

Příklady k procvičení

Cvičení 1

Vypočítejte určité integrály pomocí základních vzorců

$$1. \int_1^3 x^2 dx,$$

$$2. \int_2^6 \frac{1}{x} dx,$$

$$3. \int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx,$$

$$4. \int_{-3}^2 (3x^2 - x + 1) dx,$$

$$5. \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx,$$

$$6. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx,$$

$$7. \int_1^2 \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 dx,$$

$$8. \int_{-1}^3 (x^2 + 6x - 2) dx,$$

$$9. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx,$$

$$10. \int_1^9 \frac{3x + 2}{x} dx,$$

$$11. \int_0^1 (3^x + 5^x)^2 dx,$$

$$12. \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx,$$

13.
$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx,$$

14.
$$\int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx,$$

15.
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2^x} dx,$$

16.
$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x} dx,$$

17.
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin^3 x}\right) dx,$$

18.
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx,$$

19.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx,$$

20.
$$\int_1^{16} \sqrt{\sqrt{x}} dx.$$

Cvičení 2

Vypočtěte určité integrály substituční metodou

1.
$$\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx,$$

2.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot \sin^3 x dx,$$

3.
$$\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} dx,$$

4.
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx,$$

$$5. \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx,$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx,$$

$$7. \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx,$$

$$8. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx,$$

$$9. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx,$$

$$10. \int_0^1 x \cdot (2x^2 - 1)^{10} dx,$$

$$11. \int_0^1 x^2 \cdot \sin(1 - x^3) dx,$$

$$12. \int_0^{\pi} e^{\cos x} \cdot \sin x dx,$$

$$13. \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} dx,$$

$$14. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx,$$

$$15. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx,$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx,$$

$$17. \int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx,$$

$$18. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx,$$

$$19. \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx,$$

$$20. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx.$$

Cvičení 3

Vypočtete určité integrály metodou per partes

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x dx,$$

$$2. \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx,$$

$$3. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x dx,$$

$$4. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx,$$

$$5. \int_0^1 x^3 \cdot e^{2x} dx,$$

$$6. \int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} dx,$$

$$7. \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x dx,$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx,$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \sin x dx,$$

10.
$$\int_0^1 x \cdot e^{3x} dx,$$

11.
$$\int_1^2 x \cdot \ln(1 + x^2) dx,$$

12.
$$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x dx,$$

13.
$$\int_1^2 (3x + 2) \cdot \ln x dx,$$

14.
$$\int_1^e x^3 \cdot \ln x dx,$$

15.
$$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos x dx,$$

16.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx,$$

17.
$$\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x} dx,$$

18.
$$\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \ln x dx,$$

19.
$$\int_{-1}^1 2x \cdot e^{x+1} dx,$$

20.
$$\int_0^1 x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx.$$

Cvičení 4

Vypočtěte určité integrály

1.
$$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx,$$

$$2. \int_1^{e^2} \frac{2 + \ln x}{x} dx,$$

$$3. \int_0^1 x \cdot 2^x dx,$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx,$$

$$5. \int_4^{10} \frac{x}{x^2 - 9} dx,$$

$$6. \int_3^4 \frac{4x - 4}{x^2 - 4} dx,$$

$$7. \int_{-2}^5 e^{3x} dx,$$

$$8. \int_0^2 \frac{1}{3x + 2} dx,$$

$$9. \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{2x + 5}} dx,$$

$$10. \int_1^e \ln x dx,$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \cos x dx,$$

$$12. \int_0^1 \frac{2x + 3}{x + 1} dx,$$

$$13. \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx,$$

$$14. \int_1^2 \frac{x}{x^2 - x - 6} dx,$$

15.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx,$$

16.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx,$$

17.
$$\int_0^1 (2 - x)^4 dx,$$

18.
$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x^3 - x^2} dx,$$

19.
$$\int_1^2 \frac{2}{(3 - x)^2} dx,$$

20.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \ln(1 - x^2) dx.$$

Cvičení 5

Vypočtěte plochu ohraničenou grafem dané funkce a osou x

1. $y = x^2 - 5x + 6,$

2. $y = \sqrt{1 - x^2},$

3. $y = x^2 - 4,$

4. $y = 2 + x - x^2,$

5. $y = 1 - x^2.$

Cvičení 6

Vypočtěte plochu ohraničenou grafem dané funkce, osou x a danými přímkami

1. $y = x^2 - 4, \quad x = 0, x = 4,$

2. $y = e^{-2x+1}, \quad x = 0, x = 1,$

3. $y = \ln \frac{x}{2}, \quad x = \frac{1}{2}, x = 4,$

4. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, x = 9,$

5. $y = \frac{1}{x^2+4}, \quad x = -2, x = 2,$

6. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,$

7. $y = \ln x, \quad x = e^2,$

8. $y = 3^x, \quad x = 0, x = 1,$

9. $y = \cotg x, \quad x = \frac{\pi}{4},$

10. $y = e^x, \quad x = 1, x = 3.$

Cvičení 7

Vypočtete plochu ohraničenou danými funkcemi

1. $y = x^2 + 3,$
 $y = 2x^2 - 1,$

2. $y = 3 - x^2,$
 $y = 1 + x^2,$

3. $y = x^2 + x,$
 $y = 2x^2 - 6,$

4. $y = x^2,$
 $y = \sqrt{x},$

5. $y = 4 - x,$
 $y = \frac{3}{x},$

6. $y = x^2,$
 $y = \frac{2}{1+x^2},$

7. $y = \cos x,$
 $y = \frac{1}{2},$
 $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle,$

8. $y = x^2,$
 $y = 3 - 2x,$

9. $y = x,$
 $y = \sqrt[3]{x},$

10. $y = \sin x,$
 $y = \cos x$
 $x = 0.$

Cvičení 8Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného danou funkcí v daném intervalu kolem osy x

1. $y = \frac{1}{x}, \text{ v } \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle,$

2. $y = \ln x, \text{ v } \langle 1, 2 \rangle,$

3. $y = \operatorname{tg} x, \text{ v } \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle,$

4. $y = \sin x, \text{ v } \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$

5. $y = x^3, \text{ v } \langle 0, 2 \rangle.$

Cvičení 9

Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného danou funkcí v daném intervalu kolem osy x

1. $y = x^2 + 2,$
 $y = 2x^2 + 1,$

2. $y = x^2,$
 $y^2 = x,$

3. $y = e^x,$
 $y = e^{-x},$
 $x = \ln 2,$

4. $y = x^2 + 2,$
 $y = 1 - x^2,$
 $x \in \langle -1, 1 \rangle,$

5. $y = x^2,$
 $y = 3 - 2x.$

Výsledky 1

1. $\frac{26}{3}$,
2. $\ln 3$,
3. 2 ,
4. $-\frac{665}{12}$,
5. $\frac{3}{7}$,
6. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$,
7. $\frac{1}{3}$,
8. $\frac{76}{3}$,
9. $2 - \frac{\pi}{4}$,
10. $24 + 4 \ln 3$,
11. $\frac{12}{\ln 5} + \frac{28}{\ln 15} + \frac{4}{\ln 3}$,
12. $\frac{\pi}{8}$,
13. 10 ,
14. $e - \frac{1}{e}$,
15. $\frac{1}{\ln 2}$,
16. $7 + \ln 4$,
17. $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$,
18. $-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$,
19. $1 - \frac{\pi}{4}$,
20. $\frac{124}{5}$.

Výsledky 2

1. $2\sqrt{2} - 2 \ln(1 + \sqrt{2})$,
2. $\frac{1}{16}$,
3. 0 ,
4. 1 ,
5. $2\sqrt{1 + \ln 3} - 2$,
6. $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$,

7. $4 - \operatorname{arctg} 2$,
8. $\frac{1}{2}$,
9. $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$,
10. $\frac{1}{22}$,
11. $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$,
12. $e - \frac{1}{e}$,
13. $\frac{\pi}{2} + 1$,
14. $4 - \pi$,
15. $\frac{3}{2}$,
16. $\ln 2$,
17. 4 ,
18. $\frac{8}{3}$,
19. $\ln 2$,
20. 0 .

Výsledky 3

1. $\frac{1}{2}$,
2. $3 \ln 3 - 2$,
3. $\frac{\sqrt{3}}{12} \pi + \frac{1}{2}$,
4. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$,
5. $\frac{e^2+3}{8}$,
6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$,
7. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$,
8. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$,
9. $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}$,
10. $\frac{2}{9} e^3$,
11. $\frac{5}{2} \ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2}$,
12. $\pi^2 - 4$,
13. $10 \ln 2 - \frac{17}{4}$,

14. $\frac{3e^4+1}{16}$,
15. -2π ,
16. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$,
17. $e - \frac{5}{e}$,
18. $\frac{16}{3} \ln 4 - \frac{28}{9}$,
19. 4,
20. $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2$.

Výsledky 4

1. $e - 2$,
2. 6,
3. $\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$,
4. $2\sqrt{2} - 2$,
5. $\ln \sqrt{13}$,
6. $\ln 2 + 3 \ln 6 - 3 \ln 5$,
7. $\frac{e^{15}}{3} - \frac{1}{3e^6}$,
8. $\frac{1}{3} \ln 4$,
9. 2,
10. 1,
11. $\frac{1}{5}e^\pi - \frac{2}{5}$,
12. $2 + \ln 2$,
13. 2,
14. $\frac{1}{5} \ln \frac{2}{9}$,
15. $\frac{1}{2}$,
16. 1,
17. $\frac{31}{5}$,
18. $-\frac{1}{4} + \ln \frac{6}{5}$,
19. 1,
20. $-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \ln \frac{3}{4}$.

Výsledky 5

1. $\frac{1}{6}$,

2. $\frac{\pi}{2}$,

3. $\frac{32}{3}$,

4. $\frac{9}{2}$,

5. $\frac{4}{3}$.

Výsledky 6

1. 16,

2. $\frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$,

3. $3 \ln 2 - \frac{1}{2}$,

4. $\frac{52}{3}$,

5. $\frac{\pi}{4}$,

6. 12,

7. $e^2 + 1$,

8. $\frac{2}{\ln 3}$,

9. $\frac{1}{2} \ln 2$,

10. $e(e^2 - 1)$.

Výsledky 7

1. $\frac{32}{3}$,

2. $\frac{8}{3}$,

3. $\frac{125}{6}$,

4. $\frac{1}{3}$,

5. $4 - \ln 27$,

6. $\pi - \frac{2}{3}$,

7. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$,

8. $\frac{32}{3}$,

9. $\frac{1}{4}$,

10. $\sqrt{2} - 1$.

Výsledky 8

1. $\frac{3}{2}\pi$,

2. $(2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2)\pi$,

3. $(1 - \frac{\pi}{4})\pi$,

4. $\frac{\pi^2}{4}$,

5. $\frac{128}{7}\pi$.

Výsledky 9

1. $\frac{24}{5}\pi$,

2. $\frac{3}{10}\pi$,

3. $\frac{9}{8}\pi$,

4. 10π ,

5. $\frac{1088}{15}\pi$.