## *GEOSTATISTIKA – vymezení pojmu*

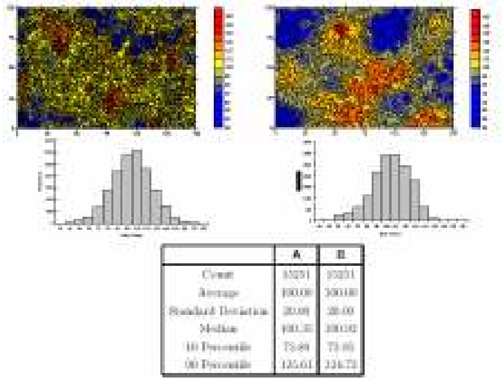
**• V užším slova smyslu – skupina interpolačních algoritmů založených na metodě krigingu.**

**• V širším slova smyslu – statistická analýza prostorově lokalizovaných dat.**

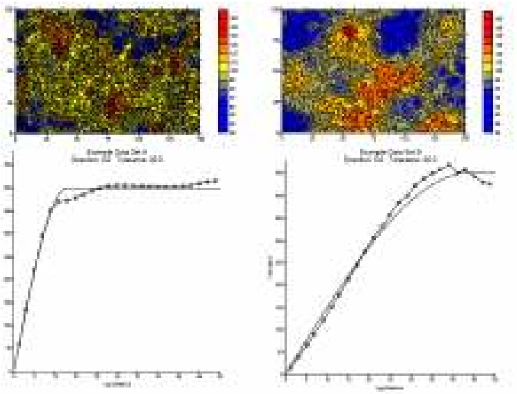
**Pomocí „klasických“ statistických metod lze vhodně analyzovat především atributová data – jejich kvantitativní či kvalitativní vlastnosti.**

**Velmi omezeně však jimi lze charakterizovat prostorové vlastnosti objektů a jevů.**

**Prostorové vlastnosti jako např. spojitost jevů, prostorovou autokorelaci, prostorové uspořádání (strukturu) lze charakterizovat právě pomocí geostatistických metod.**



**Prezentace prostorového rozšíření spojitého jevu metodami popisné statistiky**



**Prezentace prostorového rozšíření spojitého jevu metodami geostatistiky (tzv. semivariogram)**

## GEOSTATISTIKA – vymezení pojmu

- Statistický popis prostorově lokalizovaných dat (geografických objektů) – **„point descriptors“**
- Statistický popis prostorového uspořádání objektů (bodů, linií, ploch) – **„pattern detectors“**
- Koncept prostorové autokorelace
- Strukturní analýza a popis prostorové autokorelace strukturními funkcemi
- Konstrukce spojitých polí metodami krigingu
- Objektivní metody klasifikace jevů
- Metody interpolace

## Statistický popis bodů

• Body představují nejčastější způsob prezentace geografických jevů. Jsou zpravidla umísťovány v těžišti objektů.

• To, jaké geografické objekty lze popsat pomocí bodů (tedy stupeň abstrakce) závisí na měřítku, ale také na druhu analýzy

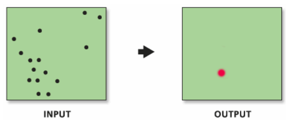
• Např. pro modelování optimálního spojení v síti sídel je vhodné je prezentovat centroidem, který tvoří uzel sítě).

• Výpočet popisné statistiky často předchází použití geostatistických metod.

• Umožňuje totiž ověřit některé vlastnosti studovaných souborů, které jsou pro aplikaci metod geostatistiky nezbytné.

• Jedná se o ověření takových vlastností jako je normalita rozdělení, stacionarita, linearita vztahu dvou veličin apod.

## Charakteristiky polohy




Charakteristiky polohy slouží k určování geografického středu či mediánu.

**Průměrný střed (mean centre)**

Průměrný střed leží na průměru souřadnic X a Y. Má stejné nevýhody jako aritmetický průměr – je to především citlivost na extrémní hodnoty. Například v případě shlukového uspořádání bodů průměrný střed dobře nereprezentuje množinu bodů.

$$(\bar{x}_{mc}, \bar{y}_{mc}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \right)$$

Kde $x_i$, $y_i$ jsou souřadnice bodu $i$ a $n$ je počet bodů.

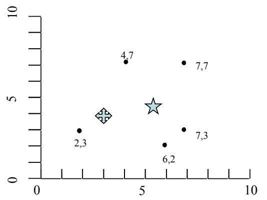
### Vážený průměrný střed (weighted mean centre)

Používá se v případě výskytu více událostí/objektů na stejném místě. Pak má každý bod váhu přímo úměrnou počtu událostí/objektů na tomto místě.

Např. při výpočtu prostorového průměru několika měst bude průměrný střed dávat realističtější představu o centrální tendenci jestliže ho budeme vážit počtem obyvatel jednotlivých měst (nebo – koncentrací znečišťující látky v jednotlivých místech či frekvencí výskytu určitého jevu ).

$$(\bar{x}_{wmc}, \bar{y}_{wmc}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right)$$

kde $w_i$ jsou váhy jednotlivých bodů.




| i | X | Y | váha | wX | wY |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 3 000 | 6 000 | 9 000 |
| 2 | 4 | 7 | 500 | 2 000 | 3 500 |
| 3 | 7 | 7 | 400 | 2 800 | 2 800 |
| 4 | 7 | 3 | 100 | 700 | 300 |
| 5 | 6 | 2 | 300 | 1 800 | 600 |
| | | | | | |
| sum | 26 | 22 | 4 300 | 13 300 | 16 200 |
| w MC | | | | **3.09** | **3.77** |

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i X_i}{\sum w_i}, \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i}{\sum w_i}$$

**Vážený průměrný střed (weighted mean centre)**

### Agregovaný průměrný střed

Je alternativou váženého středu, kdy se nepoužívají původní souřadnice X,Y ale jen souřadnice čtverců s agregovaným počtem bodů uvnitř čtverce:

$$(\bar{x}_{amc}, \bar{y}_{amc}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{N}, \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{N} \right)$$

$N$ je celkový počet čtvercových buněk, obsahujících body
$F_i$ je frekvence bodů ve čtvercové buňce
$x_i$ a $y_i$ jsou souřadnice čtvercových buněk
$i$ je od $1$ do $N$.


### Mediánový střed (Median Center)

1. najdeme medián na ose X a Y a vedeme z nich linie kolmé na směr osy. Takto definovaný „medián ze souřadnic“ ale nemusí odpovídat mediánu souboru bodů, protože distribuce nemusí být mezi kvadranty vyrovnaná.
2. (UK) - Mediánový střed je střed, kterým se studovaná plocha dělí do čtyř kvadrantů, z nichž každý obsahuje stejný počet bodů.
3. (US) - Mediánový střed jako střed vyžadující minimální (nejkratší) cestu. Tj. celková vzdálenost z mediánového středu do každého z bodů je minimální. Jinak řečeno – cesta z jakéhokoliv jiného místa do všech bodů oblasti bude delší než cesta z mediánového středu. Tuto podmínku lze vyjádřit vztahem:

$$\min \sum \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2}$$

kde $x_i$ a $y_i$ jsou souřadnice jednotlivých bodů a $u$, $v$ jsou souřadnice mediánového středu. Analogickým způsobem lze definovat tzv. vážený mediánový střed:

$$\min \sum f_i \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2}$$

Váhy $f_i$ pro jednotlivé body mohou být negativní či pozitivní podle toho, zda daný bod přitahuje či naopak odpuzuje polohu mediánového středu

### Mediánový střed (Median Center)

K odvození polohy mediánového středu lze využít iteračního počtu, založeného na následujících krocích:

1. Zjistíme polohu průměrného středu jako iniciační pro hledání polohy mediánového středu. Tedy:

$$(u_0, v_0) = (x_{mc}, y_{mc})$$

2. V iteračním kroku $t$ najdeme novou polohu mediánového středu podle vztahů:

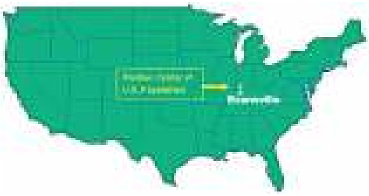
$$u_t = \frac{\sum f_i x_i \Big/ \sqrt{(x_i - u_{t-1})^2 + (y_i - v_{t-1})^2}}{\sum f_i \Big/ \sqrt{(x_i - u_{t-1})^2 + (y_i - v_{t-1})^2}}$$

$$v_t = \frac{\sum f_i y_i \Big/ \sqrt{(x_i - u_{t-1})^2 + (y_i - v_{t-1})^2}}{\sum f_i \Big/ \sqrt{(x_i - u_{t-1})^2 + (y_i - v_{t-1})^2}}$$

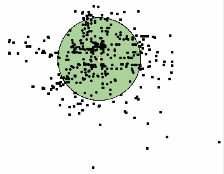
3. Druhý krok opakujeme do té doby, dokud vzdálenost mezi dvěma posledními polohami mediánového středu *($u_t$, $v_t$)* a *($u_{t-1}$, $v_{t-1}$)* je menší než vzdálenost *a priori* definovaná jako prahová.

## Vlastnosti charakteristik polohy

- Průměrný střed minimalizuje sumu čtverců vzdáleností
- Mediánový střed minimalizuje sumu vzdáleností – jeho interpretace je jednodušší
- Nejčastěji se využívá váženého mediánového středu (demografie)
- Charakteristiky polohy bez uvedení charakteristik rozptylu mají malou vypovídací schopnost a mohou být zavádějící



## Charakteristiky rozptylu



**Směrodatná vzdálenost (*standard distance*)**

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{mc})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{mc})^2}{n}}$$

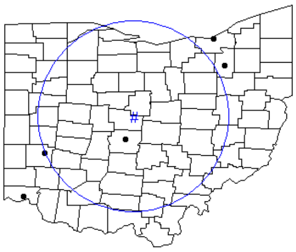
**Vážená směrodatná vzdálenost (weighted standard distance)**

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - x_{mc})^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i (y_i - y_{mc})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Směrodatná vzdálenost je nejčastěji používána ve formě kružnice kolem průměrného středu (**Standard distance circle**), jejíž poloměr je právě hodnota směrodatné vzdálenosti.

Různé směrodatné vzdálenosti pro různý typ jevů lze zakreslovat do stejného území. Tyto kružnice nám dávají představu o rozptylu hodnot kolem střední hodnoty pro jednotlivé typy jevů.

Mohou být použity i pro studium dynamiky jevů (různé kružnice pro jeden jev v různých časových horizontech).



Poloha váženého průměrného středu a kružnice směrodatné vzdálenosti pro pět měst ve státě Ohio. Jako váhy byl použit počet obyvatelstva

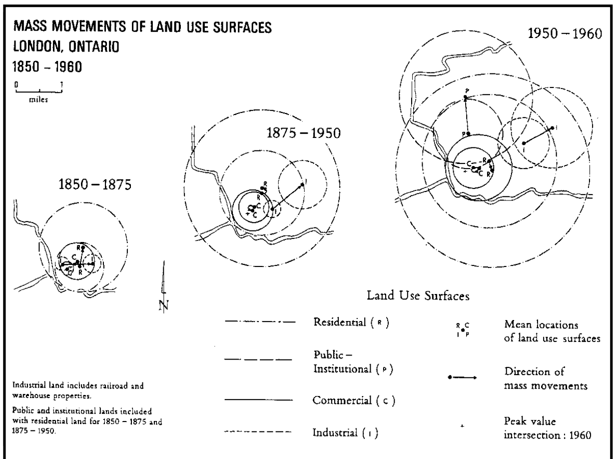
Směrodatná vzdálenost (*standard distance*) je **absolutní** mírou – je problematické její použití k porovnání několika souborů

Vhodnější jsou míry **relativní**

## Koeficient relativního rozptylu

- Poměr směrodatné vzdálenosti a poloměru kruhu se stejnou plochou jakou má studovaná oblast.
- Řeší problém použití absolutní míry směrodatné vzdálenosti. Je-li oblast různě velká (ohraničená), vznikají zavádějící hodnoty.
- K získání relativní míry při studiu variability obyvatelstva se někdy používá poloměr země nebo státu místo poloměru kruhu se stejnou plochou jakou má studovaná oblast.

$$CRD = 100 * \frac{SD}{A_k} = 100 * \frac{SD}{\sqrt{\frac{R}{\pi}}} = 100 * SD * \sqrt{\frac{\pi}{R}}$$




## Směrodatná elipsa odchylek (Standard Deviational Ellipse)

V mnoha případech může vykazovat prostorové rozdělení jevů určité rysy směrovosti (directional bias):

rozdělení míst nejčastějších dopravních nehod podél dálnice, výskyt určitého druhu rostlin či živočichů kolem pobřeží atd.

V tomto případě se použití kružnice jako míry rozptylu hodnot jeví jako nevhodné.

Jako logické rozšíření směrodatné kružnice odchylek se může jevit použití směrodatné elipsy odchylek. Tuto elipsu popisují tři atributy:

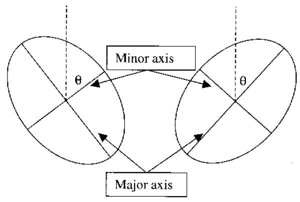
- úhel rotace
- směrodatná odchylka podél hlavní osy elipsy
- směrodatná odchylka podél vedlejší osy elipsy

## Směrodatná elipsa odchylek

Jestliže prostorové rozmístění bodů vykazuje jistou směrovost, potom maximální rozptyl bude orientován v souladu s hlavní osou elipsy.

Kolmo k tomuto směru bude směr minimálního rozptylu hodnot.

Úhel rotace elipsy je definován jako úhel mezi směrem k severu a osou *y* ve směru pohybu hodinových ručiček:




## Odvození směrodatné elipsy odchylek

1. Vypočteme souřadnice průměrného středu ($x_{mc}$, $y_{mc}$), které budou počátkem transformovaného systému souřadnic.
2. Pro každý bod budeme transformovat jeho souřadnice:

$$x_i^{'} = x_i - x_{mc}$$
$$y_i^{'} = y_i - y_{mc}$$

Určení úhlu rotace transformovaného systému:

$$\tan\theta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} - \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'2} - \sum_{i=1}^{n} y_i^{'2}\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} \sum_{i=1}^{n} y_i^{'}\right)^2}}{2\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} \sum_{i=1}^{n} y_i^{'}}$$

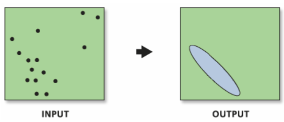
Pozor na interpretaci hodnoty úhlu rotace !

## Odvození směrodatné elipsy odchylek

3. Získáme-li úhel θ, potom lze vyjádřit hodnoty odchylek podél x a y osy:

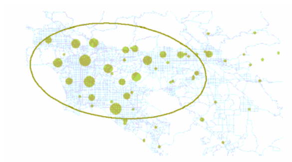
$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{'}\cos\theta - y_i^{'}\sin\theta)^2}{n}}$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{'}\sin\theta - y_i^{'}\cos\theta)^2}{n}}$$




## Směrodatná elipsa odchylek – příklady použití

- Množství kontaminující látky ve vzorku studní může indikovat trend jejích šíření
- Porovnání velikosti, tvaru resp. překryvu elips k porovnání změn v rozšiřování etnik či rostlinných resp. živočišných společenstev
- Epidemiologie – vystižení hlavního trendu šíření onemocnění v populaci



Jakou další užitečnou informaci lze získat výpočtem směrodatné elipsy odchylek pokud otestujeme, že studovaným jev má normální rozdělení?

## Poznámky k deskripci bodů

- hustota bodů v ploše (počet/plocha = n/R),
- charakteristiky založené na vzdálenosti mezi body či na relativních vzdálenostech jako je např. $d_i/d_{max}$.
- použití – porovnávání (např. v čase)
- při výpočtech v relativně malých oblastech používáme euklidovskou geometrii, protože se v nich neprojeví zakřivení Země.
- uvedené míry mohou být aplikovány i na plochy. Co je k tomu potřeba?