22. MATICOVÉ FUNKCIE

V tejto kapitole najprv preskúmame funkcie, ktoré možno získať dosadením matíc $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ do potenčných radov s komplexnými koeficientmi, t. j. do funkcií v istom zmysle blízkych polynómom. Teda na rozdiel od predchádzajúcej kapitoly sa obmedzíme len na pole $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel, pričom reálne matice i funkcie budeme chápať ako špeciálny prípad komplexných. Najdôležitejšou funkciou, ktorú takto získame, bude exponenciála $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ ľubovoľnej matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Ďalej sa budeme zaoberať maticovými funkciami reálnej premennej, pre ktoré odvodíme niektoré analógy základných formúl diferenciálneho a integrálneho počtu. Tie sa nám budú hodiť pri riešení sústav lineárnych diferenciálnych rovníc. Podrobnejšie sa budeme venovať sústavám homogénnych rovníc s konštantnými koeficientmi, ktoré predstavujú vďačnú oblasť aplikácií exponenciály a Jordanovho kanonického tvaru matíc nad $\mathbb{C}$.

U čitateľa predpokladáme základné znalosti z matematickej analýzy. Časť z nich pripomenieme v poznámkach pod čiarou prípadne zhrnieme do ucelených tvrdení, na ktoré sa budeme odvolávať. Poznamenajme, že k deriváciám funkcií komplexnej premennej budeme pristupovať skôr algebraicky než analyticky – v podstate vystačíme s formálnymi deriváciami polynómov a potenčných radov. To nám umožní vedome prehliadnuť istý zásadný rozdiel medzi deriváciami funkcií reálnej a komplexnej premennej.

22.1. Mocninné rady maticovej premennej

Po polynómoch najjednoduchšie reálne či komplexné funkcie sú definované *mocninnými* alebo tiež *potenčnými radmi*, t. j. formálnymi výrazmi tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum c_k x^k,$$

kde $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť reálnych alebo komplexných čísel.[1] Množinu všetkých potenčných radov v premennej x s koeficientmi z poľa K budeme značiť $K[[x]]$. Zrejme $K[[x]]$ je nekonečnorozmerný vektorový priestor nad poľom K.

Pod *formálnou p-tou deriváciou potenčného radu* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \in K[[x]]$ rozumieme potenčný rad

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{\infty} k(k \Leftrightarrow 1)\dots(k \Leftrightarrow p+1)c_k x^{k-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!} c_{k+p} x^k \in K[[x]];$$

pre $p = 1$ píšeme $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

[1] V analýze sa uvažujú potenčné rady $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-w)^k$ so *stredom* v ľubovoľnom bode $w \in \mathbb{C}$. Pre naše účely však celkom postačí, ak sa obmedzíme na potenčné rady so stredom $w = 0$.

Každý potenčný rad $f(x) = \sum c_k x^k$ nad $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$ definuje predpisom $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ (rovnako značenú) funkciu na množine všetkých tých reálnych alebo komplexných čísel a, pre ktoré uvedený rad konverguje.[2] Táto množina, ktorú nazývame *definičný obor* alebo *obor konvergencie radu* $f(x)$ a značíme $\mathrm{Dom}(f)$ (z anglického *domain*), je (až na hraničné body) charakterizovaná svojim polomerom konvergencie.

Označme $s = \limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}$ a $r = s^{-1}$, ak $0 < s < \infty$, resp. $r = \infty$, ak $s = 0$, resp. $r = 0$, ak $s = \infty$.[3] Potom r nazývame *polomerom konvergencie mocninného radu* $\sum c_k x^k$. Pre nás podstatné poznatky matematickej analýzy o mocninných radoch sú zhrnuté v nasledujúcej vete.

22.1.1. Veta. *Nech mocninný rad $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ má polomer konvergencie r. Potom pre každé $a \in \mathbb{C}$ platí*

(a) ak $|a| < r$, tak rad $\sum c_k a^k$ absolútne konverguje;

(b) ak $|a| > r$, tak rad $\sum c_k a^k$ diverguje.

Ak navyše $r > 0$, tak funkcia f je spojitá na celom otvorenom kruhu $\{a \in \mathbb{C};\ |a| < r\}$ a má tam spojité derivácie všetkých rádov dané potenčnými radmi $f^{(p)}(x)$, z ktorých každý má rovnaký polomer konvergencie ako pôvodný rad a konverguje rovnomerne na každom uzavretom kruhu $\{a \in \mathbb{C};\ |a| \le q\}$ pre $0 < q < r$.[4] Naopak, pre koeficienty pôvodného potenčného radu platí

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0).$$

Špeciálne, ak $r = \infty$, tak funkcia f je definovaná v celej komplexnej rovine $\mathbb{C}$ a má tam všetky „príjemné“ vlastnosti uvedené v druhej časti vety. Ak $r = 0$, tak f je definovaná v jedinom bode $x = 0$. Ak $0 < r < \infty$, tak funkcia f môže no nemusí byť definovaná aj v niektorých bodoch kružnice $\{a \in \mathbb{C};\ |a| = r\}$. Platí teda

$$\{a \in \mathbb{C};\ |a| < r\} \subseteq \mathrm{Dom}(f) \subseteq \{a \in \mathbb{C};\ |a| \le r\}.$$

Podrobnejší rozbor hraničných situácií však presahuje rámec nášho kurzu.

Práve rovnomerná konvergencia vo vnútri definičného oboru potenčného radu zabezpečuje nielen spojitosť jeho súčtu a derivácií, ale tiež umožňuje tento súčet derivovať alebo integrovať formálnym derivovaním resp. integrovaním pôvodného radu

[2] Pre pohodlie čitateľa pripomíname, že súčet radu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ komplexných čísel je definovaný ako limita jeho čiastočných súčtov, t. j. (ak prijmeme dohodu, že súčet radu značíme rovnako ako príslušný rad)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k.$$

Ak táto limita existuje (a je to komplexné číslo), hovoríme, že príslušný rad *konverguje*, v opačnom prípade hovoríme, že rad *diverguje*. Rad $\sum a_k$ *konverguje absolútne*, ak konverguje rad $\sum |a_k|$.

[3] *Limes superior* $\limsup a_k$ *postupnosti reálnych čísel* (a_k) je definované ako supremum množiny všetkých hromadných bodov tejto postupnosti. Pritom $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ je *hromadný bod postupnosti* (a_k), ak existuje z nej vybraná podpostupnosť (a_{k_n}), kde (k_n) je rastúca postupnosť prirodzených čísel, taká, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = b$.

[4] Funkcionálny rad $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ *konverguje rovnomerne na množine* $X \subseteq \mathbb{C}$ k funkcii $g(x)$, ak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0)(\forall m \ge m_0)(\forall x \in X)\left(\left|\sum_{k=0}^{m} g_k(x) - g(x)\right| < \varepsilon\right)$. Vo všeobecnosti súčet konvergentného funkcionálneho radu funkcií spojitých na množine X nemusí byť spojitá funkcia na X. Ak však rad konverguje k svojmu súčtu na tejto množine *rovnomerne*, tak aj jeho súčet je spojitá funkcia na X.

člen za členom. Vo vnútri kruhu konvergencie tak nemusíme rozlišovať medzi radom a funkciou definovanou jeho súčtom, a rovnako ani medzi p-tou formálnou deriváciou radu a p-tou deriváciou tejto funkcie.

Formálne možno do mocninného radu $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ dosadiť za premennú x nielen reálne či komplexné číslo, ale aj ľubovoľnú štvorcovú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$. Aby sme však mohli bližšie preskúmať maticové funkcie, ktoré takto dostaneme, musíme si najprv ujasniť niektoré základné otázky týkajúce sa konvergencie postupností a radov komplexných matíc.

Konvergenciu postupnosti matíc definujeme po zložkách. Teda postupnosť matíc $(\boldsymbol{A}_k)_{k=0}^{\infty}$, kde $\boldsymbol{A}_k = (a_{kij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, konverguje k matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ak pre všetky $i \le m$, $j \le n$ postupnosť $(a_{kij})_{k=0}^{\infty}$ konverguje k prvku a_{ij}, čiže $\lim\limits_{k\to\infty} a_{kij} = a_{ij}$. V takom prípade píšeme

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}.$$

V dôsledku spojitosti sčítania a násobenia v poli $\mathbb{C}$ možno pre súčty a súčiny konvergentných maticových postupností $(\boldsymbol{A}_k)$, $(\boldsymbol{B}_k)$ vhodných rozmerov dokázať obdobné vzťahy ako pre číselné postupnosti:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k + \boldsymbol{B}_k) &= \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k + \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}_k,\\ \lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{A}_k \cdot \boldsymbol{B}_k) &= \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k \cdot \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{B}_k.\end{aligned}$$

Tieto pravidlá nám umožňujú počítať s limitami maticových postupností do značnej miery podobne ako s limitami číselných postupností.

Súčet maticového radu $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$, kde $(\boldsymbol{A}_k)_{k=0}^{\infty}$ je nejaká postupnosť komplexných matíc rovnakého rozmeru $m \times n$, potom definujeme ako limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov, t. j.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{A}_k,$$

samozrejme, ak uvedená limita (t. j. matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ príslušných vlastností) existuje. V takom prípade hovoríme, že *maticový rad* $\sum \boldsymbol{A}_k$ *konverguje*, v opačnom prípade hovoríme, že *diverguje*.

Dosadením konkrétnej matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ do mocninného radu $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ tak dostaneme maticový rad $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$, ktorého súčet je definovaný ako limita

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \boldsymbol{A}^k$$

postupnosti hodnôt $f_m(\boldsymbol{A})$ polynómov $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ pre maticu $\boldsymbol{A}$. Definičným oborom takejto funkcie f je množina tých matíc $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pre ktoré uvedený rad, t. j. postupnosť $\big(f_m(\boldsymbol{A})\big)$, konverguje. Túto množinu (pri pevnom n) budeme značiť $\mathrm{Dom}_n(f)$.

Limitným prechodom pre $m \to \infty$ dostávame z výsledkov 21.1.1–3 obdobné tvrdenia aj pre maticové potenčné rady.

22.1.2. Tvrdenie. *Nech $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pričom $\boldsymbol{P}$ je regulárna. Potom $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n(f)$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^{-1} \in \mathrm{Dom}_n(f)$, a v tom prípade platí*

$$f\big(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\big) = \boldsymbol{P}\cdot f(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{P}^{-1}.$$

22.1.3. Dôsledok. *Nech $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, pričom $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$. Potom $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n(f)$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{B} \in \mathrm{Dom}_n(f)$, a v tom prípade $f(\boldsymbol{A}) \approx f(\boldsymbol{B})$.*

22.1.4. Lema. *Nech $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $\boldsymbol{A}_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, ..., $\boldsymbol{A}_p \in \mathbb{C}^{n_p\times n_p}$. Potom $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_p) \in \mathrm{Dom}(f)$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{A}_j \in \mathrm{Dom}_{n_j}(f)$ pre každé $j \le p$, a v tom prípade platí*

$$f\big(\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_p)\big) = \mathrm{diag}\big(f(\boldsymbol{A}_1),\dots,f(\boldsymbol{A}_p)\big).$$

Ľubovoľný polynóm, ktorý anuluje maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, nám umožňuje zjednodušiť výpočet súčtu potenčného radu $f(\boldsymbol{A}) = \sum c_k\boldsymbol{A}^k$, a to tým väčšmi, čím nižší je jeho stupeň m. Pomocou neho možno totiž všetky mocniny $\boldsymbol{A}^k$, $k \ge m$, vyjadriť ako hodnoty polynómov stupňa $< m$ pre maticu $\boldsymbol{A}$ (porovnajte s príkladom 21.1.5). Najvýhodnejší na ten účel preto je minimálny polynóm matice $\boldsymbol{A}$. Ak totiž $\mu_{\boldsymbol{A}}(x) = x^m \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m d_j x^{m-j}$, tak $\boldsymbol{A}^m = \sum_{j=1}^m d_j\boldsymbol{A}^{m-j}$. Potom

$$\boldsymbol{A}^{m+k} = \sum_{j=1}^m d_j^{(k)}\boldsymbol{A}^{m-j},$$

kde koeficienty $d_j^{(k)}$ možno vypočítať z rekurentného vzťahu

$$d_j^{(0)} = d_j, \qquad\qquad d_j^{(k+1)} = d_j d_1^{(k)} + d_{j+1}^{(k)},$$

pričom pre $j > m$ definitoricky kladieme $d_j^{(k)} = 0$. Ak teda označíme

$$\nu_{\boldsymbol{A}}^{(k)}(x) = d_1^{(k)}x^{m-1} + \ldots + d_{m-1}^{(k)}x + d_m^{(k)} = \sum_{j=1}^m d_j^{(k)}x^{m-j},$$

tak všetky tieto polynómy majú stupeň $< m$ a pre $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n(f)$ platí

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^\infty c_k\boldsymbol{A}^k = c_0\boldsymbol{I} + \ldots + c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \sum_{k=0}^\infty c_{m+k}\nu_{\boldsymbol{A}}^{(k)}(\boldsymbol{A}).$$

Doplnenie vynechaných detailov prenechávame čitateľovi ako cvičenie.

Iný spôsob výpočtu potenčného radu $f(\boldsymbol{A}) = \sum c_k\boldsymbol{A}^k$, pri ktorom zároveň možno rozhodnúť otázku, či $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n(f)$, sa zakladá na znalosti Jordanovho kanonického tvaru matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Keďže pole $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavreté, existuje matica $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1),\dots,\boldsymbol{J}_{n_p}(\lambda_p)\big) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ v JKT a regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ také, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$. Vďaka tvrdeniu 22.1.2 a leme 22.1.4 potom

$$\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n(f) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{J} \in \mathrm{Dom}_n(f) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, i \le p)\big(\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i) \in \mathrm{Dom}_{n_i}(f)\big),$$

a – podobne ako pre polynómy – v tom prípade platí

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P} \cdot f(\boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \cdot \operatorname{diag}\big(f\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1)\big), \dots, f\big(\boldsymbol{J}_{n_p}(\lambda_p)\big)\big) \cdot \boldsymbol{P}^{-1}.$$

Tým sme otázku konvergencie potenčných radov pre všeobecné matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zredukovali na otázku konvergencie takýchto radov pre Jordanove bunky $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Použitím viet 22.1.1, 21.1.8 a limitným prechodom $m \to \infty$ na postupnosť čiastočných súčtov $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$, umožneným rovnomernou konvergenciou, dostávame

22.1.5. Veta. *Nech $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ je potenčný rad s polomerom konvergencie r a $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$ je komplexná Jordanova bunka. Potom platí*
(a) ak $|\lambda| < r$, tak $\boldsymbol{J}_n(\lambda) \in \operatorname{Dom}_n(f)$;
(b) ak $|\lambda| > r$, tak $\boldsymbol{J}_n(\lambda) \notin \operatorname{Dom}_n(f)$.
V prípade (a) navyše platí

$$f\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)\big) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

K hraničnému prípadu $|\lambda| = r$ poznamenajme len toľko, že rad $f\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)\big)$ konverguje práve vtedy, keď konverguje rad $f^{(n-1)}(\lambda)$. Potom konvergujú i všetky ostatné rady $f^{(j)}(\lambda)$, $0 \le j \le n-1$, a vyššie uvedený vzorec zostáva v platnosti.

Vzorec pre $f\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)\big)$ je cenný najmä vtedy, keď máme k dispozícii kompaktnú formulu pre funkciu f, z ktorej vieme priamo vypočítať aj jej derivácie. Taktiež ho možno použiť na *definíciu* hodnôt $f\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)\big)$ aj pre iné funkcie, než len dané potenčnými radmi. Stačí, aby funkcia f mala v bode λ všetky derivácie až do rádu $n-1$. V ďalšom kroku možno definíciu $f(\boldsymbol{A})$ rozšíriť na všetky matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ za predpokladu, že ich spektrum spĺňa istú podmienku, ktorú presnejšie sformulujeme v cvičeniach.

Spektrálnym polomerom komplexnej (a tým i reálnej) štvorcovej matice $\boldsymbol{A}$ nazývame maximum absolútnych hodnôt jej vlastných čísel, t. j. číslo

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \operatorname{Spec} \boldsymbol{A}\}.$$

Zrejme $\rho(\boldsymbol{A}) \ge 0$ je reálne číslo a pre $\boldsymbol{A} \ne \boldsymbol{0}$ je $\rho(\boldsymbol{A}) > 0$.

Otázku konvergencie potenčných radov pre všeobecné matice možno vyjasniť na základe vzťahu medzi polomerom konvergencie radu a spektrálnym polomerom matice. Keďže každá komplexná štvorcová matica je podobná s maticou v JKT, z tvrdení 22.1.2, 22.1.4 a 22.1.5 vyplýva

22.1.6. Veta. *Nech $f(x) = \sum c_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ je potenčný rad s polomerom konvergencie r. Potom pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí*
(a) ak $\rho(\boldsymbol{A}) < r$, tak $\boldsymbol{A} \in \operatorname{Dom}_n(f)$;
(b) ak $\rho(\boldsymbol{A}) > r$, tak $\boldsymbol{A} \notin \operatorname{Dom}_n(f)$.

22.1.7. Príklad. Funkcie $(1 \Leftrightarrow x)^{-1}$, $(1+x)^{-1}$ možno pre $|x| < 1$ vyjadriť Mac Laurinovými radmi

$$\frac{1}{1 \Leftrightarrow x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (\Leftrightarrow 1)^k x^k,$$

s rovnakým polomerom konvergencie $r = 1$. Preto i maticové rady $\sum \boldsymbol{A}^k$, $\sum (\Leftrightarrow 1)^k \boldsymbol{A}^k$ konvergujú pre každé $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$, a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{A})^{-1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\Leftrightarrow 1)^k \boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}.$$

Rad $\sum \boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{A})^{-1}$ sa tiež zvykne nazývať *von Neumannovým radom* matice $\boldsymbol{A}$.

22.1.8. Príklad. Funkcie $\ln(1 \Leftrightarrow x)$, $\ln(1+x)$ možno pre $|x| < 1$ rozvinúť do Mac Laurinových radov

$$\ln(1 \Leftrightarrow x) = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^{k-1}}{k}\, x^k,$$

opäť s polomerom konvergencie $r = 1$, ktoré sme získali z radov pre $(1 \pm x)^{-1}$ formálnou integráciou člen po člene a využitím rovnosti $\ln 1 = 0$. Uvedené rady teda môžeme použiť na *definíciu* funkcií

$$\ln(\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}) = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \boldsymbol{A}^k, \qquad \ln(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^{k-1}}{k} \boldsymbol{A}^k,$$

pre $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$.

Uvedomme si, že $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}) = \{\lambda \Leftrightarrow 1;\ \lambda \in \operatorname{Spec} \boldsymbol{A}\}$, a dosaďme do druhého radu maticu $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}$ miesto matice $\boldsymbol{A}$. Maticový rad

$$\ln \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^{k-1}}{k} (\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{I})^k,$$

ktorý takto dostaneme, konverguje pre všetky $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ také, že $|\lambda \Leftrightarrow 1| < 1$ pre každé $\lambda \in \operatorname{Spec} \boldsymbol{A}$; pre takéto matice ho teda možno použiť na definíciu funkcie $\ln \boldsymbol{A}$.

22.2. Exponenciála matice

Vari najdôležitejšou funkciou v matematickej analýze je exponenciála e^x, ktorú možno pre každé $x \in \mathbb{C}$ definovať potenčným radom

$$\mathrm{e}^x = \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Z uvedeného rozvoja už možno odvodiť všetky dôležité vlastnosti exponenciálnej funkcie, vrátane kľúčového vzťahu $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

S exponenciálnou funkciou úzko súvisia ďalšie dve funkcie, kosínus a sínus, ktoré je pre naše účely najvýhodnejšie definovať pre každé $x \in \mathbb{C}$ mocninnými radmi

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Presvedčte sa samostatne, že polomer konvergencie všetkých troch uvedených radov je $r = \infty$.

To nám umožňuje definovať exponenciálu, kosínus a sínus pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k,$$

$$\cos \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k)!} \boldsymbol{A}^{2k}, \qquad \sin \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k+1)!} \boldsymbol{A}^{2k+1}.$$

Jednoduchým výpočtom možno overiť maticové zovšeobecnenie slávneho *Eulerovho vzťahu* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$.

22.2.1. Tvrdenie. *Pre ľubovoľnú maticu* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}} = \cos \boldsymbol{A} + \mathrm{i} \sin \boldsymbol{A}.$$

Dôkaz. Sčítaním zvlášť cez párne a nepárne členy radu dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{i}\boldsymbol{A})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k}}{(2k)!} \boldsymbol{A}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{(2k+1)!} \boldsymbol{A}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k)!} \boldsymbol{A}^{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Leftrightarrow 1)^k}{(2k+1)!} \boldsymbol{A}^{2k+1} = \cos \boldsymbol{A} + \mathrm{i} \sin \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Známy vzťah $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^y$ má tiež maticové zovšeobecnenie.

22.2.2. Tvrdenie. *Ak matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *komutujú, tak*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} .$$

Dôkaz. S použitím rovnosti $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ a binomickej vety (lema 21.1.6) postupnými úpravami vypočítame

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \boldsymbol{A}^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \boldsymbol{B}^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!\,j!} \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{B}^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \boldsymbol{A}^{k-j} \boldsymbol{B}^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} . \end{aligned}$$

Ak matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ komutujú, tak komutujú aj matice $\boldsymbol{A}$, $\mathrm{i}\boldsymbol{B}$. Z tvrdení 22.2.1, 22.2.2 tak dostávame

22.2.3. Dôsledok. *Ak matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komutujú, tak*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}(\cos \boldsymbol{B} + \mathrm{i}\sin \boldsymbol{B}),$$

pričom $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}, \cos \boldsymbol{B}, \sin \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Uvedomte si, že pre nulovú maticu $\mathbf{0}_{n,n} = \operatorname{diag}(0,\dots,0)$ podľa lemy 21.1.4 platí $\exp \mathbf{0}_{n,n} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^0,\dots,\mathrm{e}^0) = \boldsymbol{I}_n$. Keďže každá štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ komutuje s maticou $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$, z tvrdenia 22.2.2 okamžite vyplýva ďalší dôsledok.

22.2.4. Dôsledok. *Exponenciála $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ ľubovoľnej matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulárna a platí*

$$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}}\,.$$

Kľúčom k výpočtu exponenciály matice je opäť znalosť exponenciály Jordanových buniek. Vďaka rovnosti $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ podľa vety 22.1.5 dostávame

22.2.5. Tvrdenie. *Pre $n \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ platí*

$$\exp \boldsymbol{J}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\lambda & \frac{\mathrm{e}^\lambda}{1!} & \dots & \frac{\mathrm{e}^\lambda}{(n-1)!} \\ 0 & \mathrm{e}^\lambda & \dots & \frac{\mathrm{e}^\lambda}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^\lambda\,.$$

Na záver ešte zaznamenáme jeden užitočný a zaujímavý vzťah, umožňujúci jednoduchý vypočet determinantu exponenciály matice len na základe jej stopy.

22.2.6. Veta. *(Liouvilleova formula) Pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí*

$$\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \boldsymbol{A}}\,.$$

Dôkaz. Pre $\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1)\dots,\boldsymbol{J}_{n_p}(\lambda_p)\big)$ podľa lemy 22.1.4 máme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}} = \operatorname{diag}\big(\exp \boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1),\dots,\exp \boldsymbol{J}_{n_p}(\lambda_p)\big).$$

Takže v dôsledku tvrdenia 22.2.5 platí

$$\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{J}} = \big(\mathrm{e}^{\lambda_1}\big)^{n_1}\dots\big(\mathrm{e}^{\lambda_p}\big)^{n_p} = \exp(n_1\lambda_1 + \dots + n_p\lambda_p) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \boldsymbol{J}}\,.$$

Nech teraz $\boldsymbol{J} \approx \boldsymbol{A}$ je JKT matice $\boldsymbol{A}$. Podľa dôsledku 22.1.3 platí $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \approx \mathrm{e}^{\boldsymbol{J}}$. Keďže podobné matice majú rovnaký determinant aj stopu (pozri dôsledok 18.1.4), z prvej časti dôkazu vyplýva

$$\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \det \mathrm{e}^{\boldsymbol{J}} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \boldsymbol{J}} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \boldsymbol{A}}\,.$$

Keďže $\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \boldsymbol{A}} \neq 0$, dostávame tak iný dôkaz regularity matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$.

22.3. Maticové a vektorové funkcie reálnej premennej

Funkciu $\boldsymbol{x}\colon S \to \mathbb{C}^n$, resp. $\boldsymbol{x}\colon S \to \mathbb{R}^n$, kde $S \subseteq \mathbb{R}$, budeme nazývať *komplexnou* resp. *reálnou vektorovou funkciou reálnej premennej.* Takáto funkcia sa prirodzene rozpadá na n zložiek, t. j. *skalárnych funkcií* $x_i\colon S \to \mathbb{C}$ resp. $x_i\colon S \to \mathbb{R}$ takých, že $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ pre každé $t \in S$. Podobne funkciu $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{C}^{m\times n}$ resp. $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{R}^{m\times n}$ nazývame *komplexnou* resp. *reálnou maticovou funkciou reálnej premennej* na množine $S \subseteq \mathbb{R}$. I takúto funkciu možno rozložiť na mn skalárnych zložiek $x_{ij}\colon S \to \mathbb{C}$, resp. $x_{ij}\colon S \to \mathbb{R}$ takých, že pre každé $t \in S$ platí $\boldsymbol{X}(t) = \big(x_{ij}(t)\big)_{m\times n}$. Zrejme vektorové funkcie možno chápať ako špeciálny prípad maticových a reálne ako špeciálny prípad komplexných.[5]

Maticová funkcia $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ je *spojitá* v bode t_0 svojho definičného oboru S, prípadne na množine $N \subseteq S$, ak každá z jej zložiek x_{ij} má uvedenú vlastnosť.

Predpokladajme, že maticová funkcia $\boldsymbol{X}$ je definovaná v nejakom okolí N bodu t_0, t. j. všetky jej zložky x_{ij} sú definované na N. Hovoríme, že $\boldsymbol{X}$ má deriváciu v bode t_0, ak všetky zložky x_{ij} majú v bode t_0 (konečnú) deriváciu. Deriváciu funkcie $\boldsymbol{X}$ v bode t_0 značíme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t_0)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x_{ij}(t_0)}{\mathrm{d}t}\right)_{m\times n}, \qquad \text{prípadne} \qquad \boldsymbol{X}'(t_0) = \big(x'_{ij}(t_0)\big)_{m\times n}.$$

Niekedy, najmä pri typickej interpretácii premennej t ako času, sa tiež používa od Newtona pochádzajúce označenie $\dot{\boldsymbol{X}}(t_0) = \big(\dot{x}_{ij}(t_0)\big)_{m\times n}$. Vyššie derivácie (ak existujú) značíme $\mathrm{d}^k\boldsymbol{X}/\,\mathrm{d}t^k$, prípadne $\boldsymbol{X}^{(k)}$.

Nasledujúce maticové zovšeobecnenia pravidiel pre deriváciu lineárnej kombinácie a súčinu maticových funkcií, resp. pre kompozíciu skalárnej a maticovej funkcie možno overiť priamym výpočtom.

22.3.1 Tvrdenie. *Nech maticové funkcie* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\colon S \to \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{Z}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times p}$ *majú derivácie v bode* $t_0 \in S$ *a* $a, b \in \mathbb{C}$. *Potom aj funkcie* $a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y} = (ax_{ij} + by_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Z} = \Big(\sum_j x_{ij}z_{jk}\Big)_{m\times p}$ *majú derivácie v bode* t_0 *a platí*

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y})'(t_0) &= a\boldsymbol{X}'(t_0) + b\boldsymbol{Y}'(t_0)\\ (\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Z})'(t_0) &= \boldsymbol{X}'(t_0)\cdot\boldsymbol{Z}(t_0) + \boldsymbol{X}(t_0)\cdot\boldsymbol{Z}'(t_0).\end{aligned}$$

Nech navyše reálna skalárna funkcia g *je definovaná v okolí bodu* s_0 *a má v ňom (konečnú) deriváciu, pričom* $g(s_0) = t_0$. *Potom aj funkcia* $\boldsymbol{X}\circ g = (x_{ij}\circ g)_{m\times n}$ *má v bode* s_0 *deriváciu*

$$(\boldsymbol{X}\circ g)'(s_0) = \boldsymbol{X}'(t_0)g'(s_0).$$

[5] Pripomeňme, že komplexnú funkciu $g\colon S \to \mathbb{C}$ reálnej premennej $t \in S \subseteq \mathbb{R}$ možno jednoznačne rozložiť na tvar $g(t) = g_1(t) + \mathrm{i}g_2(t)$, kde $g_1, = \operatorname{Re} g$, $g_2 = \operatorname{Im} g$ sú funkcie $S \to \mathbb{R}$. Potom g je spojitá v bode $t_0 \in S$ práve vtedy, keď g_1 aj g_2 sú spojité v t_0. Podobne aj derivácia a integrál sú definované po zložkách: $g'(t_0)$ existuje práve vtedy, keď existujú $g_1'(t_0)$ a $g_2'(t_0)$, pričom $g'(t_0) = g_1'(t_0) + \mathrm{i}g_2'(t_0)$; pre spojitú $g\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ kladieme $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b g_2(t)\,\mathrm{d}t$.

22.3.2. Dôsledok. *Nech maticová funkcia $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je definovaná v okolí bodu t_0 a má tam deriváciu. Potom pre každé $k \in \mathbb{N}$ aj maticová funkcia $\boldsymbol{X}^k$ má v bode t_0 deriváciu*

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^k(t_0)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{X}^{k-j}(t_0)\cdot \boldsymbol{X}'(t_0)\cdot \boldsymbol{X}^{j-1}(t_0).$$

Ak navyše matice $\boldsymbol{X}(t_0)$ a $\boldsymbol{X}'(t_0)$ komutujú, tak

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^k(t_0)}{\mathrm{d}t} = k\boldsymbol{X}^{k-1}(t_0)\cdot \boldsymbol{X}'(t_0) = k\boldsymbol{X}'(t_0)\cdot \boldsymbol{X}^{k-1}(t_0).$$

Dôkaz indukciou cez k.

22.3.3. Tvrdenie. *Nech potenčný rad $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ má polomer konvergencie $r > 0$. Nech ďalej maticová funkcia $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ je definovaná v okolí bodu $t_0 \in S$ a má v ňom deriváciu, pričom matice $\boldsymbol{X}(t_0)$ a $\boldsymbol{X}'(t_0)$ komutujú. Ak $\rho(\boldsymbol{X}(t_0)) < r$, tak funkcia $f(\boldsymbol{X}) = f\circ \boldsymbol{X}$ je definovaná v nejakom okolí bodu t_0 a má v ňom deriváciu*

$$f(\boldsymbol{X})'(t_0) = (f\circ \boldsymbol{X})'(t_0) = f'\big(\boldsymbol{X}(t_0)\big)\cdot \boldsymbol{X}'(t_0) = \boldsymbol{X}'(t_0)\cdot f'\big(\boldsymbol{X}(t_0)\big).$$

V dôkaze použijeme niekoľko argumentov z matematickej analýzy. Čitateľovi, ktorému veľa nehovoria, odporúčame prejsť priamo k výpočtu.

Z existencie derivácie $\boldsymbol{X}'(t_0)$ vyplýva spojitosť funkcie $\boldsymbol{X}$ v nejakom okolí N bodu t_0. Zo spojitej závislosti koeficientov charakteristického polynómu na prvkoch matice ako aj koreňov polynómu na koeficientoch zasa vyplýva existencia okolia $S \subseteq N$ bodu t_0 a čísla $q > 0$ takých, že $\rho(\boldsymbol{X}(t)) \le q < r$ pre $t \in S$. Označme $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$. Vďaka rovnomernej konvergencii radu $f(\boldsymbol{X}(t)) = \sum c_k \boldsymbol{X}(t)^k$ na množine S a s použitím pravidiel z 22.3.1, 22.3.2 dostávame

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X})'(t_0) &= \lim_{m\to\infty} f_m(\boldsymbol{X})'(t_0) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^k(t_0)}{\mathrm{d}t} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} k c_k \boldsymbol{X}^{k-1}(t_0)\cdot \boldsymbol{X}'(t_0) = f'\big(\boldsymbol{X}(t_0)\big)\cdot \boldsymbol{X}'(t_0). \end{aligned}$$

Keďže za uvedeného predpokladu komutujú aj $\boldsymbol{X}'(t_0)$ a $f'\big(\boldsymbol{X}(t_0)\big)$, platí i druhá rovnosť.

Z faktu, že matica $\boldsymbol{A}t$ vždy komutuje s maticou $(\boldsymbol{A}t)' = \boldsymbol{A}$, ako aj s maticami $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, $\cos \boldsymbol{A}t$, $\sin \boldsymbol{A}t$, na základe práve dokázanej vety okamžite vyplýva

22.3.4. Dôsledok. *Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevne zvolená matica. Potom maticové funkcie* $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, $\cos \boldsymbol{A}t$, $\sin \boldsymbol{A}t$ *sú definované pre každé $t \in \mathbb{R}$ a pre ich derivácie platí*

$$\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\big)' = \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \qquad \big(\cos \boldsymbol{A}t\big)' = \Leftrightarrow\boldsymbol{A}\cdot \sin \boldsymbol{A}t, \qquad \big(\sin \boldsymbol{A}t\big)' = \boldsymbol{A}\cdot \cos \boldsymbol{A}t.$$

Určitý integrál spojitej maticovej funkcie $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{C}^{m\times n}$ na intervale[6] $S \subseteq \mathbb{R}$ definujeme pre $s, t \in S$ opäť po zložkách:

$$\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left(\int_s^t x_{ij}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)_{m\times n}$$

Prenecháme čitateľovi, aby si samostatne premyslel, že takto definovaný určitý integrál splýva s limitou maticových integrálnych súčtov

$$\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{X}(s + j\,d_k)d_k,$$

kde $d_k = (t - s)/k$.

Nasledujúce tvrdenie o „maticovej linearite“ sprava i zľava a množinovej aditívnosti určitého integrálu je priamym zovšeobecnením analogických pravidiel pre integrál skalárnych funkcií.

22.3.5. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} : S \to \mathbb{C}^{m\times n}$ *sú spojité maticové funkcie na intervale* $S \subseteq \mathbb{R}$, $s, t, u \in S$ a $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{k\times m}$, $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{C}^{n\times p}$. *Potom*

$$\int_s^t \big(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}(\tau)\cdot\boldsymbol{C} \,+\, \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Y}(\tau)\cdot\boldsymbol{D}\big)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{A}\cdot\left(\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\cdot\boldsymbol{C} \,+\, \boldsymbol{B}\cdot\left(\int_s^t \boldsymbol{Y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\cdot\boldsymbol{D},$$

$$\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \,+\, \int_t^u \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_s^u \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Špeciálne pre skaláry $a, b \in \mathbb{C}$ a $s, t \in S$ platí

$$\int_s^t \big(a\boldsymbol{X}(\tau) + b\boldsymbol{Y}(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau = a\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \,+\, b\int_s^t \boldsymbol{Y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_t^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{0}, \qquad \int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int_t^s \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Derivácia a určitý integrál ako funkcia hornej medze sú opäť zviazané maticovým zovšeobecnením Newtonovej-Leibnizovej formuly, ako aj vyjadrením určitého integrálu rozdielom primitívnej funkcie hornej a dolnej medze. Inak povedané, ide o navzájom inverzné operácie v rovnakom zmysle ako v jednorozmernom prípade.

22.3.6. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{X}\colon S \to \mathbb{C}^{m\times n}$ *je spojitá maticová funkcia na intervale* $S \subseteq \mathbb{R}$ a $s, t \in S$. *Potom*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s^t \boldsymbol{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{X}(t).$$

Ak $\boldsymbol{X}$ *navyše má na* S *spojitú deriváciu* $\boldsymbol{X}'$, *tak*

$$\int_s^t \boldsymbol{X}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}(s).$$

[6] Dohodneme sa, že pod *intervalom* budeme odteraz vždy rozumieť *netriviálny interval* – či už ohraničený alebo neohraničený, – t. j. ľubovoľnú podmnožinu $S \subseteq \mathbb{R}$, ktorá obsahuje aspoň dva body a spĺňa podmienku $(\forall\, a, b \in S)(\forall\, x \in \mathbb{R})(a \le x \le b \Rightarrow x \in S)$.

22.4. Sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc

Paragraf 22.2 sme začali vyzdvihnutím exponenciály e^x ako „vari najdôležitejšej funkcie v matematickej analýze“. Jeden z dôvodov takéhoto hodnotenia sme už naznačili v príklade 18.5.1 – každé riešenie diferenciálnej rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax,$$

kde $a \in \mathbb{C}$, má tvar funkcie $x(t) = q\,\mathrm{e}^{at}$ reálnej premennej t, kde $q \in \mathbb{C}$ je ľubovoľná konštanta. Túto možno určiť, ak máme navyše predpísanú i počiatočnú podmienku, t. j. hodnotu $x(t_0) = c \in \mathbb{C}$ v nejakom bode $t_0 \in \mathbb{R}$, – vtedy riešenie nadobúda tvar

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{a(t-t_0)} = q\,\mathrm{e}^{at},$$

kde $q = c\,\mathrm{e}^{-at_0}$. Riešenia zložitejších diferenciálnych rovníc sa preto často zostavujú vhodnými kombináciami funkcií e^{at}, prípadne funkcií $\cos at$, $\sin at$, pre rôzne a, ktoré však s exponenciálnymi funkciami tesne súvisia prostredníctvom Eulerovho vzťahu.

Uvedený tvar riešenia možno priamo zovšeobecniť aj na prípad, keď $a\colon S \to \mathbb{C}$ je ľubovoľná spojitá funkcia, definovaná na nejakom intervale $S \subseteq \mathbb{R}$, a nielen konštanta. Vtedy

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

pre $t_0, t \in S$. V tomto paragrafe preskúmame viacrozmerný analóg podobnej situácie.

Sústavou lineárnych diferenciálnych rovníc, prípadne *vektorovou lineárnou diferenciálnou rovicou* nazývame formulu tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

kde $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ resp. $\boldsymbol{b}\colon S \to \mathbb{C}^n$ je spojitá maticová resp. vektorová funkcia na nejakom intervale $S \subseteq \mathbb{R}$. *Riešením* takejto *sústavy* rozumieme ľubovoľnú funkciu $\boldsymbol{x}\colon S \to \mathbb{C}^n$, ktorá má na S spojitú deriváciu a pre každé $t \in S$ platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t).$$

(V prípadných krajných bodoch intervalu sa pod deriváciou myslí derivácia sprava resp. zľava.) Takáto sústava býva často doplnená o *počiatočnú podmienku*

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c},$$

ktorá predpisuje hodnotu $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$ funkcie $\boldsymbol{x}$ v niektorom pevnom bode $t_0 \in S$. V takom prípade hovoríme o *počiatočnej úlohe*. V kurze obyčajných diferenciálnych rovníc sa zvykne dokazovať nasledujúca veta o existencii a jednoznačnosti jej riešenia.

22.4.1. Veta. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ resp. $\boldsymbol{b}\colon S \to \mathbb{C}^n$ je spojitá maticová resp. vektorová funkcia na S, $t_0 \in S$ a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$. Potom existuje práve jedno riešenie počiatočnej úlohy*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}.$$

Poznámka. (a) Keďže $\mathbb{C}^{n\times n}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$ a násobenie pevnou maticou $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (či už zľava alebo sprava) je lineárne zobrazenie $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, do rámca vektorových lineárnych diferenciálnych rovníc zapadajú aj *maticové lineárne diferenciálne rovnice* tvaru $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$, resp. $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ sú spojité maticové funkcie na nejakom intervale $S \subseteq \mathbb{R}$, prípadne doplnené počiatočnou podmienkou $\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{C}$, pre $t_0 \in S$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Čitateľ si iste ľahko sformuluje pojem riešenia takejto počiatočnej úlohy. Taktiež veta 22.4.1 zostáva s minimálnymi typografickými úpravami v platnosti aj pre takéto rovnice.

(b) *Lineárnu* (jednorozmernú) *diferenciálnu rovnicu n-tého rádu*

$$x^{(n)} \Leftrightarrow a_1 x^{(n-1)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_{n-1}x' \Leftrightarrow a_n x = b,$$

kde $a_1, \ldots, a_n, b\colon S \to \mathbb{C}$ sú spojité funkcie, možno substitúciou $x = x_n$ previesť na sústavu n lineárnych diferenciálnych rovníc $x_1' = a_1x_1 + \ldots a_nx_n + b$, $x_2' = x_1, \ldots,$ $x_n' = x_{n-1}$, t.j. $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & \ldots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = b(t)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pri uvedenej substitúcii totiž pre $1 \le i \le n$ platí $x_i = x^{(n-i)}$. Všimnite si, že pri pevnom t je $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{M}_{g_t}^T$ transponovaná matica k pridruženej matici normovaného polynómu $g_t(x) = x^n \Leftrightarrow a_1(t)x^{n-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_{n-1}(t)x \Leftrightarrow a_n(t)$ (pozri paragraf 21.2).

Vetu 22.4.1. možno tiež interpretovať nasledujúcim spôsobom. Podobne ako u sústav lineárnych (algebraických) rovníc, aj tento raz ľahko nahliadneme, že všetky riešenia *homogénnej sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$$

tvoria lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathcal{C}^{(1)}(S, \mathbb{C}^n)$ všetkých spojito diferencovateľných funkcií $S \to \mathbb{C}^n$. Riešenia pôvodnej nehomogénnej sústavy potom tvoria afinný podpriestor v $\mathcal{C}^{(1)}(S, \mathbb{C}^n)$, ktorého zameraním je podpriestor riešení homogénnej sústavy. Veta 22.4.1 okrem iného hovorí, že dimenzia oboch priestorov riešení je n. V prípade homogénnej sústavy je totiž pre pevné $t_0 \in S$ priradením $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}(t_0)$ definovaný lineárny izomorfizmus medzi priestorom jej riešení a $\mathbb{C}^n$. Na popis priestoru všetkých riešení homogénnej sústavy teda stačí nájsť nejakú jeho bázu – v tomto prípade sa jej hovorí *fundamentálny systém riešení.* Takúto bázu tvorí ľubovoľných n lineárne nezávislých riešení $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, t. j. takých, že vektory $\boldsymbol{x}_1(t_0), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t_0) \in \mathbb{C}^n$ sú lineárne nezávislé pre nejaké $t_0 \in S$; potom už vektory $\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t)$ sú lineárne nezávislé pre každé $t \in S$. Priestor všetkých riešení nehomogénnej sústavy je tak plne určený (ľubovoľným) jej jediným riešením a fundamentálnym systémom riešení homogénnej sústavy.

Maticová funkcia $\boldsymbol{F}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$, ktorej stĺpce tvoria fundamentálny systém riešení sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$, sa nazýva *fundamentálna matica* tejto *sústavy.* Z pred chvíľou vykonaných úvah vyplýva, že spojitá maticová funkcia $\boldsymbol{F}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ je fundamentálnou maticou sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ práve vtedy, keď matica $\boldsymbol{F}(t)$ je regulárna pre každé

$t \in S$ (na čo stačí overiť jej regularitu v jedinom ľubovoľnom bode $t_0 \in S$) a vyhovuje maticovej diferenciálnej rovnici $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$, t. j. pre každé $t \in S$ platí

$$\boldsymbol{F}'(t) = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t);$$

z toho už vyplýva aj spojitosť maticovej funkcie $\boldsymbol{F}' \colon S \to \mathbb{C}^{n \times n}$.

Za predpokladu, že poznáme nejakú fundamentálnu maticu sústavy, už nie je ťažké napísať explicitný tvar riešenia príslušnej počiatočnej úlohy.

22.4.2. Veta. *Nech $\boldsymbol{F}$ je fundamentálna matica sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Potom*

(a) *riešenie homogénnej počiatočnej úlohy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{c}\,;$$

(b) *Riešenie nehomogénnej počiatočnej úlohy $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{c} \,+ \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dôkaz. Obe postulované riešenia sú zrejme spojité a vyhovujú počiatočnej podmienke.

(a) V homogénnom prípade platí

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{F}'(t) \cdot \boldsymbol{F}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{x}(t),$$

z čoho vyplýva aj spojitosť derivácie $\boldsymbol{x}'(t)$.

(b) V nehomogénnom prípade stačí overiť, že druhý sčítanec

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s$$

výrazu pre $\boldsymbol{x}(t)$ je riešením sústavy. Ako už vieme, prvý sčítanec je totiž riešením homogénnej sústavy. S použitím pravidla pre deriváciu súčinu a Newtonovej-Leibnizovej formuly z tvrdení 22.3.1 resp. 22.3.6 vypočítame

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{F}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \boldsymbol{F}'(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s \,+\, \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(t) \\
&= \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s \,+\, \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{y}(t) \,+\, \boldsymbol{b}(t).
\end{aligned}$$

Vidíme, že i funkcia $\boldsymbol{y}'$ je spojitá a $\boldsymbol{y}$ vyhovuje príslušnej rovnici.

Poznámka. Vzorec pre riešenie nehomogénnej sústavy sa odvodzuje tzv. *Lagrangeovou metódou variácie konštánt* tak, že vo vzorci pre riešenie homogénnej sústavy nahradíme konštatný vektor $\boldsymbol{c}$ vektorovou funkciou $\boldsymbol{q}\colon S \to \mathbb{C}^n$. Dosadením riešenia $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{q}(t)$ do nehomogénnej počiatočnej úlohy nakoniec dospejeme k tvaru $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{F}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s$.

Vo všeobecnosti nevieme vyjadriť fundamentálnu maticu sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ rozumným spôsobom pomocou maticovej funkcie $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$. Za istých dodatočných predpokladov si však dokážeme poradiť. Pre $s, t \in S$ označme

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,s) = \exp\left(\int_s^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Ľahko nahliadneme, že $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,t) = \boldsymbol{I}$ pre každé $t \in S$.

Hovoríme, že *maticova funkcia* $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ je *komutujúca*, ak matice $\boldsymbol{A}(s)$, $\boldsymbol{A}(t)$ komutujú pre všetky $s, t \in S$.

22.4.3. Veta. *Nech $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ je spojitá komutujúca maticová funkcia na intervale $S \subseteq \mathbb{R}$. Potom pre ľubovoľné pevné $t_0 \in S$ je*

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, t_0),$$

uvažovaná ako funkcia premennej $t \in S$, fundamentálna matica sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$.

Dôkaz. Určitý integrál $\int_s^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ splýva s limitou integrálnych súčtov

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{A}(s + j d_k) d_k,$$

kde $d_k = (t \Leftrightarrow s)/k$. Keďže všetky uvažované sčítance komutujú s každou maticou $\boldsymbol{A}(u)$, $u \in S$, limitným prechodom dostaneme, že ľubovoľné dve z matíc $\boldsymbol{A}(t)$, $\int_s^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $\int_t^u \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ tiež komutujú. Preto podľa tvrdenia 22.2.2 platí

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(u,t) \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,s) = \exp\left(\int_t^u \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_s^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(u,s).$$

Z toho už vyplýva, že matica $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,s)$ je vždy regulárna s inverznou maticou

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,s)^{-1} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(s,t).$$

Pomocou tvrdení 22.3.3 a 22.3.6 môžeme počítať

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp\left(\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\ &= \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t,t_0) = \boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t).\end{aligned}$$

22.4.4. Dôsledok. *Pre spojitú komutujúcu maticovú funkciu* $\boldsymbol{A}\colon S \to \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí:*

(a) *riešenie homogénnej počiatočnej úlohy* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ *má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, t_0)\cdot \boldsymbol{c}\,;$$

(b) *riešenie nehomogénnej počiatočnej úlohy* $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ *má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, t_0)\cdot \boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, s)\cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s.$$

I v takom špeciálnom prípade sme v riešení sústav lineárnych diferenciálnych rovníc stále iba na pol ceste. Niečo iné je totiž napísať pekné všeobecné vzorce pre ich riešenie (dôsledne vzaté, zaviesť preň len isté vhodné označenie) a niečo iné nájsť riešenia konkrétnych sústav. To si vyžaduje vypočítat maticové funkcie $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, t_0)$ a $\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, s)\cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s$ pre rôzne typy komutujúcich maticových funkcií $\boldsymbol{A}(t)$ a vektorových funkcií $\boldsymbol{b}(t)$. Také niečo však vieme len v určitých prípadoch. Tým najjednoduchším, no veľmi dôležitým, keď $\boldsymbol{A}$ je konštantná funkcia, sa budeme podrobnejšie zaoberať v nasledujúcom paragrafe, čím náš výlet do sveta diferenciálnych rovníc zakončíme.

22.5. Autonómne sústavy

Hovoríme, že *sústava lineárnych diferenciálnych rovníc* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ je *autonómna*, prípadne *sústava s konštantnými koeficientami*, ak $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, t. j. $\boldsymbol{A}$ je konštantná funkcia, a $\boldsymbol{b}\colon S \to \mathbb{C}^n$ je spojitá vektorová funkcia na intervale $S \subseteq \mathbb{R}$.

Keďže konštantná maticová funckia $\boldsymbol{A}$ je automaticky spojitá a komutujúca, fundamentálna matica homogénnej autonómnej sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ je podľa vety 22.4.3 daná formulou

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{A}\tau\,\mathrm{d}\tau\right) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)},$$

pre ľubovoľné pevné $t_0 \in \mathbb{R}$ a premenné $t \in \mathbb{R}$. Špeciálne je fundamentálnou maticou takejto sústavy funkcia

$$\boldsymbol{F}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,.$$

K tomuto záveru možno dôjsť aj priamo na základe dôsledku 22.3.4. Z dôsledku 22.4.4 vyplýva

22.5.1. Veta. *Nech* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}\colon S \to \mathbb{C}^n$ *je spojitá vektorová funkcia na intervale* $S \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in S$ a $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$. *Potom*

(a) *riešenie homogénnej počiatočnej úlohy* $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ *má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\cdot \boldsymbol{c}\,;$$

(b) *riešenie nehomogénnej počiatočnej úlohy* $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ *má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\cdot \boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\cdot \boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s\,;$$

(c) *ak aj* $\boldsymbol{b}$ *je konštantná funkcia, tak riešením nehomogénnej počiatočnej úlohy je*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\cdot \boldsymbol{c} + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\,\mathrm{d}s\right)\cdot \boldsymbol{b}\,.$$

Na dovŕšenie riešenia autonómnej homogénnej úlohy ako aj popisu jej fundamentálnej matice stačí vedieť vypočítať maticu $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$.

Ak $\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big)$ je JKT matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulárna matica, pre ktorú $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$, tak

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}\cdot\operatorname{diag}\Big(\exp\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1)t\big), \dots, \exp\big(\boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)t\big)\Big)\cdot\boldsymbol{P}^{-1}.$$

Úloha sa teda redukuje na výpočet matíc $\exp\boldsymbol{J}_n(\lambda)t$. Pri pevnom $t \in \mathbb{R}$ uvažujme mocninný rad

$$f_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}x^k = \mathrm{e}^{xt}$$

v premennej x. Potom $f_t^{(p)}(x) = t^p\,\mathrm{e}^{xt}$ pre každé $p \in \mathbb{N}$. Dosadením do vzorca z vety 22.1.5 tak dostávame nasledujúce zovšeobecnenie tvrdenia 22.2.5:

22.5.2. Veta. *Nech $n \ge 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Potom pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ (dokonca $t \in \mathbb{C}$) platí*

$$\exp\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)t\big) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{t\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{(n-1)!} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

V prípade komplexných vlastných čísel reálnej matice možno dvojicu Jordanových buniek $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$, $\boldsymbol{J}_n(\overline{\lambda})$ nahradiť zovšeobecnenou Jordanovou bunkou $\boldsymbol{J}_n\Big(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\Big)$, kde $a = \operatorname{Re}\lambda$, $b = \operatorname{Im}\lambda$ (pozri paragraf 20.3). Nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu, umožňuje nahradiť vo fundamentálnej matici komplexné funkcie $\mathrm{e}^{\lambda t}$ reálnymi funkciami $\mathrm{e}^{at}\cos bt$, $\mathrm{e}^{at}\sin bt$.

22.5.3. Veta. *Nech $n \ge 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\exp\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix}t = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos bt & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{at}\sin bt \\ \mathrm{e}^{at}\sin bt & \mathrm{e}^{at}\cos bt \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt},$$

$$\exp\boldsymbol{J}_n\big(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\big)t = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} & \frac{t}{1!}\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \mathrm{e}^{at}\boldsymbol{R}_{bt} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos bt & \Leftrightarrow\mathrm{e}^{at}\sin bt & \frac{t\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{1!} & \frac{-t\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{(n-1)!} & \frac{-t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{(n-1)!} \\ \mathrm{e}^{at}\sin bt & \mathrm{e}^{at}\cos bt & \frac{t\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{1!} & \frac{t\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{(n-1)!} & \frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{at}\cos bt & \Leftrightarrow\mathrm{e}^{at}\sin bt & \dots & \frac{t^{n-2}\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{(n-2)!} & \frac{-t^{n-2}\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{at}\sin bt & \mathrm{e}^{at}\cos bt & \dots & \frac{t^{n-2}\,\mathrm{e}^{at}\sin bt}{(n-2)!} & \frac{t^{n-2}\,\mathrm{e}^{at}\cos bt}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{at}\cos bt & \Leftrightarrow\mathrm{e}^{at}\sin bt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{at}\sin bt & \mathrm{e}^{at}\cos bt \end{pmatrix}$$

Na riešenie nehomogénnej autonómnej úlohy s konštantným členom $\boldsymbol{b}$ treba ešte vedieť vypočítať integrál $\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^{t-t_0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\,\mathrm{d}s$. Stačí sa teda obmedziť na integrály tvaru $\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\,\mathrm{d}s$. A znovu stará známa pesnička: ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$, kde $\boldsymbol{P}$ je regulárna matica a $\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1),\dots,\boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda)\big)$ je JKT matice $\boldsymbol{A}$, tak

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{P}\cdot\operatorname{diag}\Big(\textstyle\int_0^t \exp\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1)s\big)\mathrm{d}s,\dots,\int_0^t \exp\big(\boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)s\big)\mathrm{d}s\Big)\cdot\boldsymbol{P}^{-1},$$

takže opäť stačí poznať príslušné integrály pre Jordanove bunky.

22.5.4. Veta. *Nech $n \geq 1$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Potom pre ľubovoľné $t \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_0^t \exp\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)s\big)\,\mathrm{d}s =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda} & \frac{t\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda\,1!} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^2} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j t^{n-1-j}\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}(n-1-j)!} \\ 0 & \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda} & \dots & \sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^j t^{n-2-j}\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}(n-2-j)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \Leftrightarrow\frac{1}{\lambda^2} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^n} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{\lambda^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix};$$

pre $\lambda = 0$ máme

$$\int_0^t \exp\big(\boldsymbol{J}_n(0)s\big)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}.$$

Náčrt dôkazu. Oba vzorce dostaneme priamo z vety 22.5.2 integrovaním jednotlivých členov matice $\exp\big(\boldsymbol{J}_n(\lambda)s\big)$. Pre $\lambda \neq 0$, $0 \leq p \leq n \Leftrightarrow 1$, pri výpočte integrálu

$$\int_0^t \frac{s^p\,\mathrm{e}^{\lambda s}}{p!}\,\mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{p} \frac{(\Leftrightarrow 1)^j t^{p-j}\,\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{j+1}(p \Leftrightarrow j)!} \Leftrightarrow \frac{(\Leftrightarrow 1)^p}{\lambda^{p+1}}$$

použijeme p-krát za sebou metódu *per partes.*

Ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna, môžeme sa uvedeným vzorcom vyhnúť. Ľahko totiž nahliadneme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\big) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}$, teda podľa tvrdenia 22.3.6

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s}\,\mathrm{d}s = \big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}\big)\cdot\boldsymbol{A}^{-1}.$$

To znamená, že výpočet hľadaného integrálu možno priamo previesť na výpočet exponenciály $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ podľa vety 22.5.2 a úvahy, ktorá ju predchádza. Z časti (c) vety 22.5.1 teraz vyplýva

22.5.5. Dôsledok. *Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je regulárna matica, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$. Potom riešenie nehomogénnej autonómnej počiatočnej úlohy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{c}$ má tvar*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\cdot\boldsymbol{c} + \left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}\right)\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}.$$

V poznámke (b) za vetou 22.4.1 sme sa stručne zmienili o možnosti previesť (jednorozmernú) lineárnu diferenciálnu rovnicu n-tého rádu na vektorovú diferenciálnu rovnicu. V špeciálnom prípade homogénnej rovnice s konštantnými koeficientami a_i dostaneme homogénnu autonómnu sústavu

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{M}_g^T\cdot\boldsymbol{x},$$

kde $g(x) = x^n \Leftrightarrow a_1x^{n-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_{n-1}x \Leftrightarrow a_n$. Niekedy môže byť naopak užitočné „znížiť počet rovníc a neznámych funkcií“, presnejšie, pre $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ upraviť sústavu $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ na jednorozmernú lineárnu diferenciálnu rovnicu n-tého rádu. Rôzne ekvivalentné podoby podmienky, za ktorej je také niečo možné, sú sformulované v tvrdení 21.3.1. My si vyberieme len jednu z nich.

22.5.6. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ak $f(x) = x^n \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_jx^{n-j} \in \mathbb{C}[x]$ je normovaný polynóm taký, že $\boldsymbol{A}^T \approx \boldsymbol{M}_f$, tak autonómnu homogénnu sústavu $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ možno vhodnou substitúciou upraviť na homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu n-tého rádu*

$$y^{(n)} \Leftrightarrow c_1y^{(n-1)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow c_{n-1}y' \Leftrightarrow c_ny = 0.$$

Dôkaz. Za uvedených predpokladov platí $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{M}_f^T$, preto existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taká, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{M}_f^T\cdot\boldsymbol{P}^{-1}$. Položme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{x}$. Potom $\boldsymbol{x}$ vyhovuje sústave $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{y}$ vyhovuje sústave $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{M}_f^T\cdot\boldsymbol{y}$, t. j.

$$y_1' = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n, \qquad y_2' = y_1, \quad \ldots, \quad y_n' = y_{n-1}.$$

Teda pre $y = y_n$, $1 \le j \le n$, platí $y_j = y^{(n-j)}$ a $y^{(n)} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_jy^{(n-j)} = 0$.

22.5.7. Dôsledok. *Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ak $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ sú normované polynómy také, že $f_i(x) = x^{n_i} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}x^{n_i-j}$ a $\boldsymbol{A}^T \approx \operatorname{diag}(\boldsymbol{M}_{f_1}, \ldots, \boldsymbol{M}_{f_k})$, tak autonómnu homogénnu sústavu $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ n lineárnych diferenciálnych rovníc pre n neznámych funkcií $x_1, \ldots, x_n$ možno vhodnou substitúciou upraviť na sústavu k homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc*

$$\begin{aligned} y_1^{(n_1)} \Leftrightarrow c_{11}y_1^{(n_1-1)} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow c_{1\,n_1-1}y_1' \Leftrightarrow c_{1\,n_1}y_1 &= 0,\\ &\vdots\\ y_k^{(n_k)} \Leftrightarrow c_{k1}y_k^{(n_k-1)} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow c_{k\,n_k-1}y_k' \Leftrightarrow c_{k\,n_k}y_k &= 0, \end{aligned}$$

rádov $n_1, \ldots, n_k$ pre k neznámych funkcií $y_1, \ldots, y_k$.

Doplnenie konkrétneho tvaru takejto substitúcie už prenechávame na rozmyslenie čitateľovi. Ešte poznamenajme, že pokiaľ chceme dosiahnuť čo najvýraznejšie zníženie počtu rovníc a neznámych funkcií, najvhodnejším kandidátom na polynómy $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ je sústava invariantných faktorov matice $\boldsymbol{A}^T$ (pozri paragraf 21.4, úsek medzi vetami 21.4.4, 21.4.5). Potom matica $\operatorname{diag}(\boldsymbol{M}_{f_1}, \ldots, \boldsymbol{M}_{f_k})$ je racionálny kanonický tvar matice $\boldsymbol{A}^T$.

*22.6. Komutátor

V predchádzajúcej i celej tejto kapitole sme mohli vidieť, akú významnú úlohu hrá pri štúdiu maticových funkcií vzťah komutovania. V tomto záverečnom paragrafe zavedieme pojem komutátora matíc. Pomocou neho, po sérii aplikácii lineárnej algebry v teórii diferenciálnych rovníc, pre zmenu predvedieme jednu aplikáciu vety 22.4.1 o jednoznačnosti riešenia sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc v lineárnej algebre.

Podľa tvrdenia 22.2.2 pre *komutujúce* matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$. Pre nekomutujúce matice to však nie je pravda. *Komutátorom matíc* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{n \times n}$ (nad ľubovoľným poľom K) nazývame maticu

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}.$$

Zrejme $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ komutujú práve vtedy, keď $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{0}$.

Priamym výpočtom možno overiť, že komutátor je antisymetrické bilineárne zobrazenie $K^{n \times n} \times K^{n \times n} \to K^{n \times n}$, ktoré sa pri fixovaní jednej premennej správa voči súčinu matíc v druhej premennej podobne ako derivácia.

22.6.1. Tvrdenie. *Nech K je pole a $n \in \mathbb{N}$. Potom pre ľubovoľné $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in K^{n \times n}$, $a, b \in K$ platí*

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] &= \Leftrightarrow [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}], \\ [a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] &= a[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}] \,+\, b[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}], \\ [\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] &= [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}] \cdot \boldsymbol{B} \,+\, \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]. \end{aligned}$$

22.6.2. Dôsledok. *Nech $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{n \times n}$, $f(x) \in K[x]$. Ak matice $\boldsymbol{A}$, $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ komutujú, tak*

$$[f(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{B}] = f'(\boldsymbol{A}) \cdot [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \cdot f'(\boldsymbol{A}).$$

V prípade $K = \mathbb{C}$ platí uvedený vzťah nielen pre polynómy ale aj pre potenčné rady $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ a matice $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Dom}_n f$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Dôkaz. S použitím poslednej rovnosti z tvrdenia 22.6.1 možno za uvedeného predpokladu indukciou cez $k \in \mathbb{N}$ jednoducho dokázať

$$[\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{B}] = k\boldsymbol{A}^{k-1} \cdot [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}].$$

Potrebný záver pre polynómy vyplýva z linearity zobrazenia $\boldsymbol{A} \mapsto [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$; na rady sa prenesie limitným prechodom.

I v prípade, že $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nekomutujú, za predpokladu, že komutujú aspoň so svojím komutátorom, možno vzorec pre exponenciálu súčtu modifikovať do nasledujúcej podoby.

22.6.3. Veta. *Nech matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ komutujú so svojim komutátorom, t. j.*

$$[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]] = [[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}], \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{0}.$$

Potom

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \exp \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}].$$

Dôkaz. Uvažujme ešte raz mocninný rad $f_t(x) = \sum \frac{t^k}{k!} x^k = \mathrm{e}^{xt} \in \mathbb{C}[[x]]$ pri pevnom $t \in \mathbb{R}$. Potom $f_t'(x) = t\,\mathrm{e}^{xt}$. Ak $\boldsymbol{A}$ a $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ komutujú, tak podľa dôsledku 22.6.2 platí

$$\left[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}, \boldsymbol{B}\right] = [f_t(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{B}] = f_t'(\boldsymbol{A}) \cdot [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = t\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}],$$

t. j.

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t\big) \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}.$$

Uvažujme teraz spojité maticové funkcie

$$\boldsymbol{Y}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}, \qquad \boldsymbol{Z}(t) = \exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})t \cdot \exp \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t^2,$$

pre $t \in \mathbb{R}$. Zrejme $\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{I}_n$. Pozrime sa bližšie na ich derivácie. S využitím tvrdení 22.3.1, 22.3.3 a komutačného vzťahu pre $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ a $\boldsymbol{B}$ dostávame

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}'(t) &= \big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\big)' \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\big)' = \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} + \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} \\ &= \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} + \big(\boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t\big) \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} = \big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t\big) \cdot \boldsymbol{Y}(t).\end{aligned}$$

Ak si uvedomíme, že za daných predpokladov komutujú $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$, teda aj $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})t$ a $\frac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t^2$, resp. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})t + \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t^2$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})t + \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t^2\big) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t$, s použitím tvrdení 22.2.2, 22.3.3 nám postupne vyjde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(t) &= \exp\big((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})t + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t^2\big), \\ \boldsymbol{Z}'(t) &= \big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t\big) \cdot \boldsymbol{Z}(t).\end{aligned}$$

Vidíme, že $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ vyhovujú rovnakej počiatočnej úlohe $\boldsymbol{X}' = \big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]t\big) \cdot \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{I}$. Z jednoznačnosti riešenia takejto úlohy (pozri poznámku (a) za vetou 22.4.1) vyplýva, že $\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{Z}(t)$ pre každé $t \in \mathbb{R}$. Voľbou $t = 1$ dostávame požadovanú rovnosť.

Nekonečnorozmerný analóg práve dokázaného vzťahu hrá významnú úlohu v kvantovej mechanike. Pre isté lineárne operátory $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, reprezentujúce napr. fyzikálne veličiny polohy a hybnosti, je totiž $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{I}$, teda rýdzo imaginárny násobok identického operátora. Keďže skalárne násobky identity komutujú s každým operátorom, máme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \exp\big(\tfrac{\mathrm{i}\hbar}{2}\boldsymbol{I}\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hbar/2} \exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}).$$

To znamená, že lineárne operátory $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ a $\exp(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ sa líšia len násobkom komplexnej jednotky $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hbar/2} = \cos(\hbar/2) + \mathrm{i}\sin(\hbar/2)$, t. j. fázovým posunom o „uhol“ $\hbar/2$, kde $\hbar = h/2\pi \approx 1{,}054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ je (modifikovaná) Planckova konštanta.