# Metody řešení systémů nelineárních rovnic

Tomáš Jeřábek

# Osnova

1. Soustava nelineárních rovnic
2. Iterační metody
3. Rychlost konvergence
4. Paralelní metoda tětiv
5. Newtonova metoda a její modifikace
6. Broydenova metoda

# Soustava *n* nelineárních rovnic o *n* neznámých

Jsou dány funkce $f_i : R^n \to R, i = 1.......n$

Hledáme $x^* = \left(x_1,.....,x_n\right)^T$ takové, že:

$$
\begin{aligned}
&f_1\left(x_{1,},.....,x_n\right) = 0 \\
&\vdots \\
&f_n\left(x_{1,},.....,x_n\right) = 0
\end{aligned}
$$

Vektorově může psát $F\left(x^*\right) = 0$

# Iterační metody

- Soustavu rovnic budeme řešit iteračními metodami.
- Těmito metodami vytváříme posloupnost iterací $\{x^k\}$ takovou, že $x^k \to x^*, k \to \infty$
- Budeme se zabývat iteračními metodami tvaru

$$x^{k+1} = G_k x^k, k = 0,1,.......$$

kde $G_k : R^n \to R^n$

- U každé iterační metody nás bude zajímat kdy bude konvergovat a jakou rychlostí bude konvergovat.

# Rychlost konvergence I

- Označme odchylku od řešení v *k – té* iteraci jako $h^k$ tj.

$$h^k = x^k - x^*$$

- Řekneme, že konvergence metody je *p – řádu,* jestliže

$$h^k \to 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\left\| h^{k+1} \right\|}{\left\| h^k \right\|^p} \to \alpha, \alpha > 0$$

- Z praktického hlediska jsou důležité v podstatě jen případy pro *p = 1 (lineární konvergence), p = 2 (kvadratická konvergence, p = 3 (kubická konvergence)*

# Rychlost konvergence II

- Pro každou lineárně konvergentní metodu existuje konstanta $\alpha > 0$ tak, že

$$\frac{\left\| h^{k+1} \right\|}{\left\| h^{k} \right\|} \leq \alpha \qquad \text{neboli} \qquad h^{k+1} = O\left( \left\| h^{k} \right\| \right)$$

- Obdobně pro metodu s kvadratickou konvergencí platí

$$\frac{\left\| h^{k+1} \right\|}{\left\| h^{k} \right\|^{2}} \leq \alpha \qquad \text{neboli} \qquad h^{k+1} = O\left( \left\| h^{k} \right\|^{2} \right)$$

- A podobně pro metodu s kubickou konvergencí

# Rychlost konvergence III

- Řada iteračních metod, které nejsou kvadraticky konvergentní konvergují rychleji než jak to zaručuje lineární konvergence:

$$\frac{\left\| h^{k+1} \right\|}{\left\| h^{k} \right\|} \to 0 \qquad \text{neboli} \qquad h^{k+1} = o\left( \left\| h^{k} \right\| \right)$$

- O takových metodách říkáme, že mají *superlineární konvergenci*

# Paralelní metoda tětiv I

- Nechť $F : R^n \rightarrow R^n$ a mějme dánu počáteční iteraci $x^0$
  Hledáme iterace $x_1, x_2, \ldots\ldots$ takové, že posloupnost těchto iterací konverguje k řešení $x^*$
- PMT definujeme předpisem $x^{k+1} = x^k - A^{-1}F\left(x^k\right)$
  kde A je regulární matice.
- Nyní nás bude zajímat jak vhodně vybrat matici *A*
- Matice A musí být regulární a metoda musí být lokálně konvergentní. Tzn. že pokud počáteční iterace je dostatečně blízko k řešení soustavy pak by mělo platit, že

$$x^k \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$$

# Paralelní metoda tětiv II

- Dostatečnou podmínkou pro lokální konvergenci PMT je splnění
$$\sigma = \rho\left(I - A^{-1}F'\left(x^*\right)\right) < 1$$
  Za předpokladu, že $F'\left(x^*\right)$ existuje.
- Nejlepším výběrem bude tedy matice, která se mění v každé iteraci a pro posloupnost těchto matic $A_k$ platí:
$$A_k \to F'\left(x^*\right), k \to \infty$$
- Pokud položíme $A_k = F'\left(x^k\right)$ dostáváme Newtonovu metodu

# Newtonova metoda

- Posloupnost iterací je vytvářena předpisem

$$x^{k+1} = x^k - F'\left(x^k\right)^{-1} F\left(x^k\right)$$

- Výpočet iterace vyžaduje:

  - Ohodnotíme $F\left(x^k\right)$

  - řešíme systém rovnic $F'\left(x^k\right)p^k = -F\left(x^k\right)$

  - Položíme $x^{k+1} = x^k + p^k$

- Pokud zvolíme poč. iteraci dostatečně blízko k řešení a $F'\left(x^*\right)$ je regulární a lipschitzovsky spojitá, pak NM konverguje kvadraticky.

# Newtonova metoda II

- Výhodou NM je rychlá konvergence
- Nevýhodou je nutnost přehodnocovat jacobián v každé iteraci. Další nevýhodou je nutnost v každé iteraci řešit systém lin. rovnic.
- Na základě těchto nevýhod byly vyvinuty modifikace NM, které zmírňují některou z nevýhod, ale za cenu pomalejší konvergence.

# Příklad

Budeme řešit následující soustavu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{17}{4}$$

$$2x_1x_2 + 3x_2x_3 + x_3x_1^4 = 4$$

$$x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 = \frac{113}{16}$$

S počáteční iterací $x^0 = (-1,3;0,5;1,7)$

Jako kritérium pro ukončení zvolíme $\left\| F\left(x^k\right) \right\| < 10^{-6}$

# Newtonova metoda

| k | x1 | x2 | x3 | f(x1) | f(x2) | f(x3) | x1-x* | x2-x* | x3-x* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1,30 | 0,500000 | 1,700000 | 0.580000000 | 2.10537 | 3.042100000 | -0,3000000 | -0,5000000 | 0,2000000 |
| 1 | -1,13 | 0,83374 | 1,558772 | 0,15913592 | 0,580017 | 0,60872785 | -0,1332434 | -0,1662600 | 0,0587725 |
| 2 | -1,044816 | 0,939000 | 1,515714 | 0,020753 | 0,113850 | 0,084576 | -0,0448162 | -0,0609995 | 0,0157144 |
| 3 | -1,007394 | 0,989840 | 1,503169 | 0,004142 | 0,017495 | 0,017732 | -0,0073944 | -0,0101603 | 0,0031688 |
| 4 | -1,000251 | 0,999641 | 1,500124 | 0,000156 | 0,000603 | 0,000745 | -0,0002509 | -0,0003595 | 0,0001244 |
| 5 | -1,000000 | 1,000000 | 1,500000 | 0,000000 | 0,000001 | 0,000000 | -0,0000003 | -0,0000004 | 0,0000002 |

# Modifikace NM

1. tzv. zjednodušená Newtonova metoda, kde se jacobián vyhodnocuje pouze v první iteraci, tedy

$$x^{k+1} = x^k - F'\left(x^0\right)^{-1} F\left(x^k\right)$$

2. Diskretizovaná newtonova metoda, kde se parciální derivace v jacobiánu vyjadřují pomocí diferenčních podílů, tedy prvek jacobiánu $\partial_j f_i(x)$ vyjádříme jako

$$\partial_j f_i(x) \approx \Delta_{ij}(x,h) = \frac{f_i\left(x_1,\ldots,x_j + h_j,\ldots,x_n\right) - f_i(x)}{h_j}$$

kde $h_j \neq 0$ jsou vhodně zvolené parametry. Platí, že

$$\Delta_{ij}(x,h) \to \partial_j f_i(x), h \to 0$$

# Modifikace NM

Matice $\Delta(x,h)$ s prvky $\Delta_{ij}(x,h)$ je aproximací jacobiánu.

Tedy posloupnost iterací diskretizované NM je vyjádřena předpisem

$$x^{k+1} = x^k - \Delta(x,h)^{-1} F\left(x^k\right)$$

3. Jacobián je přepočítáván po k krocích, pro k = 2 dostaneme předpis

$$x^{k+1} = x^k - F'\left(x^k\right)^{-1}\left[F\left(x^k\right) + F\left(x^k - F'\left(x^k\right)^{-1} F\left(x^k\right)\right)\right]$$

# Zjednodušená NM

| k | x1 | x2 | x3 | f(x1) | f(x2) | f(x3) | x1-x* | x2-x* | x3-x* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1,300000 | 0,500000 | 1,700000 | 0.580000000 | 2.10537 | 3.042100000 | -0,300000 | -0,500000 | 0,200000 |
| 1 | -1,133243 | 0,833740 | 1,558772 | 0,159136 | 0,580017 | 0,608728 | -0,133243 | -0,166260 | 0,058772 |
| 2 | -1,093923 | 0,867375 | 1,532143 | 0,046472 | 0,283199 | 0,210770 | -0,093923 | -0,132625 | 0,032143 |
| 3 | -1,066751 | 0,920380 | 1,523665 | 0,056610 | 0,216483 | 0,182648 | -0,066751 | -0,079620 | 0,023665 |
| 4 | -1,052463 | 0,926632 | 1,516102 | 0,014890 | 0,124296 | 0,065854 | -0,052463 | -0,073368 | 0,016102 |
| 5 | -1,039471 | 0,953385 | 1,513789 | 0,031000 | 0,114957 | 0,095412 | -0,039471 | -0,046615 | 0,013789 |
| 6 | -1,032248 | 0,954522 | 1,509861 | 0,006326 | 0,067222 | 0,030098 | -0,032248 | -0,045478 | 0,009861 |

Celkem 48 iterací k dosažení požadované přesnosti

# Modifikovaná NM(3) pro k=2

| k | x1 | x2 | x3 | f(x1) | f(x2) | f(x3) | x1-x* | x2-x* | x3-x* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1,300000 | 0,500000 | 1,700000 | 0.580000000 | 2.10537 | 3.042100000 | -0,300000 | -0,500000 | 0,200000 |
| 1 | -1,093923 | 0,867375 | 1,532143 | 0,046472 | 0,283199 | 0,210770 | -0,093923 | -0,132625 | 0,032143 |
| 2 | -1,011455 | 0,984468 | 1,504659 | 0,006217 | 0,027172 | 0,025534 | -0,011455 | -0,015532 | 0,004659 |
| 3 | -1,000058 | 0,999916 | 1,500029 | 0,000037 | 0,000141 | 0,000177 | -0,000058 | -0,000084 | 0,000029 |
| 4 | -1,000000 | 1,000000 | 1,500000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |

# Broydenova metoda

Další možností jak vhodně zvolit matici $A_k$ v předpisu:

$$x^{k+1} = x^k - A_k^{-1} F\left(x^k\right)$$

je položit $A_k = \Gamma_k H_k^{-1}$, kde $\Gamma_k = \left(q^{k-1}, \ldots, q^{k-n}\right), H_k = \left(p^{k-1}, \ldots, p^{k-n}\right),$

$$q^i = F\left(x^{i+1}\right) - F\left(x^i\right), p^i = x^{i+1} - x^i$$

Nyní odvodíme postup jak z matice $A_k$ získat matici $A_{k+1}$

Ze vztahů $A_{k+1} = \Gamma_{k+1} H_{k+1}^{-1}$ a $A_{k+1} = \Gamma_{k+1} H_{k+1}^{-1}$ získáme

$$A_k p^j = q^j, \; j = k-1, \ldots, k-n$$

$$A_{k+1} p^j = q^j, \; j = k, \ldots, k-n+1$$

# Broydenova metoda II

Tak, že platí $\left(A_{k+1}-A_k\right)p^j=0,\ j=k-1,\ldots,k-n+1$

Ale také platí $\left(A_{k+1}-A_k\right)p^k=q^k-A_k p^k=q^k+F\left(x^k\right)=F\left(x^{k+1}\right)$

Z toho plyne, že

$$A_{k+1}-A_k=u^k\left(v^k\right)^T,$$

kde $u^k,v^k\in R^n$

Odtud $A_{k+1}=A_k+u^k\left(v^k\right)^T$

Broyden navrhl položit $v^k=p^k$ Tedy dostáváme:

$$u^k\left(p^k\right)^T p^k=F\left(x^{k+1}\right)$$

$$u^k=\frac{F\left(x^{k+1}\right)}{\left(p^k\right)^T p^k},\left(p^k\right)^T p^k\neq 0$$

# Broydenova metoda III

Po dosazení dostaneme

$$A_{k+1} = A_k + \frac{\left(q^k - A_k p^k\right)\left(p^k\right)^T}{\left(p^k\right)^T p^k}$$

Tedy Broydenova metoda je dána předpisem

$$x^{k+1} = x^k - A_k^{-1} F\left(x^k\right)$$

a výše uvedeným vztahem.

Za $A_0$ většinou volíme $F'\left(x_0\right)$

# Broydenova metoda IV

Pro k od 0 do n děláme

- Určíme $F\left(x^k\right)$
- Řešíme systém rovnic $A_k p^k = -F\left(x^k\right)$
- Položíme $x^{k+1} = x^k + p^k$
- Určíme $F\left(x^{k+1}\right)$
- Položíme $q^k = F\left(x^{k+1}\right) - F\left(x^k\right)$
- Vypočteme $A_{k+1} = A_k + \dfrac{\left(q^k - A_k p^k\right)\left(p^k\right)^T}{\left(p^k\right)^T p^k}$

Superlineární konvergence

# Broydenova metoda

| k | x1 | x2 | x3 | f(x1) | f(x2) | f(x3) | x1-x* | x2-x* | x3-x* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -1,300000 | 0,500000 | 1,700000 | 0.580000000 | 2.10537 | 3.042100000 | -0,300000 | -0,500000 | 0,200000 |
| 1 | -1,133200 | 0,833700 | 1,558800 | 0,159100 | 0,580000 | 0,608700 | -0,133200 | -0,166300 | 0,058800 |
| 2 | -1,087800 | 0,872600 | 1,528000 | 0,029400 | 0,240900 | 0,151500 | -0,087800 | -0,127400 | 0,028000 |
| 3 | -0,567500 | 1,875800 | 1,361600 | 1,444500 | 1,674100 | 9,076400 | 0,432500 | 0,875800 | -0,138400 |
| 4 | -1,194100 | 0,643100 | 1,675400 | 0,396200 | 1,102300 | 2,412800 | -0,194100 | -0,356900 | 0,175400 |
| 5 | -1,194400 | 0,602400 | 1,576300 | 0,023900 | 0,617000 | 0,668800 | -0,194400 | -0,397600 | 0,076300 |
| 6 | -1,192900 | 0,606500 | 1,575700 | 0,023600 | 0,610600 | 0,659900 | -0,192900 | -0,393500 | 0,075700 |

Celkem 31 iterací k dosažení požadované přesnosti

# Literatura


- J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, ***Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables***,**1970.**
- J. E. DENNIS, J. J. MORE, ***Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory,*** **1974**
- C. G. BROYDEN, ***A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations, 1965***
- C.T.KELLEY, ***Solving Nonlinear equations with Newton's method,*** **2003**