativistických efektov.

Nech $\mathrm{WL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$, $\mathrm{WL}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b})$ sú súhlasne orientované svetočiary inerciálnych pozorovateľov a $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$, resp. $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ sú s nimi spojené inerciálne bázy zvolené tak, ako v predchádzajúcom paragrafe, t. j. Lorentzova transformácia φ z $\boldsymbol{\beta}$ do $\boldsymbol{\alpha}$ má maticu tvaru $\mathrm{diag}(\boldsymbol{L}_v, \boldsymbol{I}_{n-1})$. Predpokladajme, že prvý pozorovateľ registruje nehybnú pevnú tyč dĺžky $l > 0$ v smere vektora $\boldsymbol{a}_1$. Matematicky ide o priestorový vektor $l\boldsymbol{a}_1$ prebiehajúci postupom času okamžité fyzikálne priestory $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}]^\perp$; jeho súradnice v okamihu t vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$ a počiatok $\boldsymbol{p}$ sú $(t, l, 0, \dots, 0)^T$. Dĺžka tejto tyče sa druhému pozorovateľovi javí ako dĺžka

$$l' = \|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\Leftrightarrow\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle},$$

vektora $\boldsymbol{u}$, ktorý leží v jeho subjektívnom fyzikálnom priestore $[\boldsymbol{b}]^\perp$ (čo značí, že pri jeho ľubovoľnom umiestnení sú oba jeho konce súčasné udalosti vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\beta}$) a spĺňa podmienku

$$(t\boldsymbol{a}_0 + l\boldsymbol{a}_1)_{\boldsymbol{\alpha}} = (t, l, 0, \dots, 0) = \varphi(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\beta}}$$

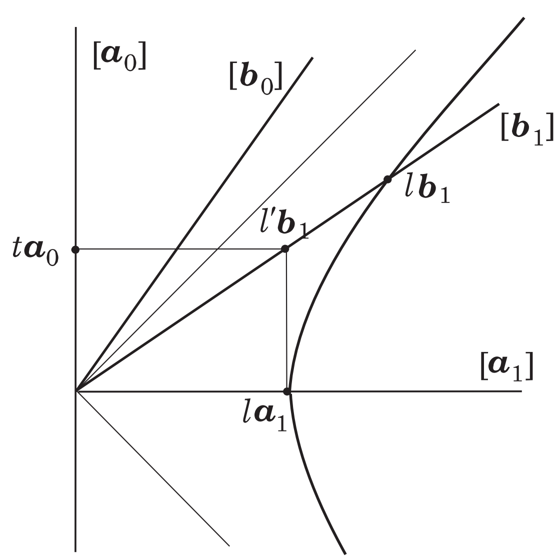
pre nejaký okamih t vlastného času sústavy $\boldsymbol{\alpha}$. Keďže $\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{b}]^\perp$, jeho súradnice majú tvar $(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{\beta}} = (0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ a z podmienky pre ich Lorentzovu transformáciu okamžite vidíme, že $x'_2 = \ldots = x'_n = 0$, ako aj

$$\begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}_v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \frac{x'_1}{\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom zrejme $l' = x'_1$ a konečne dostávame ohlásený vzťah medzi dĺžkami tyče v oboch inerciálnych sústavách:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}} \geq l',$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 0$, teda dĺžka tyče sa javí najväčšia v tej inerciálnej sústave, vzhľadom na ktorú je tyč nehybná. Tento jav sa nazýva *relativistické skrátenie* alebo tiež *relativistická kontrakcia dĺžky* v smere pohybu. Nasledujúci obrázok, ktorý znázorňuje situáciu v $\mathbb{R}^{(1,1)}$, je plne analogický obrázku znázorňujúcemu relativistickú dilatáciu času. Opäť sa na ňom stretáme s disproporciou euklidovskej a Minkowského dĺžky vektorov $l'\boldsymbol{b}_1$ a $l\boldsymbol{a}_1$.



Ešte si všimnime, že onen okamih t vlastného času v sústave $\boldsymbol{\alpha}$ je jednoznačne určený:

$$t = l' \frac{v}{\sqrt{1 \Leftrightarrow v^2}} = lv.$$

Uvedená formulka je však lepšie čitateľná v obvyklom fyzikálnom tvare

$$ct = v\,\frac{l}{c}.$$

Inak povedané, za čas t preletí svetlo rovnakú vzdialenosť, akú urazíme rýchlosťou v za čas, ktorý potrebuje svetlo na prekonanie vzdialenosti l. Zrejme pre tyč „bežných rozmerov“ je čas t enormne malý.