Algebra 2 23.5.2005

Jméno: ....

Hodnocení						Σ	

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
Minimum je 25 bodů.
Na práci máte 90 minut.

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mají-li celá čísla x, resp. y řád a, resp. b modulo $m \in \mathbb{N}$, pak má číslo $x \cdot y$ řád $a \cdot b$ modulo m.

(b) **ano** — **ne** Pro každé reálné číslo x platí, že $\langle x \rangle$ (tj. necelá část x) je menší nebo rovno x.

(c) **ano** — **ne** Existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $7k + 3$.

(d) **ano** — **ne** Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ je grupa $(\mathbb{Z}_m^\times, \cdot)$ cyklická.

(e) **ano** — **ne** Binomická kongruence $x^n \equiv -1 \pmod{m}$, kde n je sudé, nemá řešení pro žádné $m > 2$.

(f) **ano** — **ne** Pro každé přirozené číslo $m > 1$ je $\varphi(m)$ sudé číslo.

(g) **ano** — **ne** Diofantická rovnice $x^n + y^n = z^n$ s neznámými $x, y, z \in \mathbb{N}$ nemá pro parametr $n \in \mathbb{N}$ žádné řešení.

(h) **ano** — **ne** Je-li řešitelná kongruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, pro $m \in \mathbb{N}$ a $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, pak je tato kongruence řešitelná modulo libovolné přirozené číslo d, splňující $d \mid m$.

(i) **ano** — **ne** Relace dělitelnosti na množině celých čísel je antisymetrická.

(j) **ano** — **ne** Je-li celé číslo g primitivním kořenem modulo $m \in \mathbb{N}$, pak je primitivním kořenem také g^d pro libovolné $d \in \mathbb{N}$, pro které $(d, \phi(m)) = 1$.

2. (6 bodů) Řešte v $\mathbb{N}$ rovnici $\varphi(m) = 20$.

3. (10 bodů) Řešte kongruenci $x^5 \equiv 534 \pmod{23^2}$

4. (10 bodů) Rozhodněte, pro která přirozená čísla n je číslo $3^n + 4^n - 5^n$ dělitelné jedenácti.

5. (8 bodů) Šest loupežníků si chtělo rozdělit zlaťáky, které měli na stole. Když je rozdělovali na šest stejných hromádek, tři zlaťáky zbyly. Když je zkusili rozdělit na pět stejných hromádek, jeden zlaťák zbyl. Nakonec se nepoprali, protože se vrátil sedmý loupežník, který z kapsy přidal tři zlaťáky na stůl a všechny zlaťáky pak rozdělil na sedm stejných hromádek. Kolik zlaťáků bylo původně na stole, víte-li, že jich nebylo více než 400 a méně než 100.

6. (6 bodů) Mějme kongruenci $642 \cdot x \equiv 1844 \pmod{1144}$.

(a) Pomocí kritéria, udávajícího řešitelnost (a počet řešení) lineární kongruence, určete počet řešení této kongruence.

(b) Kongruenci vyřešte.