Oceňování opcí

Lenka Křivánková

Ústav matematiky a statistiky
Janáčkovo nám. 2a
Brno

- Opce
- Modely oceňování opcí
- Brownův pohyb
- Geometrický Brownův pohyb

Opce je právo koupit nebo prodat za (resp. po) určitý čas konkrétní množství aktiv (akcií, deviz, obligací) za stanovenou opční cenu.

Opce call (kupní opce) - držitel opce má právo koupit a upisovatel povinnost prodat podkladové aktivum za předem sjednaných podmínek

Opce put (prodejní opce) - držitel opce má právo prodat a upisovatel povinnost koupit podkladové aktivum za předem sjednaných podmínek

Příklad: Držitel evropské call opce má právo zakoupit v den splatnosti opce jednu akcii A za cenu 250,- Kč. Jakou hodnotu má nyní tato opce?

Řešení: Předpokládejme, že v den vypršení opce, mohou nastat dvě rozdílné situace. Cena akcie A může vzrůst na 270,- Kč nebo naopak poklesnout na 230,- Kč. V prvním případě držitel opce uplatní své právo a zakoupí akcii A za předem dohodnutou cenu 250,- Kč. Tím okamžitě získá 20,- Kč, neboť akcie A může být na trhu prodána za svoji aktuální cenu 270,- Kč. V druhém případě nebude pro držitele opce rozumné opci uplatnit.

Pokud budeme navíc předpokládat, že pokles, respektive růst, ceny akcie A v den vypršení opce má stejnou pravděpodobnost, pak očekávaný zisk bude

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

Jestliže situaci dále zjednodušíme a budeme ignorovat úrokové míry, můžeme částku 10,- Kč považovat za rozumnou pro ocenění uvažované opce.

Z předchozího příkladu můžeme odvodit některé z následujících vztahů pro cenu opce:

	call	put
$\uparrow$ cena podkladového aktiva	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow$ realizačni cena opce	$\downarrow$	$\uparrow$
$\downarrow$ zbývající čas do expirace	$\downarrow$	$\downarrow$
$\uparrow$ volatilita (rizikovost)	$\uparrow$	$\uparrow$
$\uparrow$ úroková míra	$\uparrow$	$\downarrow$

Modely oceňování opcí

Binomický model
- diskrétní model

Black-Scholesův model

- spojitý model

Definice: Spojitý stochastický proces $\{B_t : 0 \leq t < T\}$ se nazývá *standardní Brownův pohyb* v [0,T), jestliže má následující čtyři vlastnosti:

(i) $B_0 = 0$.

(ii) Přírůstky B_t jsou nezávislé; to jest, pro každdou konečnou množinu časů $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ jsou náhodné proměnné

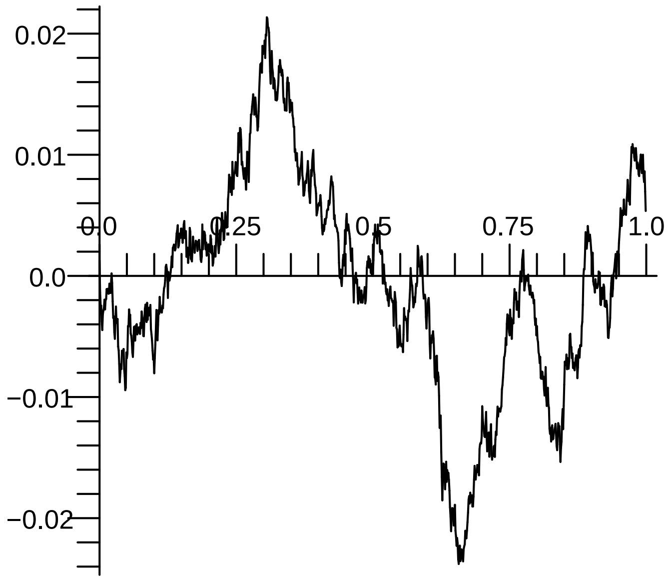
$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_3}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

nezávislé.

(iii) Pro každé $0 \leq s \leq t < T$ má přírůstek $B_t - B_s$ Gaussovo (normální) rozložení se střední hodnotou 0 a rozptylem $t - s$.

(iv) Pro všechna ω je $B_t(\omega)$ spojitá funkce t s pravděpodobností jedna.

Brownův pohyb



Brownův pohyb

Brownův pohyb s driftem

$$W_t = B_t + \mu t,$$

kde μ je konstanta (odrážející nominální růst).

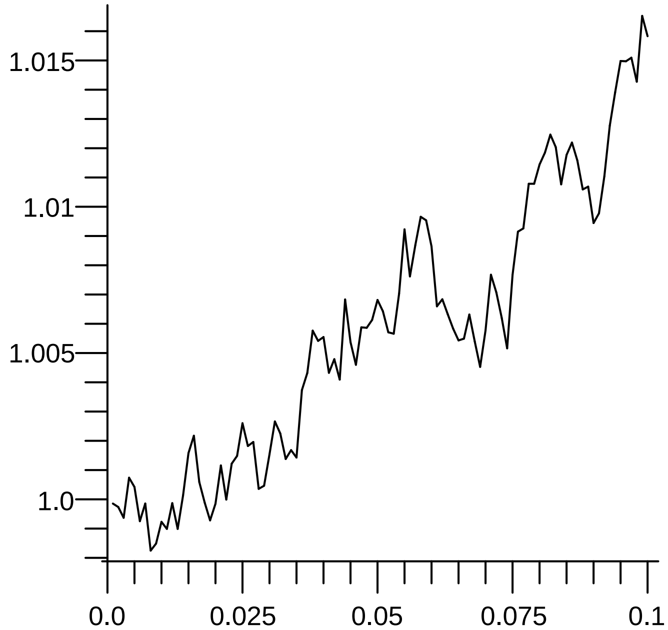
Definice: Jestliže $\{X(t), t \geq 0\}$ je Brownův pohyb, pak stochastický proces $\{Y(t), t \geq 0\}$, definovaný

$$Y(t) = e^{X(t)},$$

se nazývá *geometrický Brownův pohyb*.

Poznámka: Uvažujeme-li standardní Brownův pohyb $\{X(t) : 0 \leq t < T\}$, pak náhodná veličina $X(t)$ má střední hodnotou 0 a rozptyl t, a proto je její hustota

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.$$



Geometrický Brownův pohyb

Příklad: *Hodnota opce*
Mějme opci ke koupi (v čase T v budoucnu) jedné akcie v pevné ceně K. Předpokládejme, že současná hodnota akcie je y a že její cena se mění podle geometrického Brownova pohybu. Vypočítáme očekávanou hodnotu vlastněné opce. Protože opce bude uplatněna, jestliže cena akcie v čase T je K nebo vyšší, její očekávaná hodnota je

$$\begin{aligned} E[max(Y(t) - K, 0)] &= \int_0^\infty P\{Y(T) - K > a\}da \\ &= \int_0^\infty P\{ye^{X(T)} - K > a\}da \\ &= \int_0^\infty P\left\{X(T) > log\frac{K+a}{y}\right\}da \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty \int_{log[(K+a)/y]}^\infty e^{-x^2/2T}dxda. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že jednotková cena daného aktiva v čase t je St. Uvažujme krátký časový okamžik dt, během kterého se cena aktiva změní na $St + dSt$. Návratnost dSt/St se skládá z deterministické části a z náhodné části:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

kde μ je míra průměrného růstu ceny aktiva (drift), σ označuje volatilitu aktiva a B_t je Brownův pohyb.
Stochastický proces určený touto rovnicí je geometrický Brownův pohyb. Protože Brownův pohyb není diferencovatelný, nemůžeme tuto rovnici interpretovat jako obyčejnou diferenciální rovnici. K řesení stochastických diferenciálních rovnic se využívá Itôovo lemma.

Literatura

[1] Cipra T.: *Finanční a pojistné vzorce,* Grada Publishing, Praha 2006

[2] Wilmott P., Howison S., Dewynne J.: *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press, Cambridge 1995

[3] Křivánková L.: *Stochastické procesy ve finanční matematice,* Bakalářská práce, Brno 2007

[4] Vernerová L.: *Modely oceňovanie opcií,* Bakalárská práca, Brno 2007

[5] Lalley S.: *Statistics 390/ Mathematical Finance 345* `http://galton.uchicago.edu/ lalley/Courses/390/`