

Matematické modelovanie dynamiky populácií

Model kravec a korist'

Michaela Vojtová

Katedra aplikovanej matematiky

Prírodovedecká fakulta

Masarykova univerzita

Obsah

- Modely rastu populácií živých organizmov
- Modely koexistencie dvoch druhov
- Volterrov-Lotkov model
- Realistickejšie modely
- Logistická rovnica

Modely rastu populácií živých organizmov

Model:

- Dynamický so spojitým časom
- Deterministický
- Populácia je homogénna zmes (neuvaž. pohlavie, vek ani priestorové rozloženie)

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta x) = x(t) + \textit{narodení} - \textit{mrtví}$$

a koeficient pôrodnosti

d koeficient úmrtnosti

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + ax(t)\Delta t - dx(t)\Delta t = x(t) + (a - d)x(t)\Delta t$$

$g = a - d$ rastový koeficient

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + gx(t)\Delta t$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = gx(t)$$

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x' = gx$$

Modely rastu populácií živých organizmov

Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

Vývoj v čase:

$$x' = gx$$

$$x(0) = x_0$$

Modely rastu populácií živých organizmov

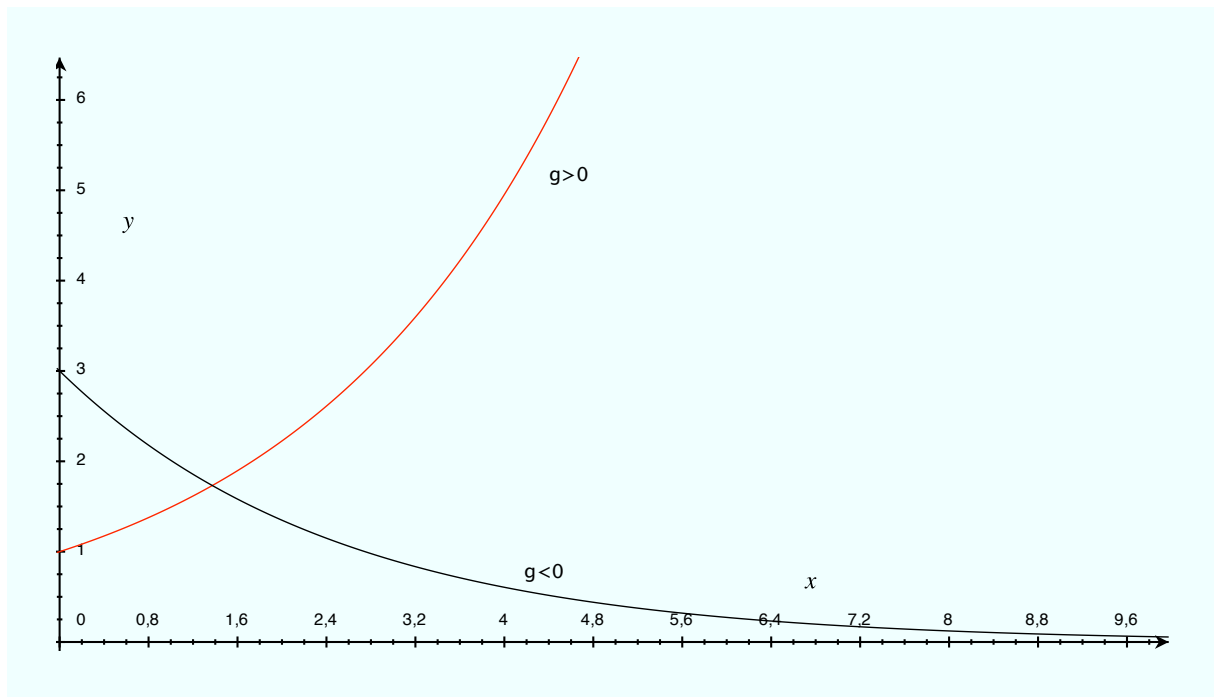
Jediná stavová premenná - veľkosť populácie $x = x(t)$

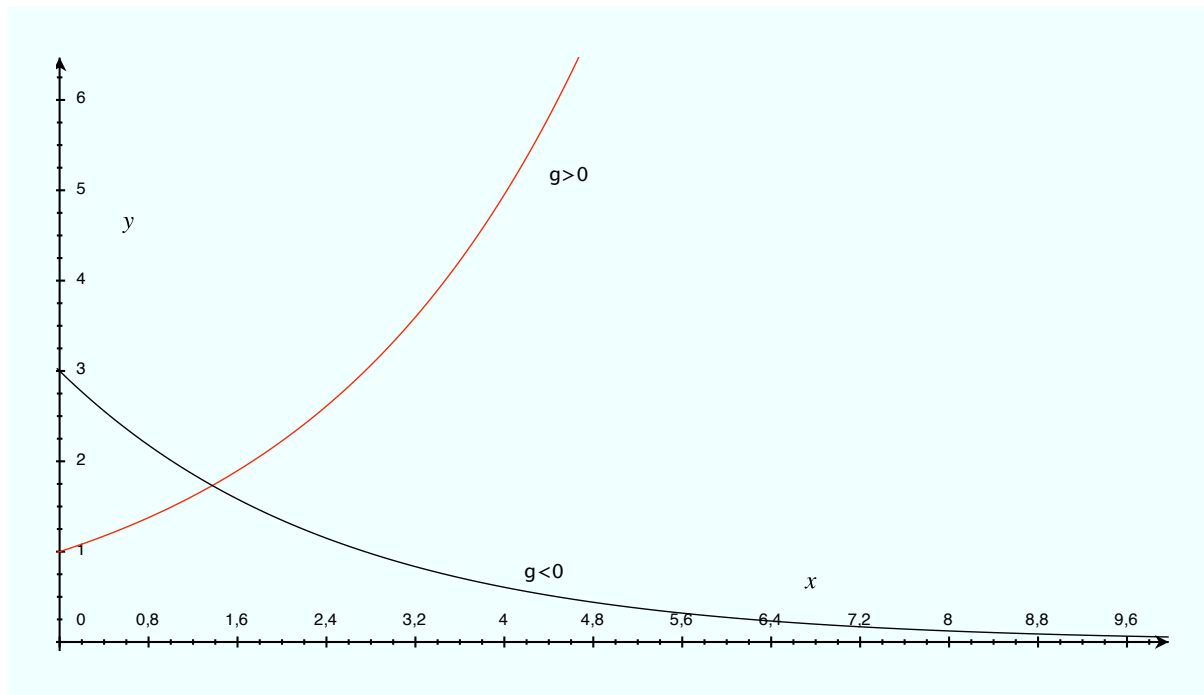
Vývoj v čase:

$$x' = gx$$

$$x(0) = x_0$$

Riešenie počiatočnej úlohy : $x(t) = x_0 e^{gt}$





Malthusov model - najstarší model z r. 1798. Predpokladá, že sa populácia rozvíja na neobmedzenom teritóriu, má k dispozícii neobmedzené zdroje výživy. Dáva na krátkom časovom intervale a pre menšie populácie dobrú zhodu so štatist. údajmi. Exponenciálny rast je možný len v určitom obmedzenom intervale pokiaľ sa ešte výrazne neprejavujú limitné faktory (napr. zdroje potravy)

Organizmy medzi sebou súperia, dochádza ku vnútrodruhovej konkurencii, ktorá zvyšuje úmrtnosť alebo znižuje pôrodnosť a je tým väčšia čím je súperiacich jedincov viac. Preto predpokladáme, že rastový koeficient (pôrodnosť – úmrtnosť) je klesajúcou funkciou veľkosti populácie :

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad g(x) = r - bx$$

r koefic. rastu (ako v idealizovanom prostredí $g = a - d$)

b koefic. spomalenia rastu (vyjadruje silu konkurencie)

$K = \frac{r}{b}$ kapacita (úživnosť) prostredia

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad g(x) = r - bx$$

r koefic. rastu (ako v idealizovanom prostredí $g = a - d$)

b koefic. spomalenia rastu (vyjadruje silu konkurencie)

$K = \frac{r}{b}$ kapacita (úživnosť) prostredia

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad g(x) = r - bx$$

r koefic. rastu (ako v idealizovanom prostredí $g = a - d$)

b koefic. spomalenia rastu (vyjadruje silu konkurencie)

$K = \frac{r}{b}$ kapacita (úživnosť) prostredia

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

Verhulstov model - ako Malthus predpokladá úmernosť prírastku populácie na jej okamžitej veľkosti, ale nepredpokladá konštantnosť koefic. rastu. Podľa neho tento koefic. závisí na veľkosti populácie (u malej sa vnútrodruhová konkurencia takmer neprejavuje; s rastom konkurencie klesá $g(x)$; ak prekročí kritickú hodnotu K , bude $g(x)$ záporné)

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad g(x) = r - bx$$

r koefic. rastu (ako v idealizovanom prostredí $g = a - d$)

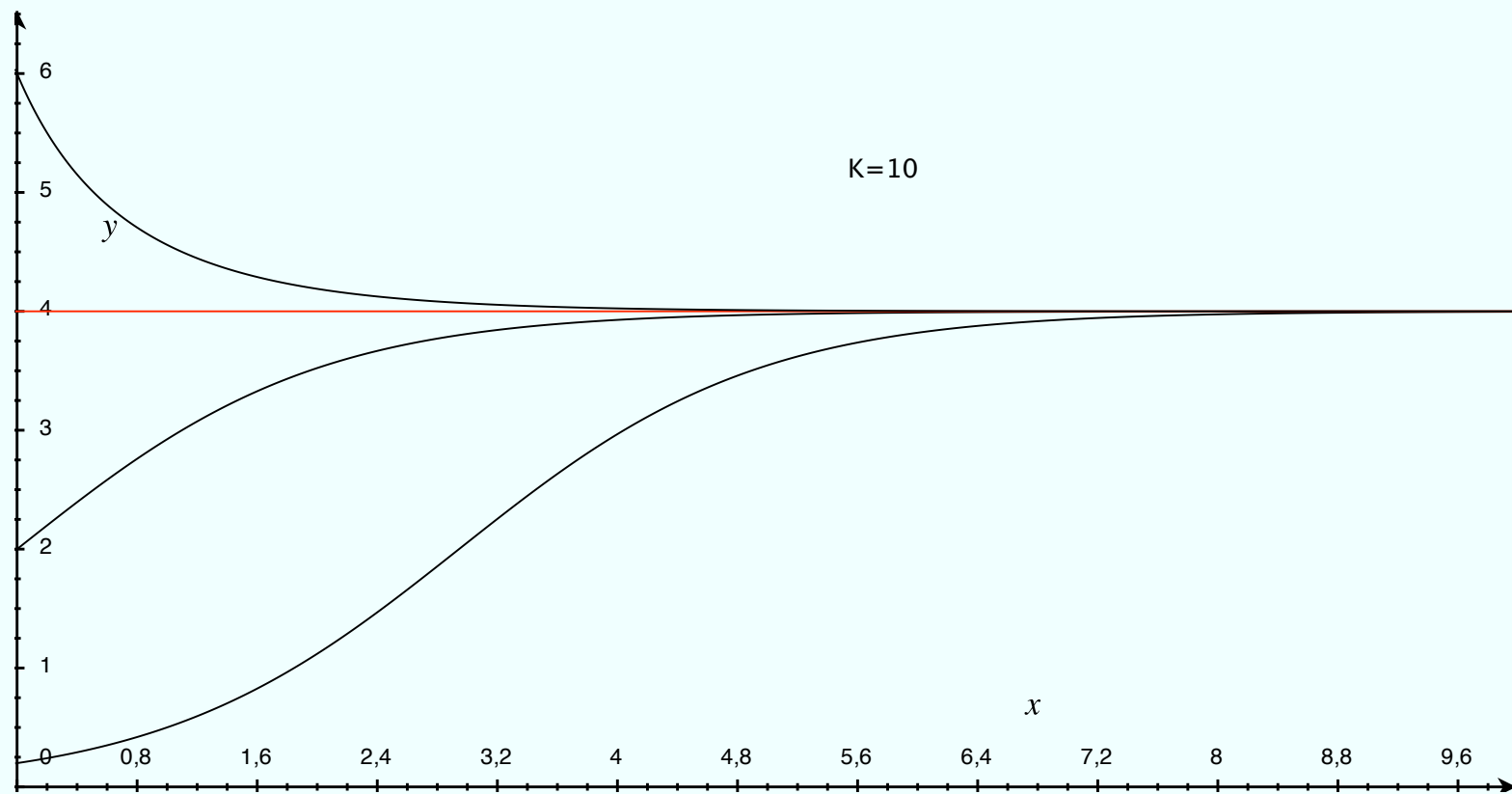
b koefic. spomalenia rastu (vyjadruje silu konkurencie)

$K = \frac{r}{b}$ kapacita (úživnosť) prostredia

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

Riešenie: $x(t) = x_0 \frac{K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$ logistická krivka



Modely koexistencie dvoch druhov

Populácie $N_1(t)$, $N_2(t)$

Pokiaľ populácie vzájomne neovplyvňujú zmeny svojich veľkostí a predpokladáme vnútrodruhovou konkurenciu, tak vývoj populácií možno modelovať pomocou Verhulstovho modelu $x' = (r - bx)x$ rovnicami:

Modely koexistencie dvoch druhov

Populácie $N_1(t)$, $N_2(t)$

$$N_1' = (r_1 - b_1 N_1) N_1$$

$$N_2' = (r_2 - b_2 N_2) N_2$$

Modely koexistencie dvoch druhov

Populácie $N_1(t)$, $N_2(t)$

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 \\ N_2' &= (r_2 - b_2 N_2) N_2\end{aligned}$$

V reálnom prostredí ale bývajú zmeny veľkosti jednej populácie ovplyvnené prítomnosťou druhej a naopak. Predpokladajme, že tento vplyv je úmerný pravdepodobnosti stretnutia jedincov z oboch populácií - úmerná súčinu veľkostí populácií.

Modely koexistencie dvoch druhov

Populácie $N_1(t)$, $N_2(t)$

$$\begin{aligned} N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 & + & \gamma_1 N_1 N_2 \\ N_2' &= (r_2 - b_2 N_2) N_2 & + & \gamma_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

Modely koexistencie dvoch druhov

Populácie $N_1(t)$, $N_2(t)$

$$\begin{aligned} N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 & + & \gamma_1 N_1 N_2 \\ N_2' &= (r_2 - b_2 N_2) N_2 & + & \gamma_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

+	+	mutualizmus
+	0	komensalizmus
+	−	predácia
−	0	amensalizmus
−	−	konkurencia
0	0	neutralizmus

Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

- najjednoduchší popis interakcie
- popísali Lotka (1925) a Voltera (1926) nezávisle na sebe
- označenie:
 - N_1 veľkosť populácie koristi
 - N_2 veľkosť populácie dravca
 - $g_1(x)$ koefic. rastu (stredná rýchlosť rastu) koristi
 - $-g_2(x)$ koefic. rastu (stredná rýchlosť rastu) dravca
- predpoklady :
 - $g_1(x), g_2(x)$ sú lineárne
 - dravec a korisť žijú izolovane od ostatných druhov
 - dravec sa živí len korisťou (izolovaný od koristi vymiera, tj. $g_2 > 0$)
 - korisť má dostatočný zdroj potravy, tj. $g_1 > 0$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist

$$\begin{aligned}N_1' &= g_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\N_2' &= -g_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist

$$\begin{aligned}N_1' &= g_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\N_2' &= -g_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

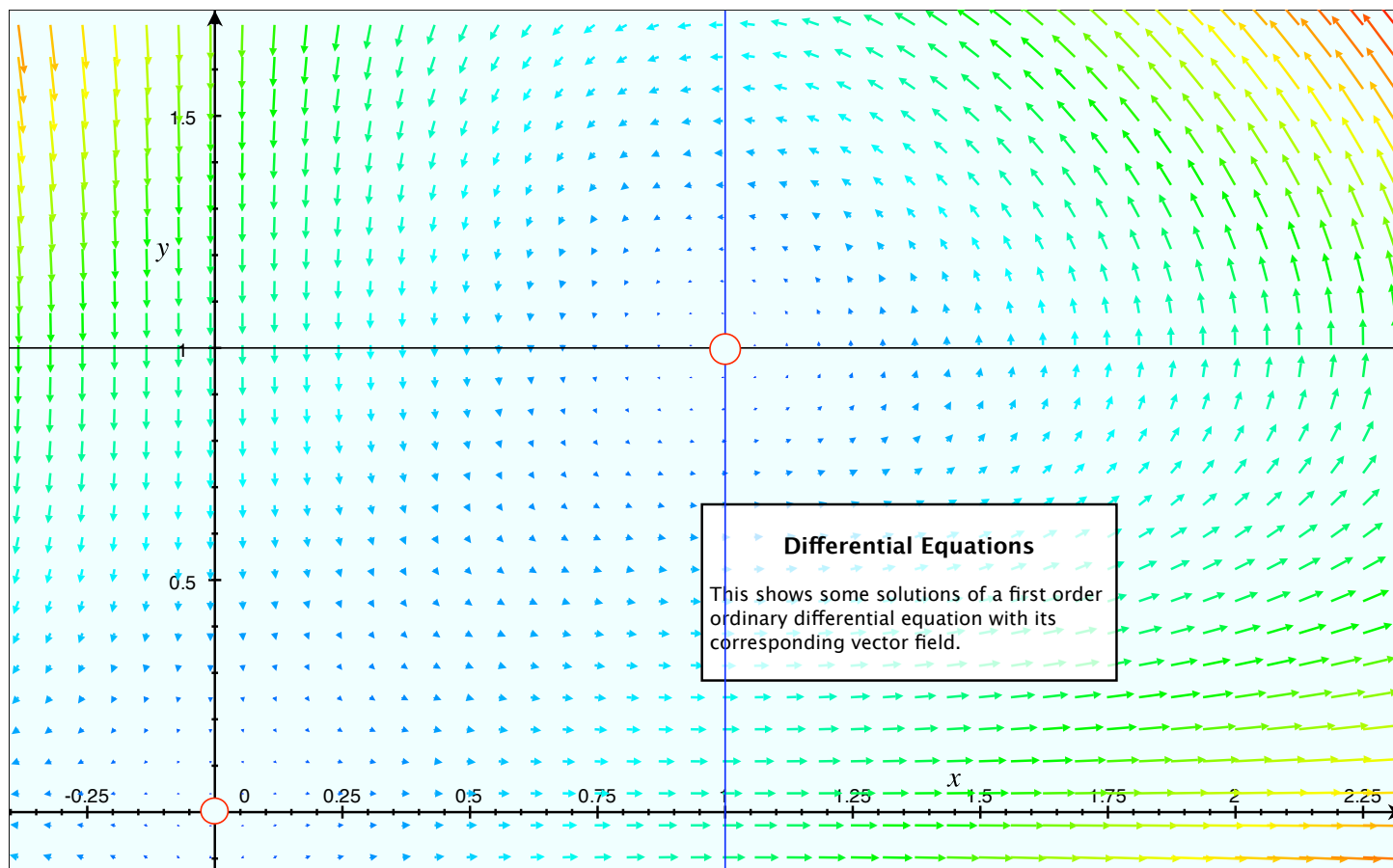
$\gamma_1 N_1 N_2$ úbytok koristi požieraním

$\gamma_2 N_1 N_2$ prírastok dravca

$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ efektívnosť premeny jednotkového množstva koristi na jednotkové množstvo dravca

Volterrov-Lotkov model dravec-korist

$$\begin{aligned}N_1' &= g_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\N_2' &= -g_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$



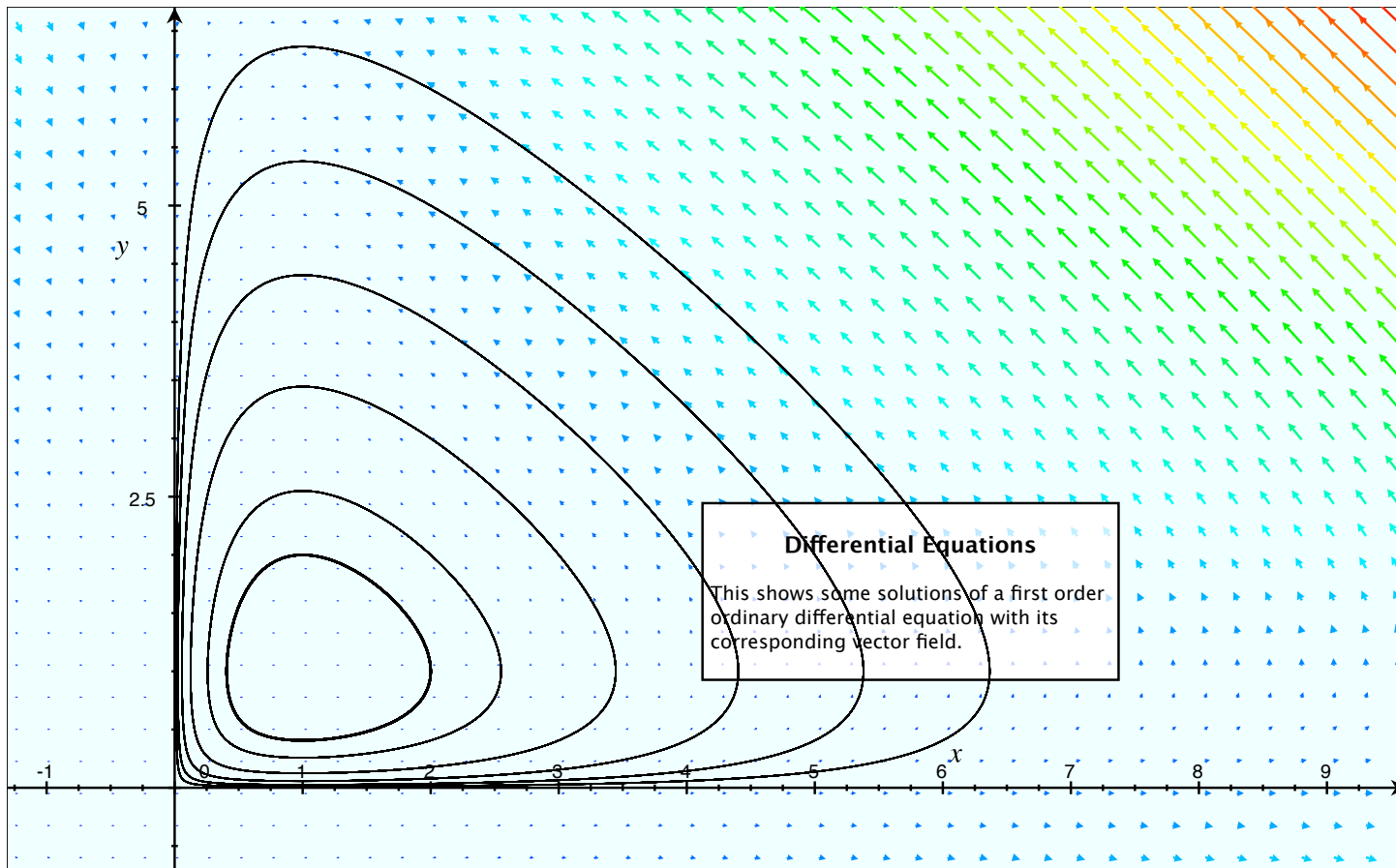
Volterrov-Lotkov model dravec-korist

$$\begin{aligned}N_1' &= g_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\N_2' &= -g_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

trajektórie : $C = \gamma_1 N_2 + \gamma_2 N_1 - g_1 \ln N_2 - g_2 \ln N_1$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist

$$\begin{aligned}N_1' &= g_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \\ N_2' &= -g_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2\end{aligned}$$



Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

Záver:

- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky

Volterrov-Lotkov model dravec-korist

Záver:

- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky
- stavy koristi a dravca sa periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov : N_1 okolo $\frac{g_2}{\gamma_2}$, N_2 okolo $\frac{g_1}{\gamma_1}$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

Záver:

- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky
- stavy koristi a dravca sa periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov : N_1 okolo $\frac{g_2}{\gamma_2}$, N_2 okolo $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza regulácia koristi lovom, tj. znižujeme g_1 , kolísanie koristi sa nezmení zatiaľ čo dravec kolísa okolo menšej hodnoty $\frac{g_1}{\gamma_1}$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

Záver:

- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky
- stavy koristi a dravca sa periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov : N_1 okolo $\frac{g_2}{\gamma_2}$, N_2 okolo $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza regulácia koristi lovom, tj. znižujeme g_1 , kolísanie koristi sa nezmení zatiaľ čo dravec kolísa okolo menšej hodnoty $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza lov dravca, tj. g_2 , tak korisť kolísa okolo vyššej hodnoty $\frac{g_2}{\gamma_2}$

Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

Záver:

- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky
- stavy koristi a dravca sa periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov : N_1 okolo $\frac{g_2}{\gamma_2}$, N_2 okolo $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza regulácia koristi lovom, tj. znižujeme g_1 , kolísanie koristi sa nezmení zatiaľ čo dravec kolísa okolo menšej hodnoty $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza lov dravca, tj. g_2 , tak korisť kolísa okolo vyššej hodnoty $\frac{g_2}{\gamma_2}$
- ak je korisť chránená pred dravcom tak, že sa dravec nehubí, tj. znižujeme γ_1 , γ_2 , tak obe hodnoty rastú

Volterrov-Lotkov model dravec-korist'

Záver:

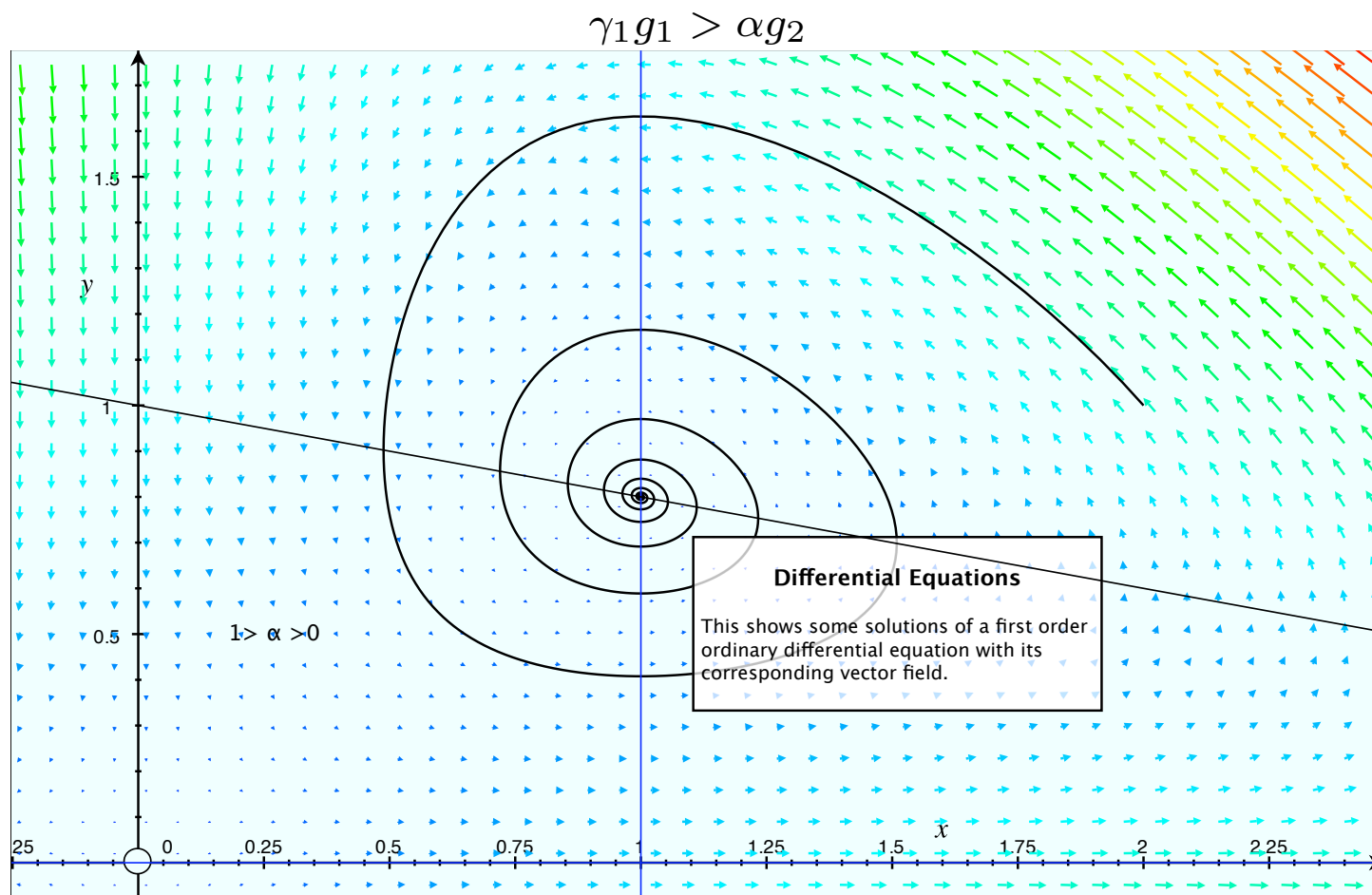
- singulárny bod je stred a všetky trajektórie sú uzavreté krivky
- stavy koristi a dravca sa periodicky opakujú, pričom kolísajú okolo rovnovážnych stavov : N_1 okolo $\frac{g_2}{\gamma_2}$, N_2 okolo $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza regulácia koristi lovom, tj. znižujeme g_1 , kolísanie koristi sa nezmení zatiaľ čo dravec kolísa okolo menšej hodnoty $\frac{g_1}{\gamma_1}$
- ak sa prevádza lov dravca, tj. g_2 , tak korisť kolísa okolo vyššej hodnoty $\frac{g_2}{\gamma_2}$
- ak je korisť chránená pred dravcom tak, že sa dravec nehubí, tj. znižujeme γ_1 , γ_2 , tak obe hodnoty rastú

Simulácia: applet

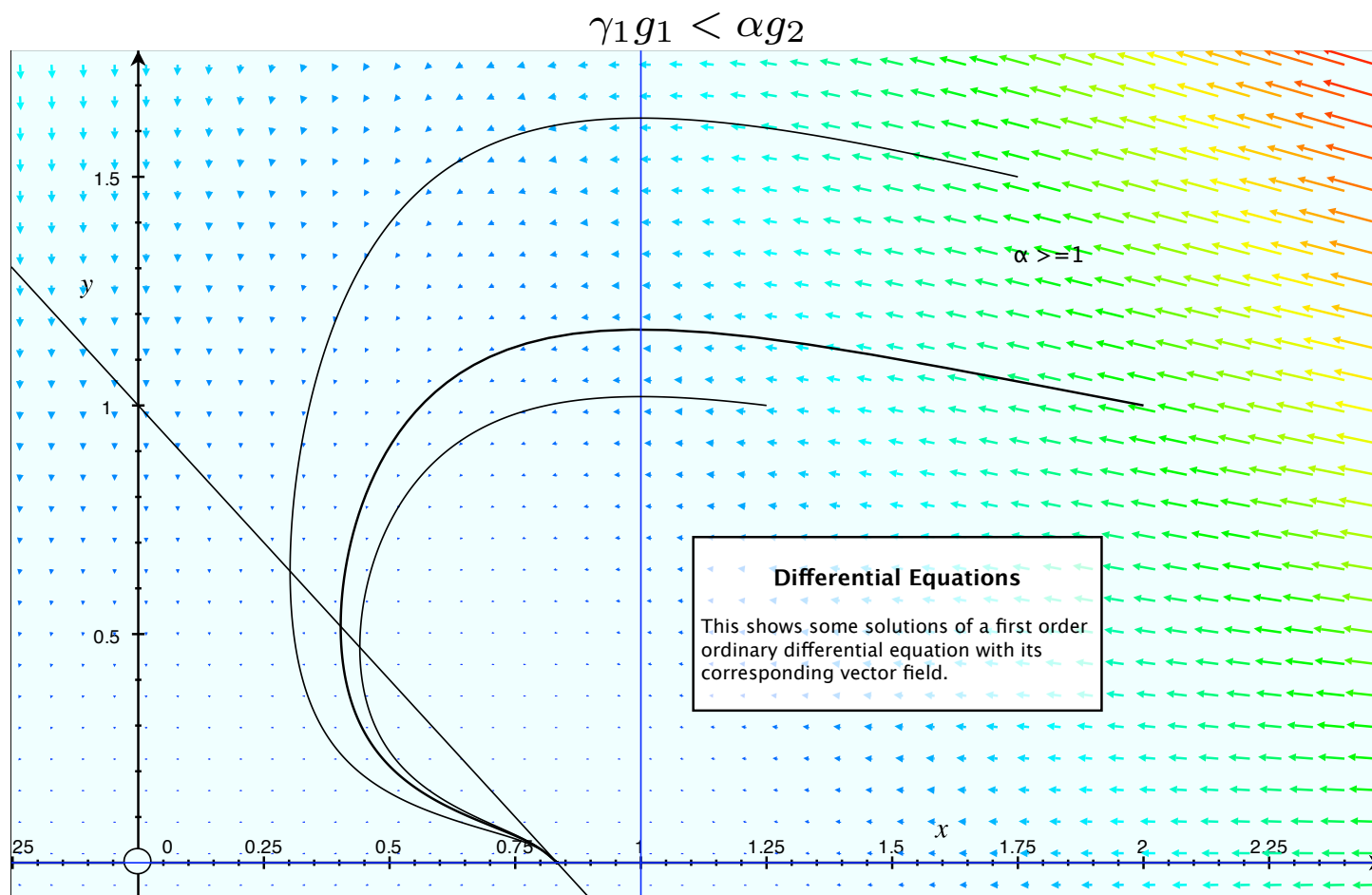
Klasický model dravec-korist' má jeden nerealistický rys: ak by sme odstránili populáciu dravca, tak by korist' neobmedzene rástla. Je preto nutné uvažovať vnútrodruhovú konkurenciu - zavádzame omedzujúci člen pre vývoj koristi:

$$\begin{aligned}N_1' &= (g_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2)N_1 \\N_2' &= (-g_2 + \gamma_2 N_1)N_2\end{aligned}$$

kde α miera vnútrodruhovej konkurencie



čím menej zakolísaní okolo sing. budu, tým väčšia vnútrodruh. konkurencia



ustáli sa na $\frac{g_1}{\alpha}$

Realistickejšie modely

Predchádzajúce modely majú nezanedbateľné nedostatky:

- periodické riešenia môžu mať ľubovoľne veľkú amplitúdu
- pri nepratrnej zmene preskočí na inú trajektóriu a populácia by mohla nepredvídateľne kolísať
- upravený model s vnútrodruhovou konkurenciou nevysvetľuje cyklické kolísanie početnosti populácií

Realistickejšie modely

Predchádzajúce modely majú nezanedbateľné nedostatky:

- periodické riešenia môžu mať ľubovoľne veľkú amplitúdu
- pri nepratrnej zmene preskočí na inú trajektóriu a populácia by mohla nepredvídateľne kolísať
- upravený model s vnútrodruhovou konkurenciou nevysvetľuje cyklické kolísanie početnosti populácií

Gauseho typu, Leslieho typu, model s limitným cyklom

Model Gauseho typu

- prírastok, úbytok koristi je úmerný jej veľkosti
- jeden dravec za jednotku času zabije $V(N_1, N_2)$ jedincov koristi
- korisť je dominantným zdrojom obživy (bez nej vymiera), vymieranie $r_2 > 0$ je konštantné
- pôrodnosť dravca závisí na množstve zkonsumovanej koristi, tj. skonzumovaná korisť sa priamo podieľa na raste populácie dravca
- populácia koristi sa vyvíja podľa Malthusovho modelu ($r_1 - b_1 N_1$)

Model Gauseho typu

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1)N_1 - V N_2 \\N_2' &= (-r_2 + \beta V)N_2\end{aligned}$$

β efektívnosť premeny koristi na populáciu dravca

V trofická fcia (funkcionálna odozva dravca)

Model Gauseho typu

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 - V N_2 \\N_2' &= (-r_2 + \beta V) N_2\end{aligned}$$

β efektívnosť premeny koristi na populáciu dravca

V trofická fcia (funkcionálna odozva dravca)

Klasický model má $V = \gamma_1 N_1$, tá nie je realistická pretože nie je ohraničená a v skutočnosti dravec i pri neobmedzenom množstve koristi zničí len určité množstvo - hladina nasýtenia

Podmienky:

1. $V(0) = 0$ žiadna korisť, žiaden lov
2. $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} V(N_1) = S$
3. V je neklesajúca vzrastie korisť, neulovia jej menej

Model Gauseho typu

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1)N_1 - V N_2 \\N_2' &= (-r_2 + \beta V)N_2\end{aligned}$$

β efektívnosť premeny koristi na populáciu dravca

V trofická fcia (funkcionálna odozva dravca)

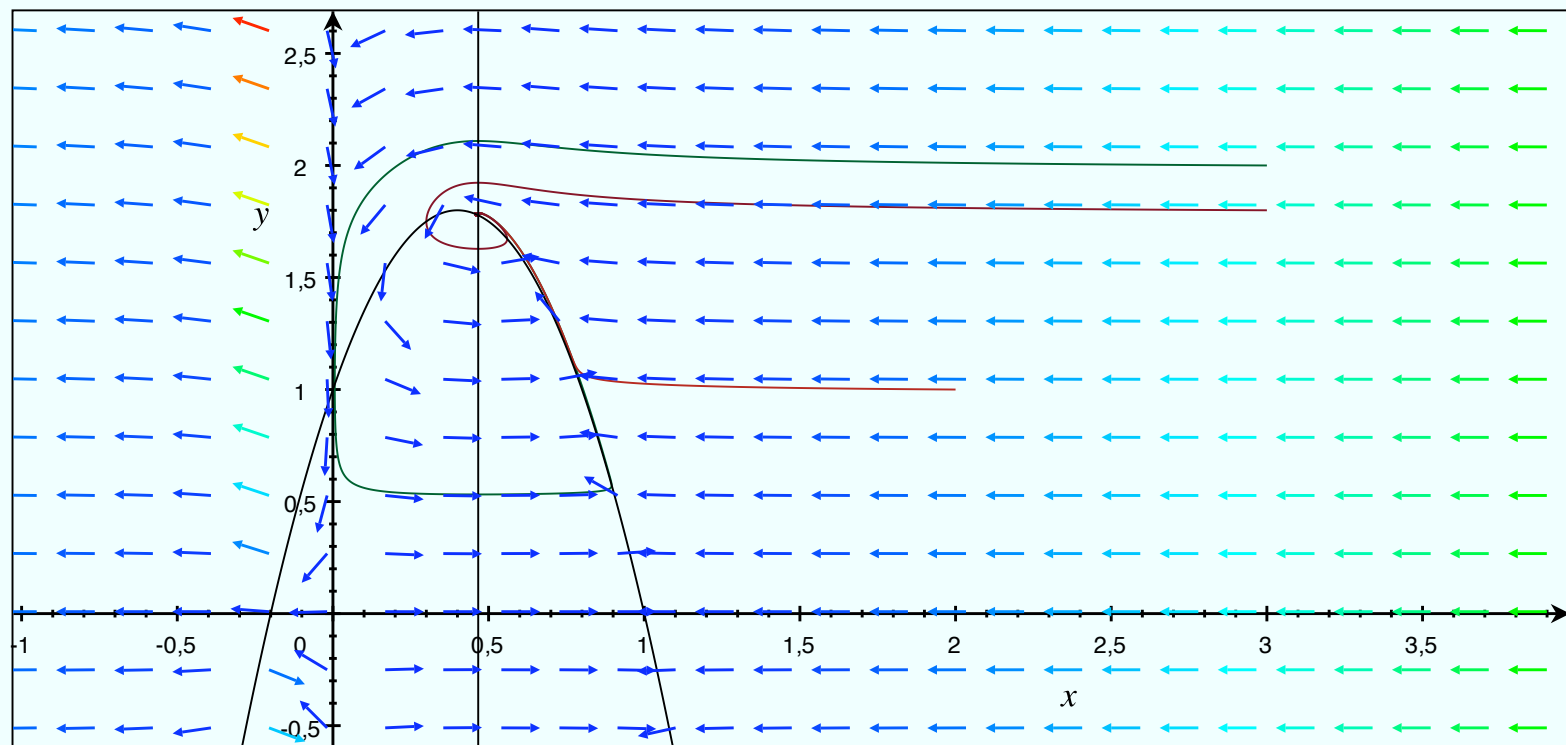
Klasický model má $V = \gamma_1 N_1$, tá nie je realistická pretože nie je ohraničená a v skutočnosti dravec i pri neobmedzenom množstve koristi zničí len určité množstvo - hladina nasýtenia

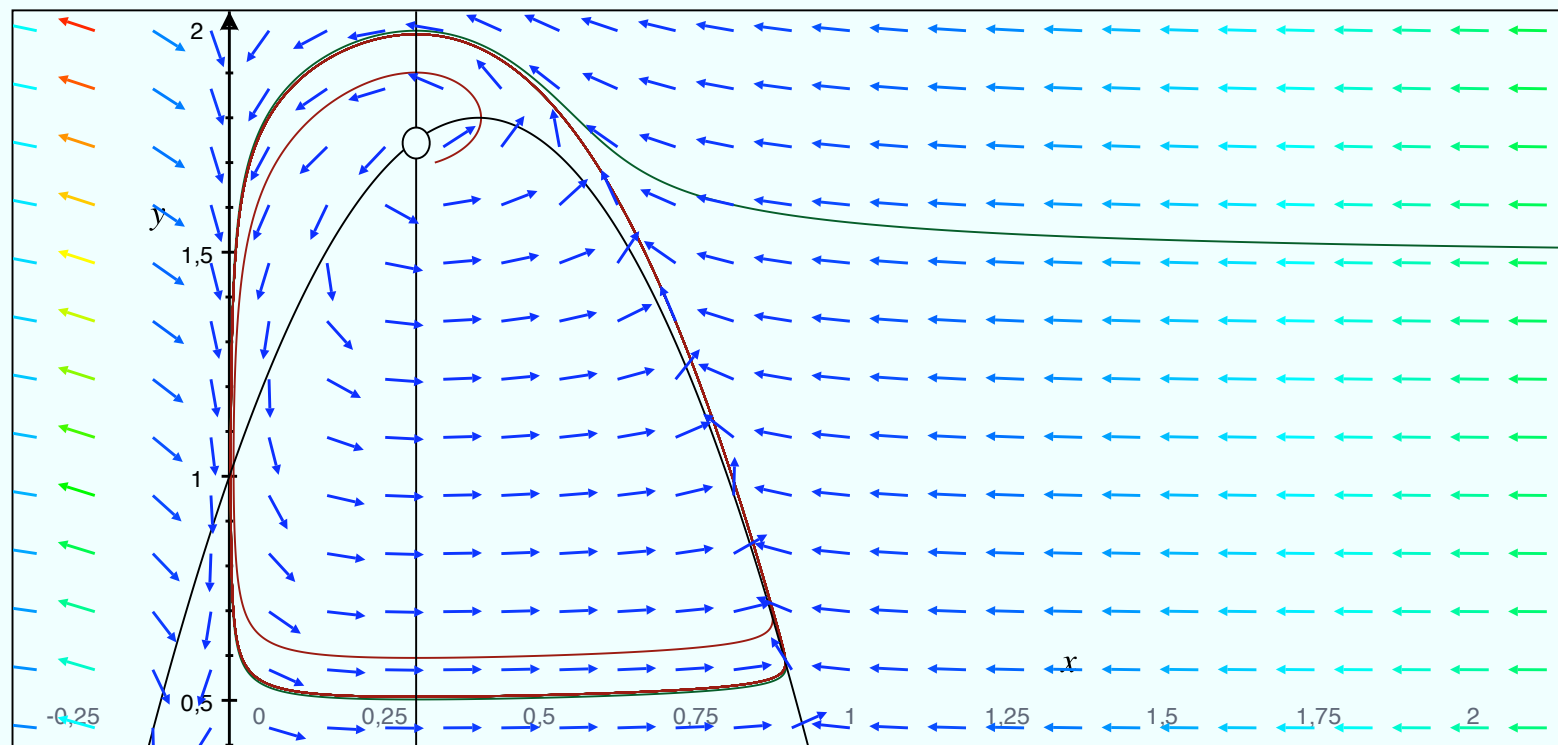
Podmienky:

1. $V(0) = 0$ žiadna korisť, žiaden lov
2. $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} V(N_1) = S$
3. V je neklesajúca vzrastie korisť, neulovia jej menej

Typ V zisťujeme empiricky

Ak je V niektorého typu, potom má každá počiatočná úloha úplné riešenie





Model Leslieho typu

- prírastok, úbytok koristi je úmerný jej veľkosti
- jeden dravec za jednotku času zabije $V(N_1, N_2)$ jedincov koristi
- populácia koristi sa vyvíja podľa Malthusovho modelu ($r_1 - b_1 N_1$)
- populácia dravca sa vyvíja podľa Malthusovho modelu
- okamžitá kapacita prostredia pre dravca je určená veľkosťou koristi (viac koristi, väčšia kapacita)

Model Leslieho typu

- prírastok, úbytok koristi je úmerný jej veľkosti
- jeden dravec za jednotku času zabije $V(N_1, N_2)$ jedincov koristi
- populácia koristi sa vyvíja podľa Malthusovho modelu ($r_1 - b_1 N_1$)
- populácia dravca sa vyvíja podľa Malthusovho modelu
- okamžitá kapacita prostredia pre dravca je určená veľkosťou koristi (viac koristi, väčšia kapacita)

$$N_2' = \delta \left(1 - \frac{N_2}{K}\right) N_2$$

kde δ max. možná miera rastu populácie dravca

Model Leslieho typu

- prírastok, úbytok koristi je úmerný jej veľkosti
- jeden dravec za jednotku času zabije $V(N_1, N_2)$ jedincov koristi
- populácia koristi sa vyvíja podľa Malthusovho modelu ($r_1 - b_1 N_1$)
- populácia dravca sa vyvíja podľa Malthusovho modelu
- okamžitá kapacita prostredia pre dravca je určená veľkosťou koristi (viac koristi, väčšia kapacita)

$$N_2' = \delta \left(1 - \frac{N_2}{K}\right) N_2$$

kde δ max. možná miera rastu populácie dravca

K kapacita prostredia je neklesajúca : $K = cN_1$

Model Leslieho typu

- prírastok, úbytok koristi je úmerný jej veľkosti
- jeden dravec za jednotku času zabije $V(N_1, N_2)$ jedincov koristi
- populácia koristi sa vyvíja podľa Malthusovho modelu ($r_1 - b_1 N_1$)
- populácia dravca sa vyvíja podľa Malthusovho modelu
- okamžitá kapacita prostredia pre dravca je určená veľkosťou koristi (viac koristi, väčšia kapacita)

$$N_2' = \delta \left(1 - \frac{N_2}{K} \right) N_2$$

kde δ max. možná miera rastu populácie dravca

K kapacita prostredia je neklesajúca : $K = cN_1$

$$N_1' = (r_1 - b_1 N_1) N_1 - V N_2$$

$$N_2' = \delta \left(1 - \frac{N_2}{cN_1} \right) N_2$$

Model s limitným cyklom

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 - \frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2 \\N_2' &= -r_2 N_2 + \frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2\end{aligned}$$

Model s limitným cyklom

$$\begin{aligned}N_1' &= (r_1 - b_1 N_1) N_1 - \frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2 \\N_2' &= -r_2 N_2 + \frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2\end{aligned}$$

- korisť: rýchlosť rastu nie je konštantná
- dravec: rýchlosť rastu je konštantná
- $N_1 > 0$ malé: $\frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2 \approx \frac{\gamma_1}{p} N_1 N_2$ (LV model: úmerné N_1, N_2)
- $N_1 > 0$ veľké: $\frac{\gamma_1}{p + N_1} N_1 N_2 \approx \gamma_1 N_2$
- predpokl. b_1 nie je veľká: $b_1 p < r_1$
- predpokl. γ_2 je veľká: $\gamma_2 > \frac{r_2(r_1 + p b_1)}{r_1 - p b_1}$

Logistická rovnica

Nelineárny dynamický systém môže vykazovať jeden z nasledujúcich typov chovania:

- vždy v klúde
- vždy expanduje (len pre neobmedz. systémy)
- periodický pohyb
- kvázi-periodický pohyb
- chaotický pohyb

Logistická rovnica

CHAOS (1900-Poincaré)

Laplace: "Všetky udalosti sú od zrodu vesmíru až k jeho zániku predom určené" – determinované. Zastával názor, že ex. súbor pravidiel, ktorý nám na základe znalosti stavu vesmíru v prítomnosti umožní predpovedať jeho stav v ktoromkoľvek ďalšom okamihu

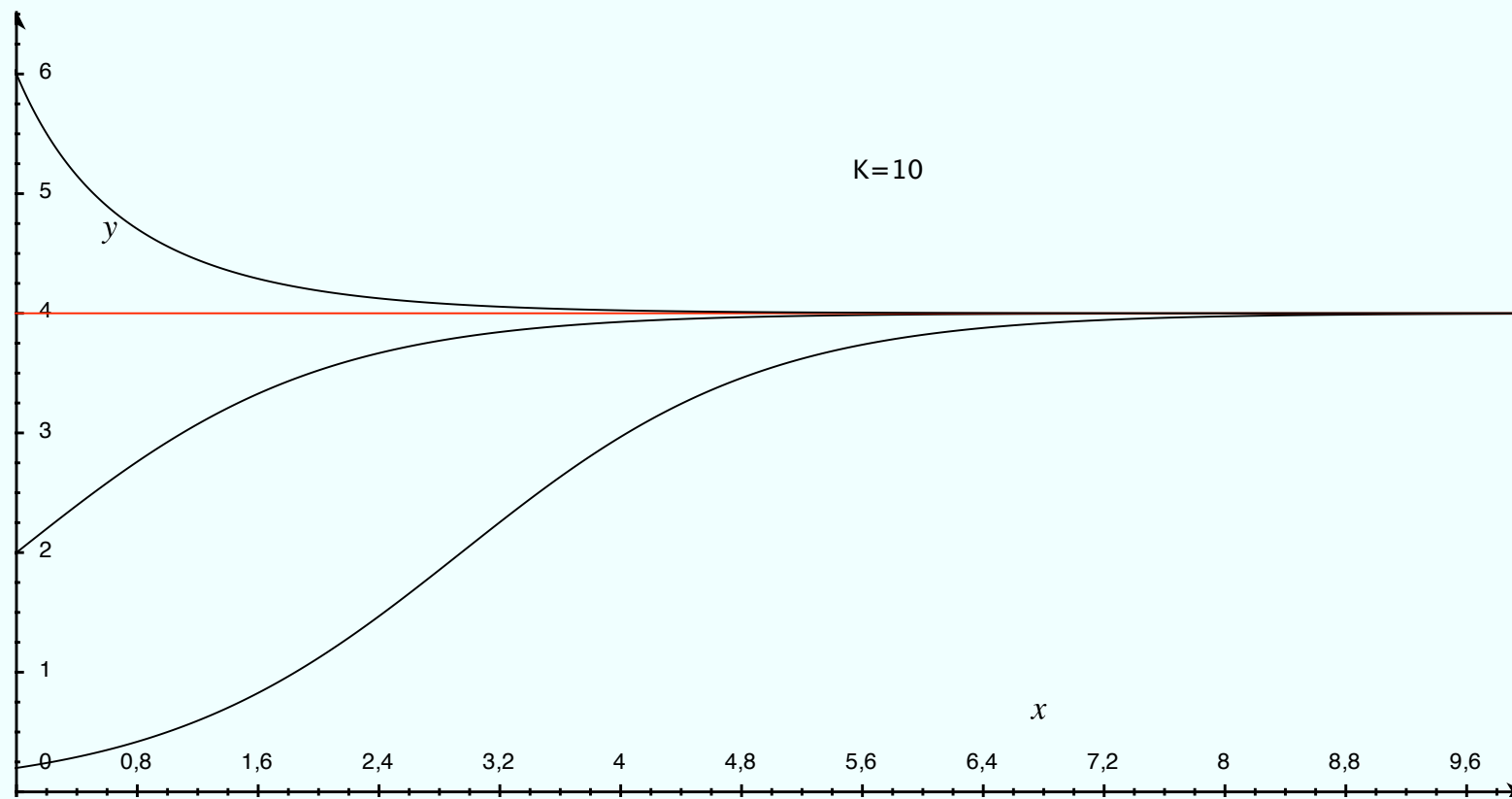
Lorenz: "Optimistické". Zostavil systém troch nelineárnych rovníc popisujúcich hydrodynam. prúdenia častíc a objavil "motýlí efekt" – citlivá závislosť na počiatočných podmienkach (napr. počasie riadené atmosférou, ktorá je podriadená deterministickým a presným prírodným, fyzikálnym zákonom, možno predvídať max. 2-3 týždne dopredu)

Logistická rovnica

CHAOS

- nepredvídateľné chovanie deterministických systémov
- skúmanie zložitostí, ktoré vznikajú aj z pomerne jednoduchých rovníc, nám z veľkej časti postačuje k popisu komplexnosti sveta
- poskytuje nástroje na lepšiu predpoveď zložitých zdanlivo náhodných systémov ako je počasie, burza, zemetrasenie, populačný rast ...

Logistická rovnica



logistická krivka, Verhulstov model

Logistická rovnica

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

Logistická rovnica

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

Logistická rovnica

$$x' = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x = (r - bx)x$$

$$x(0) = x_0$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

metoda prostej iterácie ($y = x, y = rx(1 - x)$)
správanie závisí na r

Logistická rovnica

1. $r \in [0, 1]$ populácia vymiera
2. $r \in (1, 2]$ rýchlo sa ustáli na hodnote $\frac{r-1}{r}$
3. $r \in (2, 3]$ po niekoľkých iteráciách sa ustáli na hodnote $\frac{r-1}{r}$, ale najprv okolo nej osciluje
4. $r \in (3, 3.45]$ riešenie bude oscilovať medzi dvoma hodnotami: 2-periodný limitný cyklus
5. $r \in (3.45, 3.54]$ 4-periodný limitný cyklus
6. ďalej 8, 16, 32..., tj 2^n -periodné limitné cykly
7. $r \approx 3.57$ chaos – nekonečné periodné cykly, nevidíme žiadne oscilácie (Feigenbaumov bod)

Ukážka

Logistická rovnica

1. $r \in [0, 1]$ populácia vymiera
2. $r \in (1, 2]$ rýchlo sa ustáli na hodnote $\frac{r-1}{r}$
3. $r \in (2, 3]$ po niekoľkých iteráciách sa ustáli na hodnote $\frac{r-1}{r}$, ale najprv okolo nej osciluje
4. $r \in (3, 3.45]$ riešenie bude oscilovať medzi dvoma hodnotami: 2-periodný limitný cyklus
5. $r \in (3.45, 3.54]$ 4-periodný limitný cyklus
6. ďalej 8, 16, 32..., tj 2^n -periodné limitné cykly
7. $r \approx 3.57$ chaos – nekonečné periodné cykly, nevidíme žiadne oscilácie (Feigenbaumov bod)

Ukážka

Feigenbaumovo číslo = 4.6692 pomer šírky oblasti (bifurkácia) k šírke predošlej oblasti (prirovnávame k π , e)

Zoznam zdrojov

- [1] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii*, Masarykova univerzita Brno, 2001
- [2] Výskumná skupina Artificial Life Group
<http://alife.tuke.sk/index.php?kat=1>
- [3] Simulácie 1
<http://www.aw-bc.com/ide/idefiles/navigation/main.html>
- [4] Simulácie 2
<http://www.gingerbooth.com/indexf.html>