

## **F4110 Kvantová fyzika atomárních soustav**

**Přírodovědecká fakulta**

jaro 2009

**Rozsah**

2/1. 4 kr. (příf plus uk plus > 4). Ukončení: zk.

**Vyučující**

prof. Bedřich Velický, CSc. (přednášející)

**Garance**

prof. RNDr. Michal Lenc, Ph.D.

**Rozvrh**

St 13:00--13:50 **F3** St 14:00--15:50 **F3**

**Předpoklady**

( **F1040** Mechanika a molekulová fyzika && **F2070** Elektřina a magnetismus )

| ( **F1030** Mechanika a molekulová fyzika && **F2050** Elektřina a magnetismus )

**Anotace**

Tento kurs je pojat jako proseminář doplňující přednášky

Úvod do fyziky mikrosvěta F4100 nebo F4050.

**letní semestr 2008 - 2009**

**F4110**

**Kvantová fyzika atomárních soustav  
letní semestr 2008 - 2009**

**F4110**

**Kvantová fyzika atomárních soustav  
letní semestr 2008 - 2009**

**Přednášející**

**Bedřich Velický ÚTFA**

**velicky@karlov.mff.cuni.cz**

**F4110**  
**Kvantová fyzika atomárních soustav**  
**letní semestr 2008 - 2009**

**Přednášející**  
**Bedřich Velický ÚTFA**  
**velicky@karlov.mff.cuni.cz**

- Prosím e-mailovou korespondenci vést na tuto adresu
- Prosím do 23. února poslat e-mail se jménem/identifikací

**F4110**

**Kvantová fyzika atomárních soustav  
letní semestr 2008 - 2009**

## **Rozvrh**

**St 13:00--13:50 F3 cvičení**

**St 14:00--15:50 F3 přednáška**

**F4110**

**Kvantová fyzika atomárních soustav**

**letní semestr 2008 – 2009**

**PLÁNOVANÉ PŘEDNÁŠKY**

1	Měřítka kvantového světa	18.2.
2	Brownův pohyb	25. 2.
3	Langevinova rovnice pro Brownův pohyb	4.3.
4	Elektronová optika	11. 3.
5	Synchrotronové záření v kosmu a na Zemi	18. 3.
6	Neutronová interference	25. 3.
7	Kvantová interferometrie (II. část)	1. 4.
8	Jev Bohma a Aharonova	8. 4.
9	Vibrace v polyatomických molekulách	15. 4.
10	Molekulové vibrace a skleníkový jev	22. 4.
11	Inversní linie čpavku: Sláva a pád	29. 4.
12	Fyzika nízkých a extrémně nízkých teplot	6. 5.
13	Studené atomy: BE kondensace	13. 5.
14	Zpomalené a zastavené světlo	20. 5.

**F4110**

**Kvantová fyzika atomárních soustav  
letní semestr 2008 – 2009**

**PODMÍNKY PRO VYKONÁNÍ ZKOUŠKY**

**Podmínky**

1. Úspěšné vykonání písemného testu na posledním cvičení nebo jednom ze zápočtových termínů
2. Zpracování a přednesení dílčí otázky k některému z přednesených témat po dohodě s přednášejícím

**Termíny**

Termíny zkoušky budou

- vyhlášeny na poslední přednášce a
- vystaveny na SIS

**F4110**  
**Kvantová fyzika atomárních soustav**  
**letní semestr 2008 - 2009**

**I.**  
**Měřítko kvantového světa**

**KOTLÁŘSKÁ 18. ÚNORA 2009**



# Úvodem

- Dnes: čekám, až trochu postoupí hlavní přednášky
- Odvolám se na znalosti středoškolské a z předchozí části Kursu
- Cíl ... orientace v nepřehledné oblasti atomárních soustav
- Fundamentální konstanty a zavedení přirozených jednotek
- Rozměrové a jiné kvalitativní úvahy
- Zamyšlení nad Bičákovým diagramem velikostí a hmotností objektů

*Klasický a kvantový svět*

*vs.*

*mikrosvět a makrosvět*

## *Klasický a kvantový svět*

Kvantové zákony ovládají titěrné mikroobjekty,  
jako jsou atomy a molekuly.

V každodenním životě však kvantové efekty  
zpravidla nepozorujeme.

Kde je rozhraní obou světů a jak je můžeme  
rozpoznat a charakterisovat?

## *Klasický a kvantový svět*

Kvantové zákony ovládají titěrné mikroobjekty,  
jako jsou atomy a molekuly.

V každodenním životě však kvantové efekty  
zpravidla nepozorujeme.

Kde je rozhraní obou světů a jak je můžeme  
rozpoznat a charakterisovat?

*Moje stará formulace*

## *Nový pokus*

Makrosvět i mikrosvět patří z definice do světa fyziky. První se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence ztotožnit jej s přirozeným světem. Druhý svět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly.

## *Nový pokus*

Makrosvět i mikrosvět patří z definice do světa fyziky. První se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence ztotožnit jej s přirozeným světem. Druhý svět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly.

## *Nový pokus*

Makrosvět i mikrosvět patří z definice do světa fyziky. První se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence ztotožnit jej s přirozeným světem. Druhý svět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly.

## *Nový pokus*

Makrosvět i mikrosvět patří z definice do světa fyziky. První se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence ztotožnit jej s přirozeným světem. Druhý svět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly.



## *Nový pokus*

Makrosvět i mikrosvět patří z definice do světa fyziky. První se týká předmětů a dějů, se kterými se můžeme setkat v každodenním životě, často je proto tendence ztotožnit jej s přirozeným světem.

Druhý svět tvoří titěrné mikroobjekty, jako jsou atomy a molekuly.

Umíme však rozmezí těchto různých světů přesně rozpoznat a charakterisovat?

# *Fyzikální svět*

přirozený  
svět

fyzikální  
svět

# *Fyzikální svět*



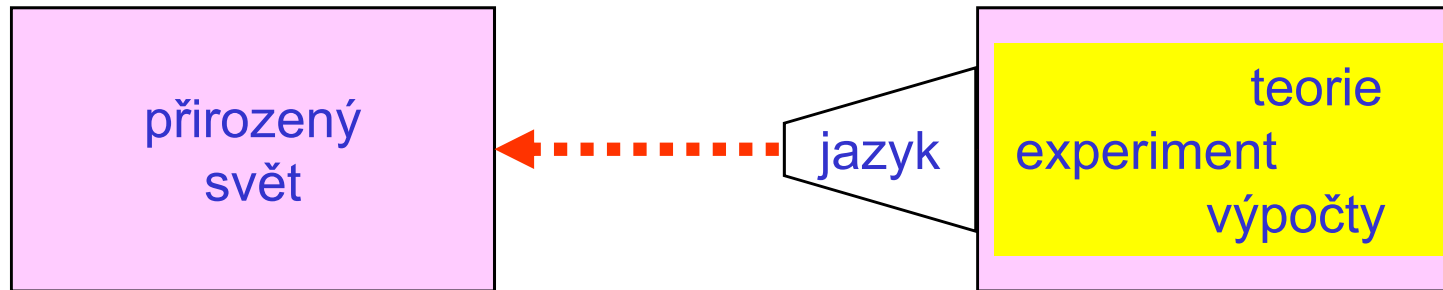
# *Fyzikální svět*



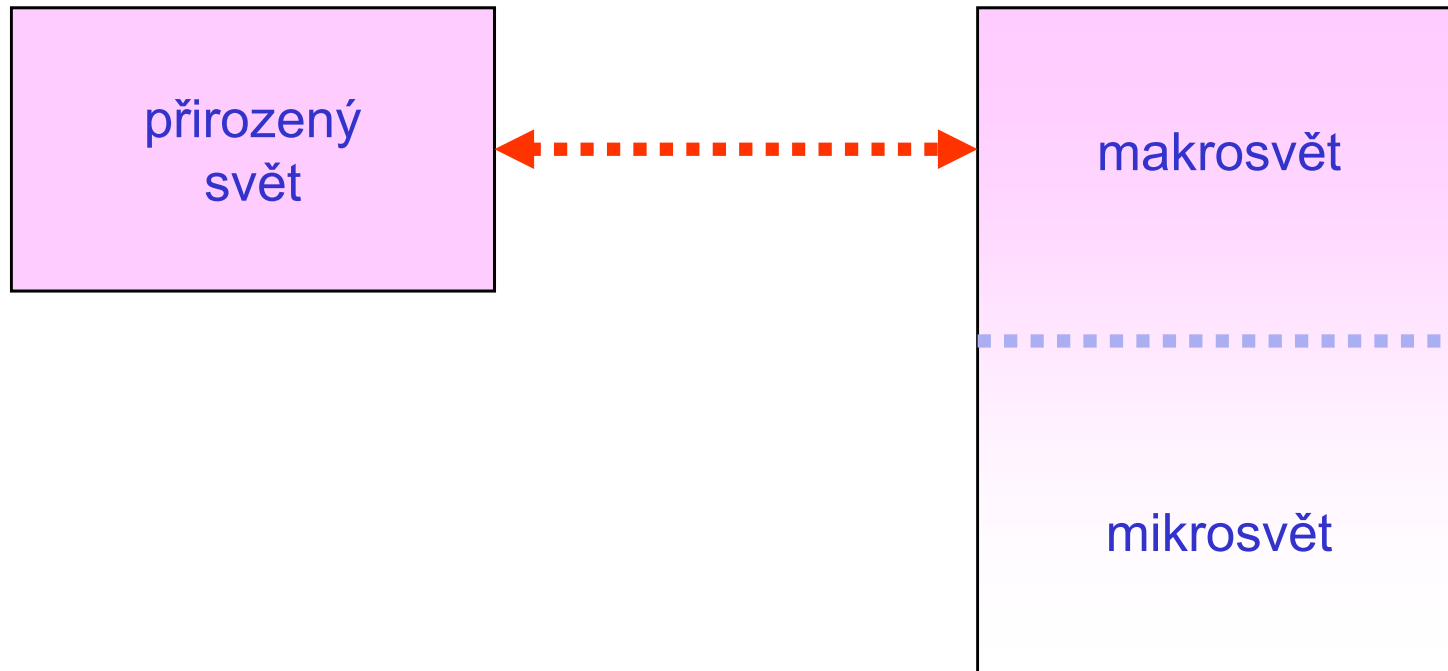
# *Fyzikální svět*



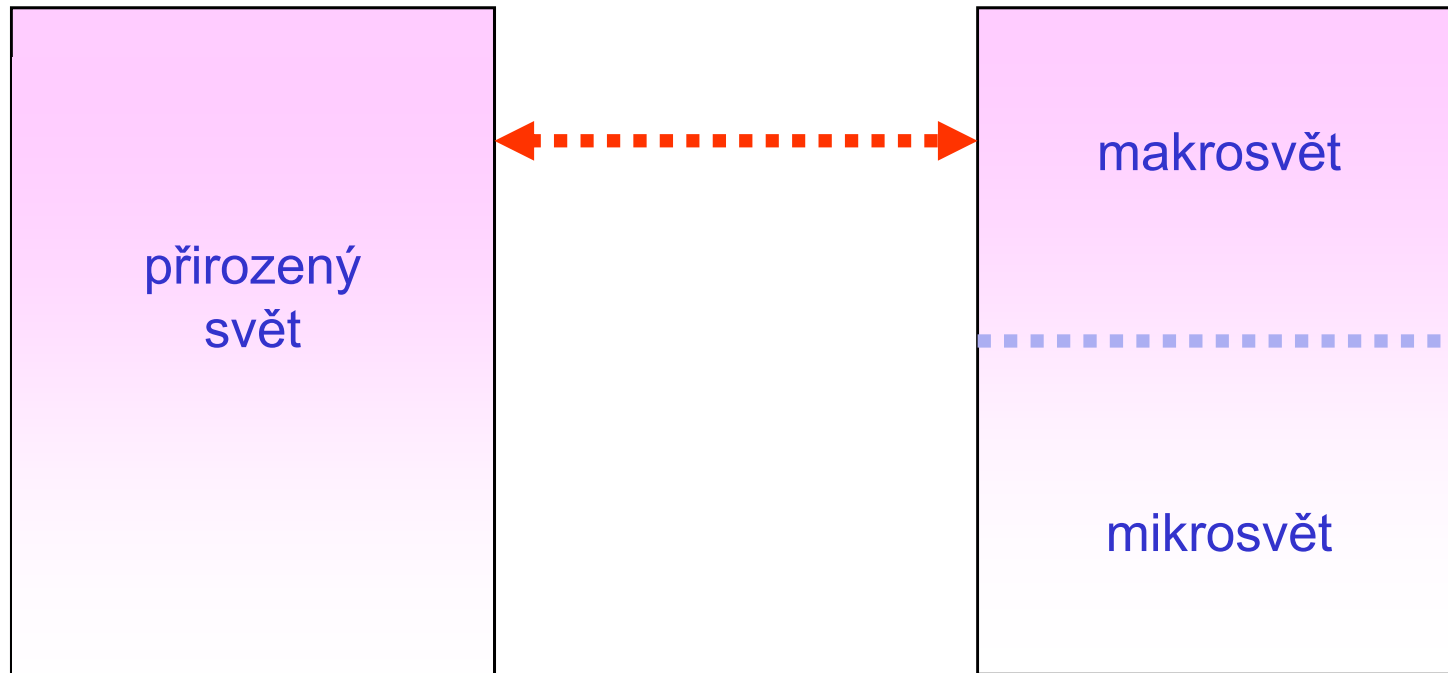
# *Fyzikální svět*



# *Fyzikální svět*

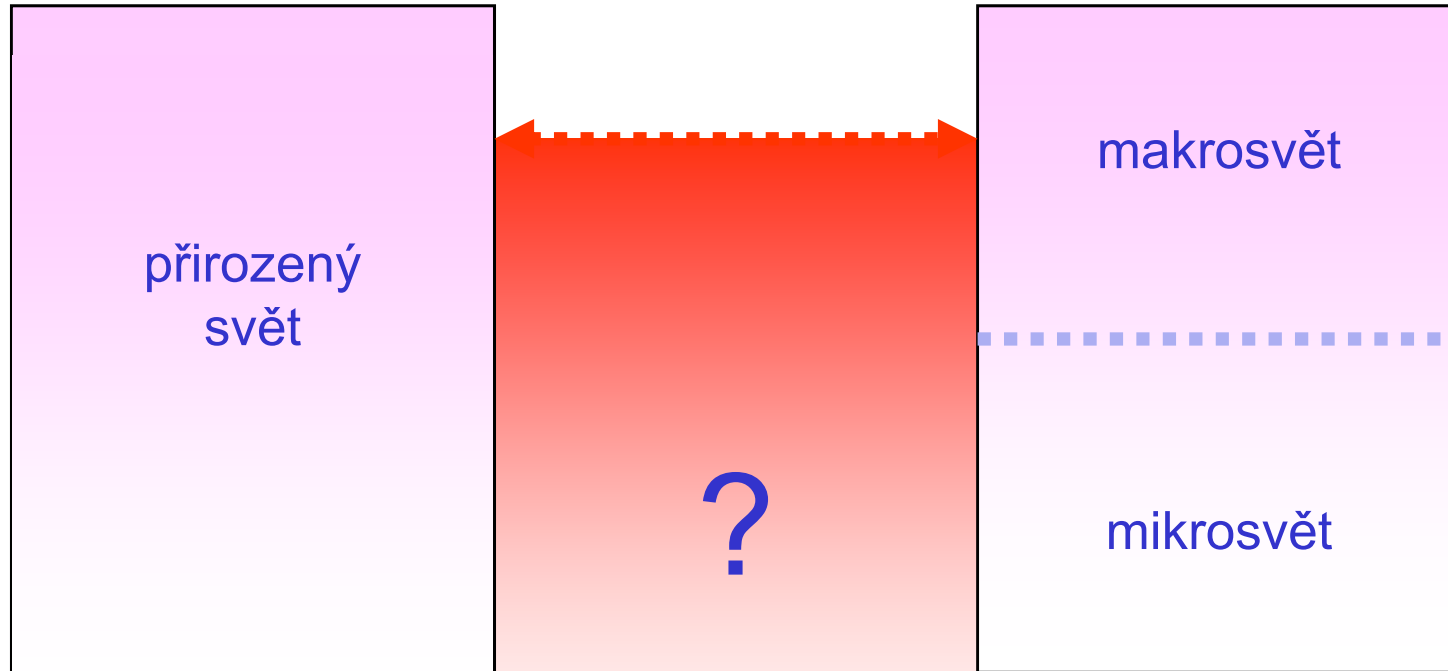


# *Fyzikální svět*

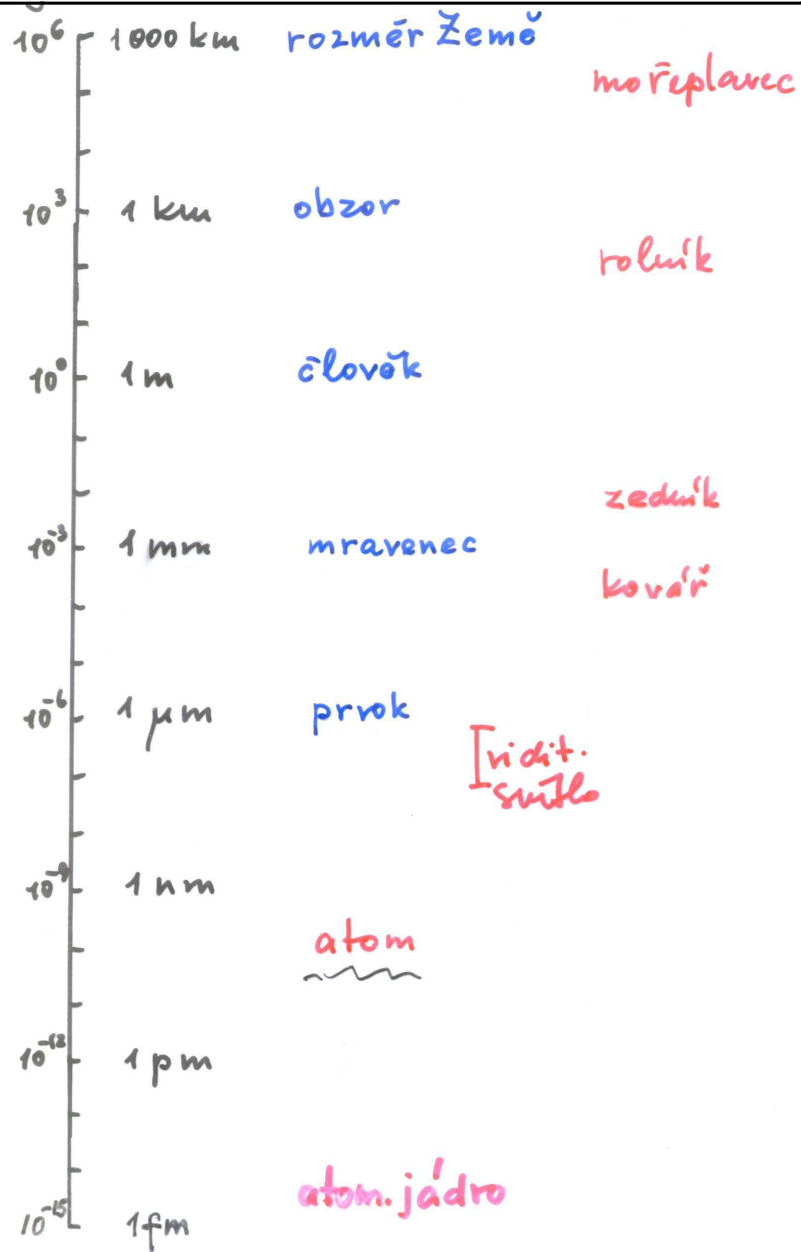


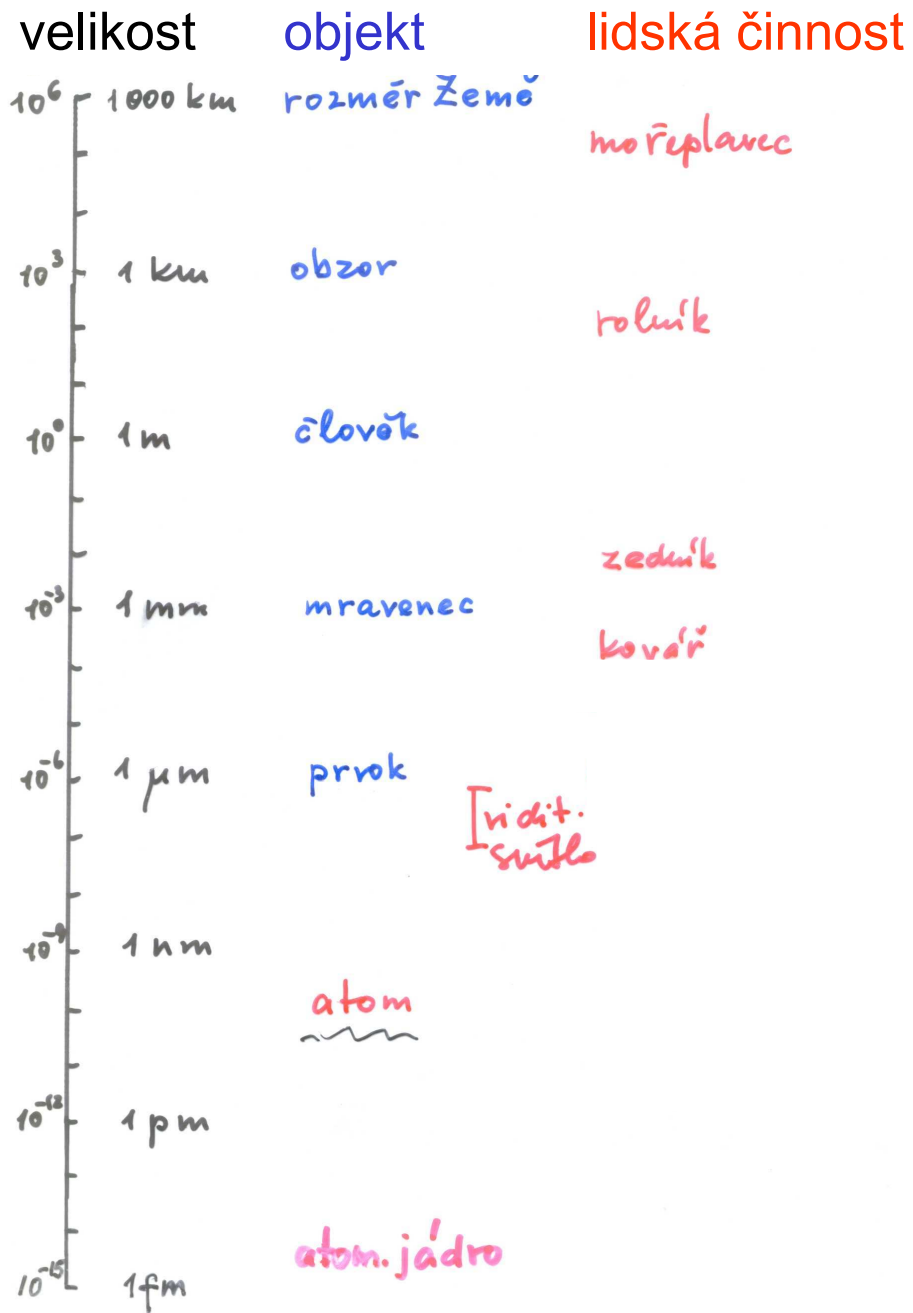


# *Fyzikální svět*

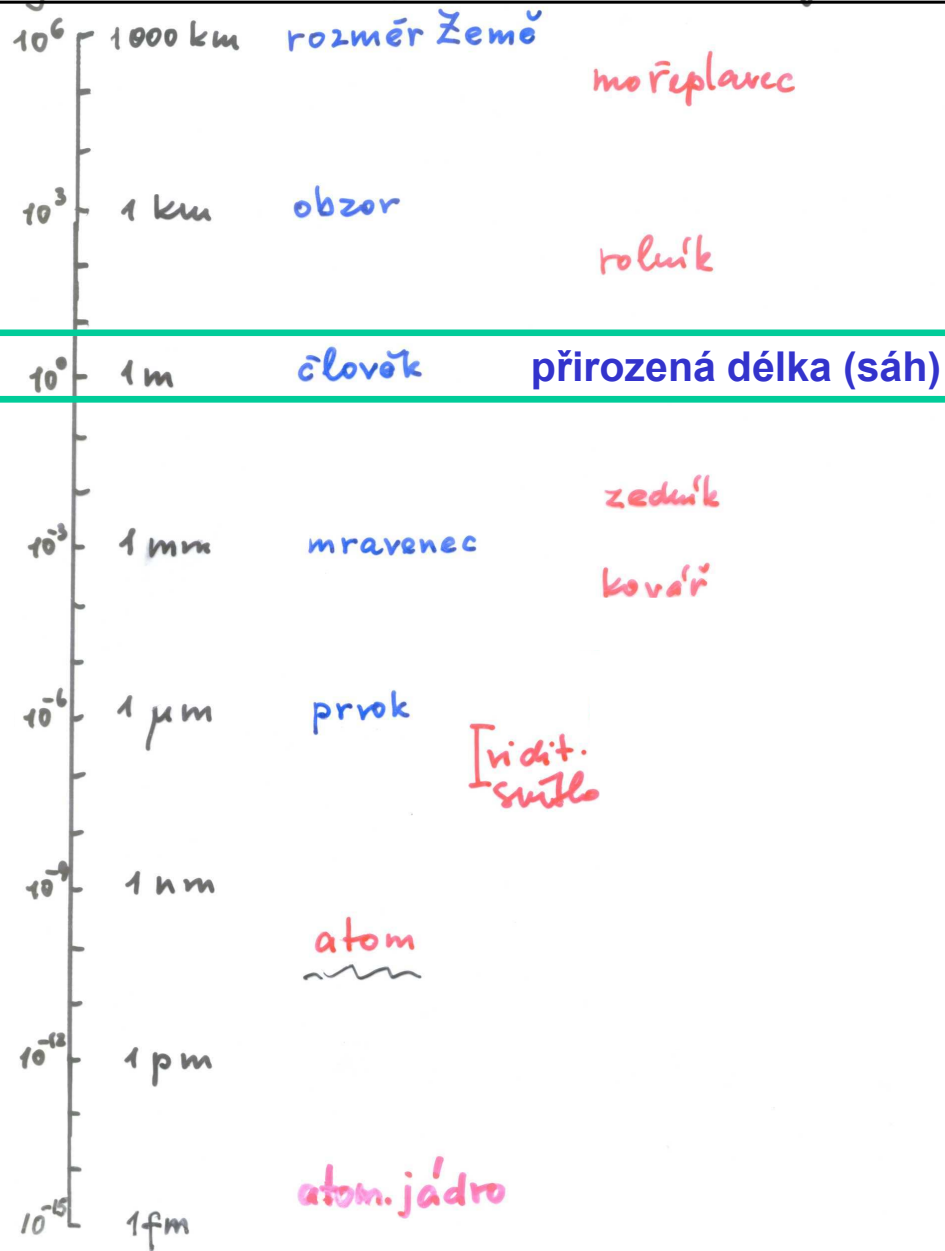


# Logaritmická škála velikosti objektů

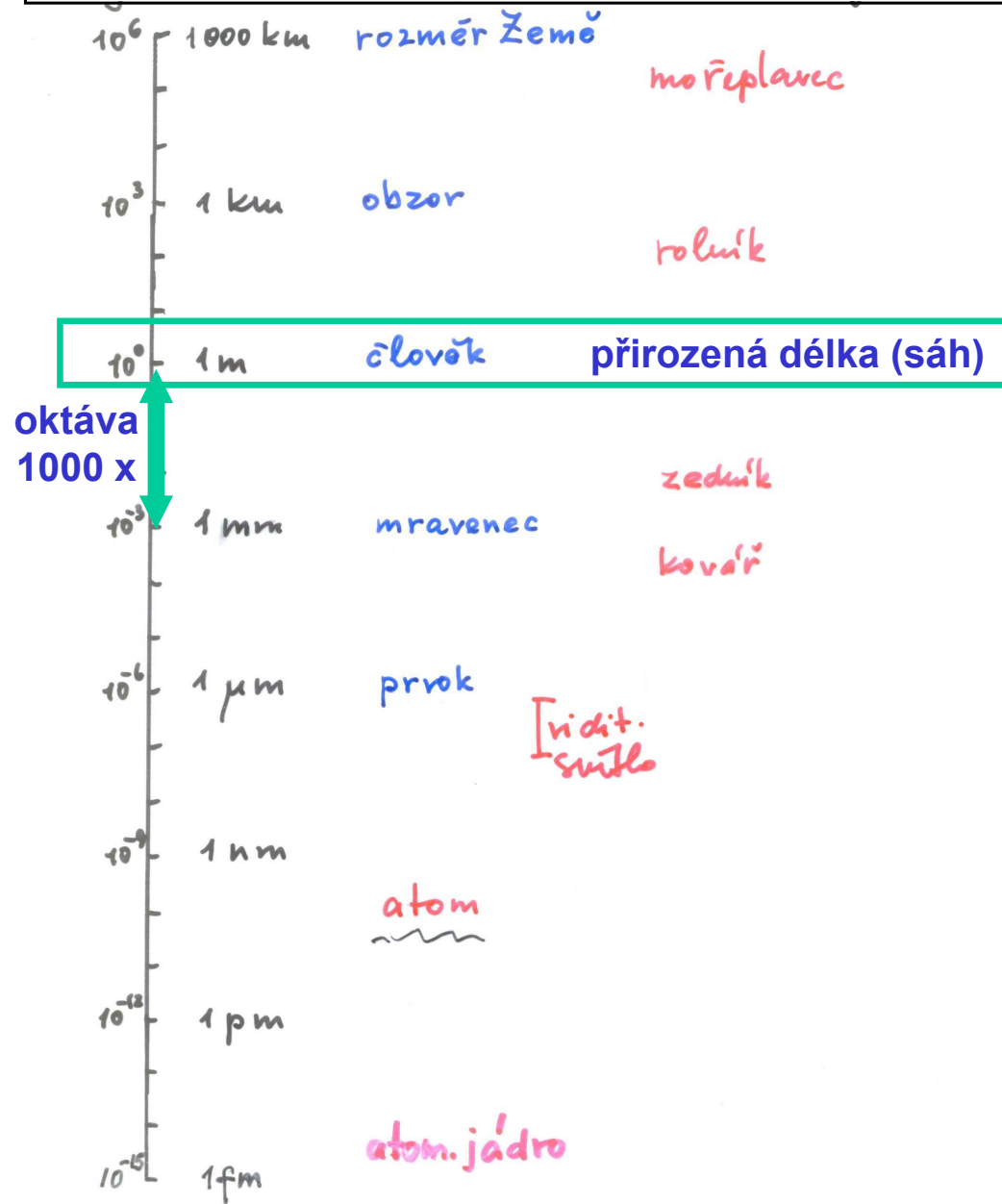




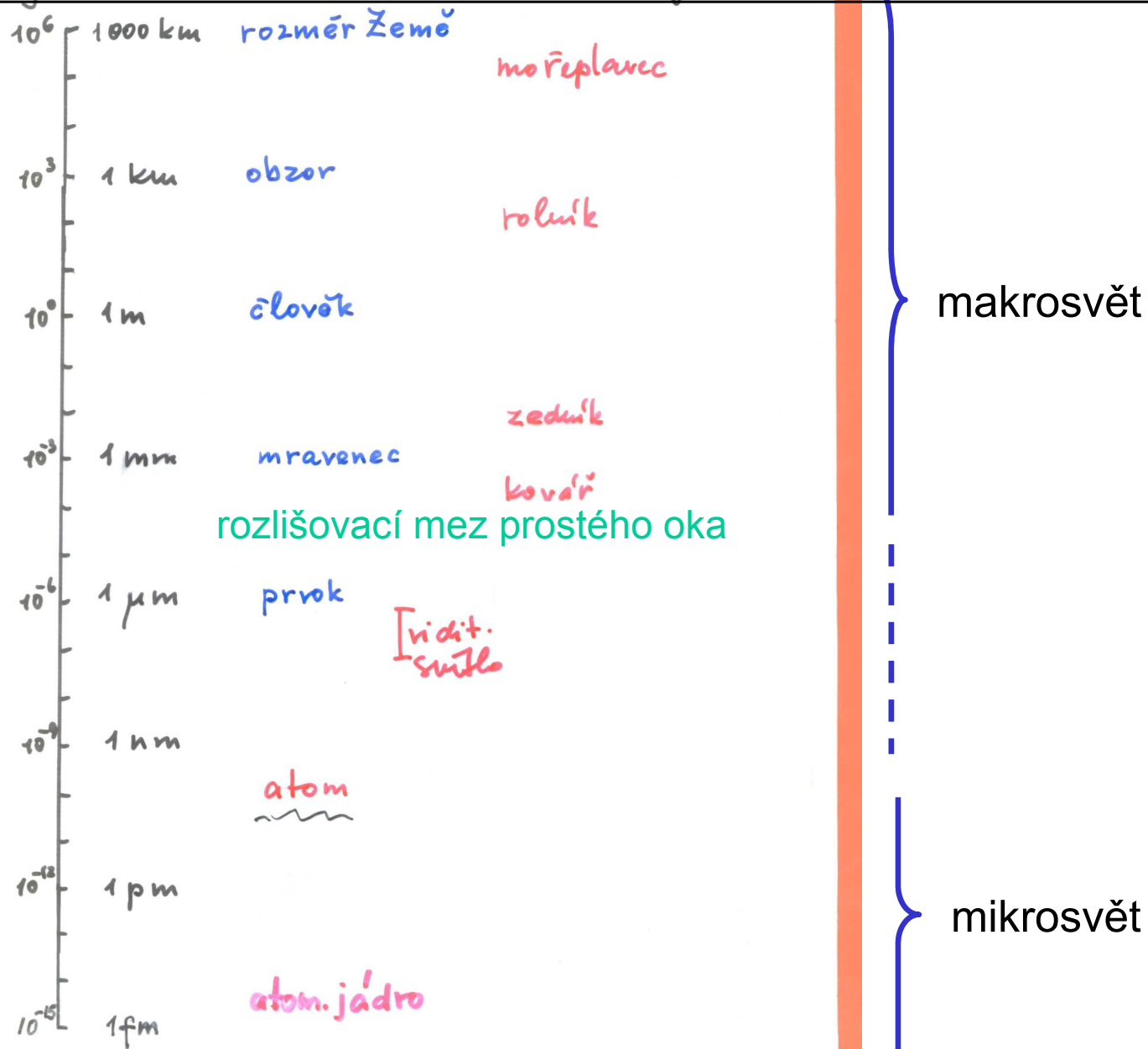
# Logaritmická škála velikosti objektů



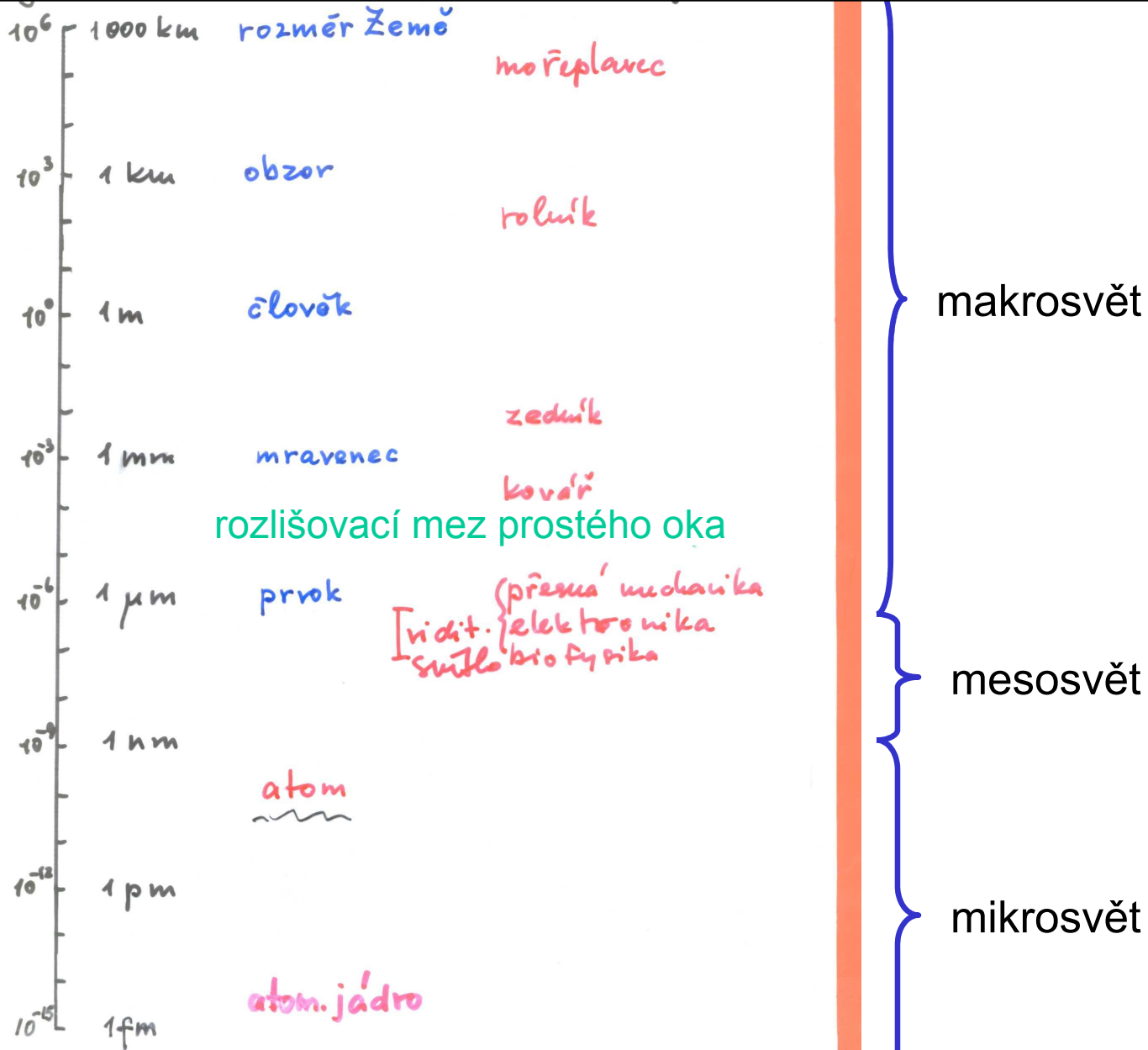
# Logaritmická škála velikosti objektů



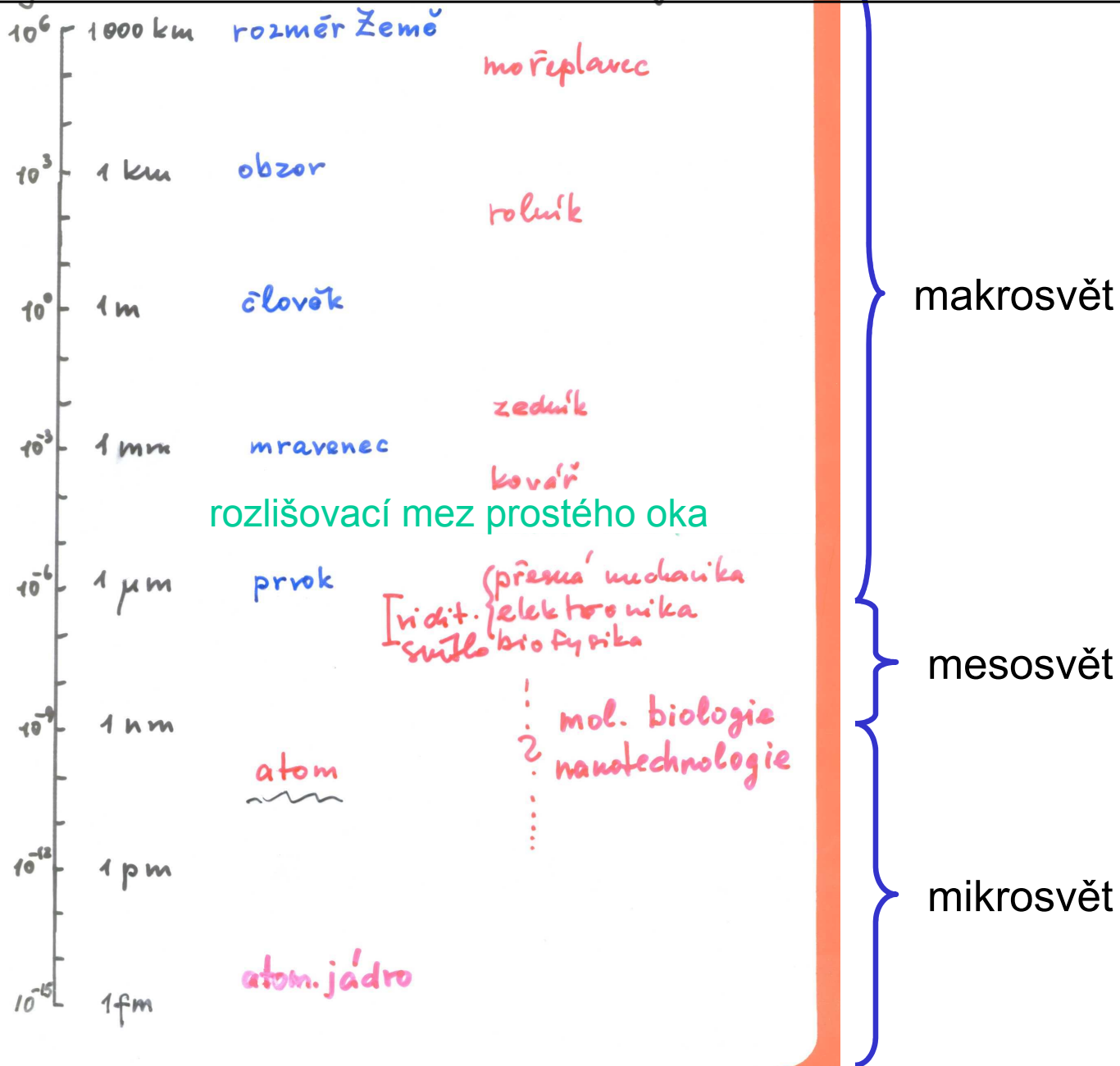
# Logaritmická škála velikosti objektů



# Logaritmická škála velikosti objektů

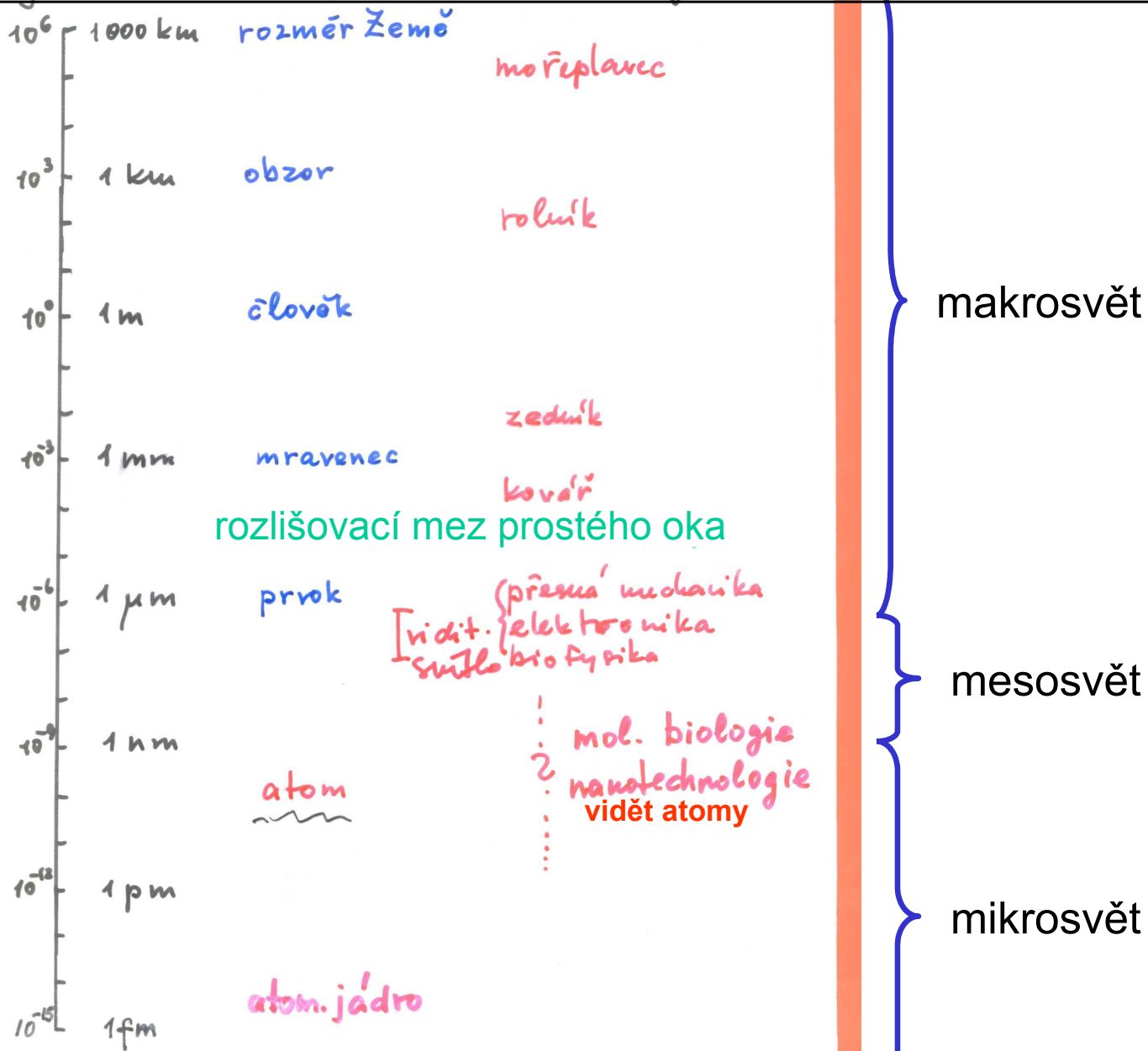


# Logaritmická škála velikosti objektů





# Logaritmická škála velikosti objektů

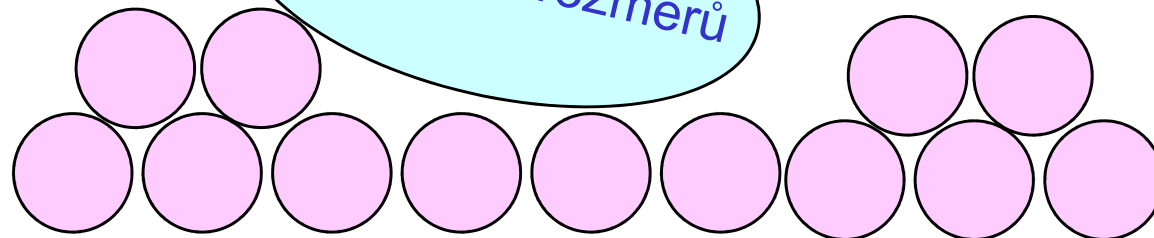


# Vidět atomy

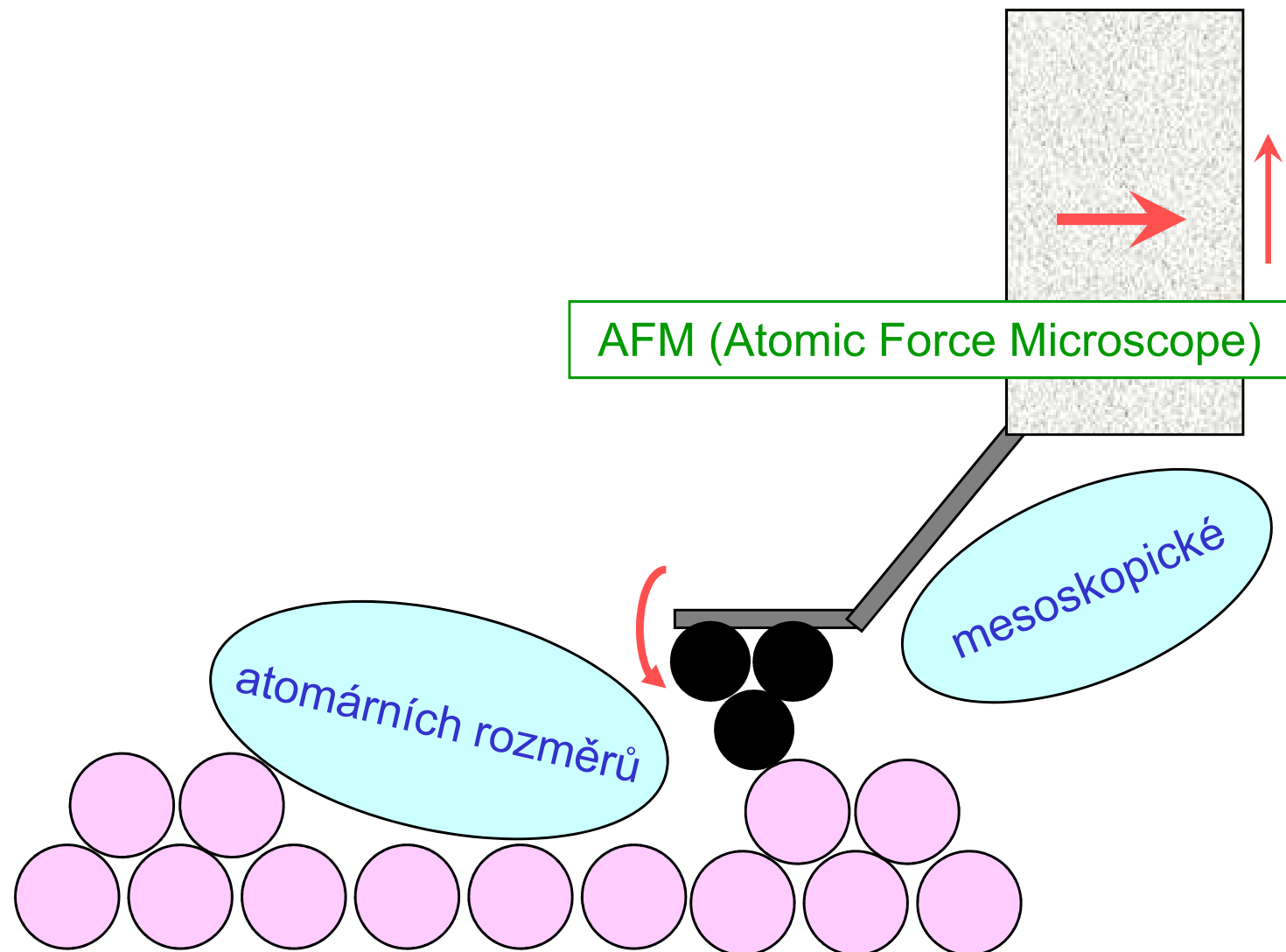
Stačí dvaapůl oktávy

AFM (Atomic Force Microscope)

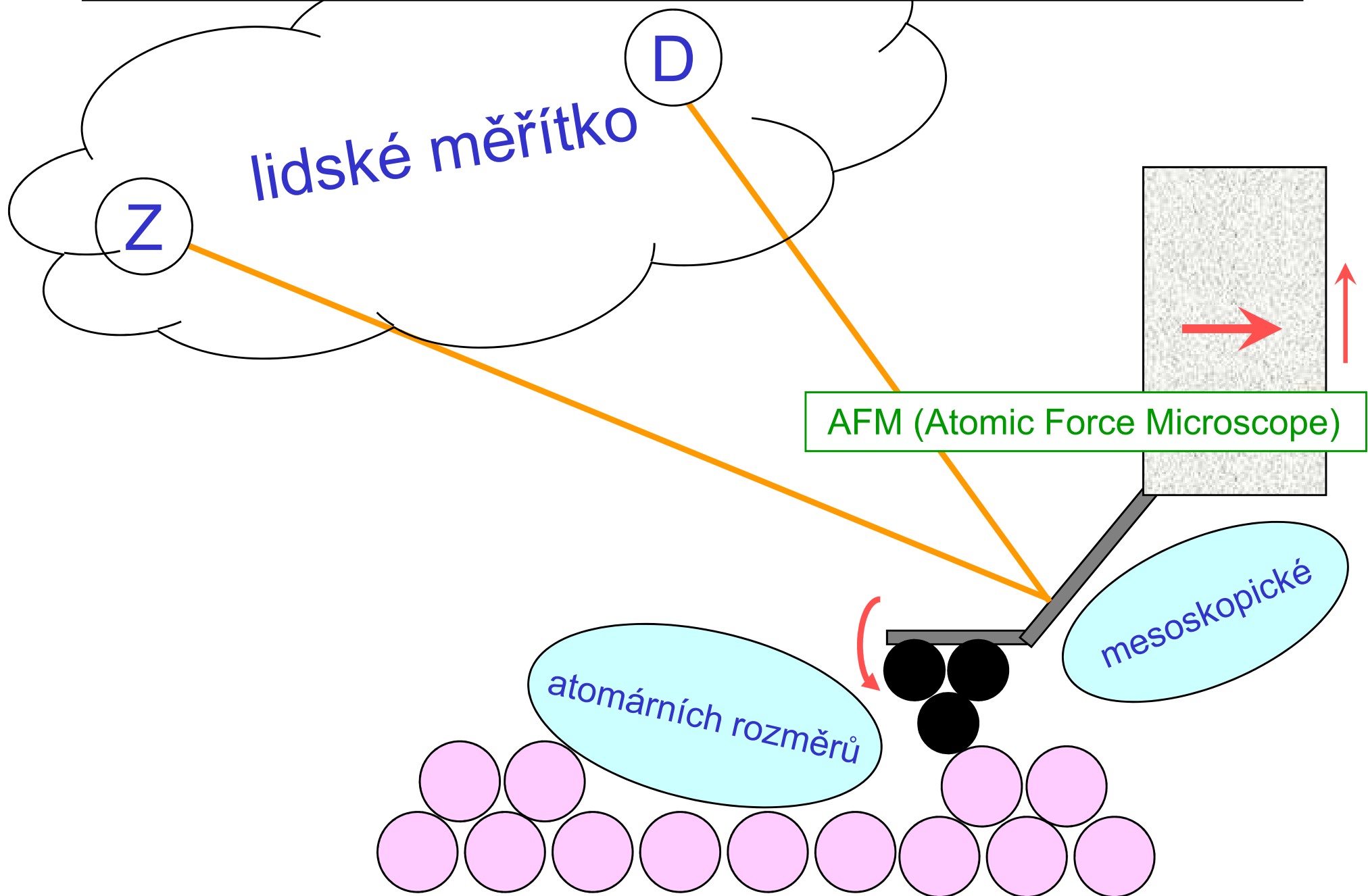
atomárních rozměrů



# Vidět atomy

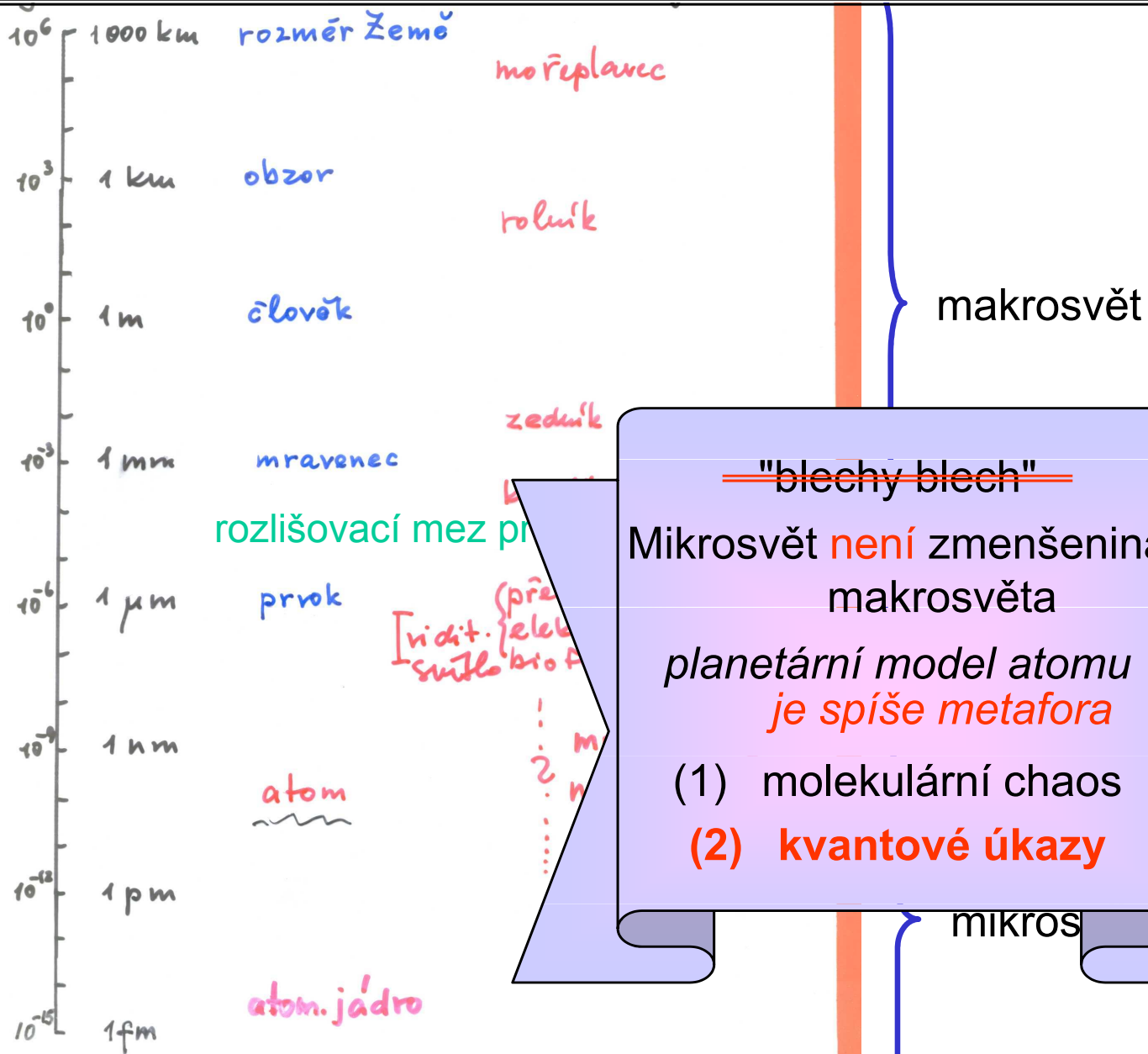


# Vidět atomy





# Obraz "moderní" fyziky je jiný



# Obraz "moderní" fyziky je jiný



makrosvět

~~"blechy blech"~~  
 Mikrosvět **není** zmenšenina makrosvěta  
 planetární model atomu  
 je **spíše metafora**  
 (1) molekulární chaos  
 (2) **kvantové úkazy**

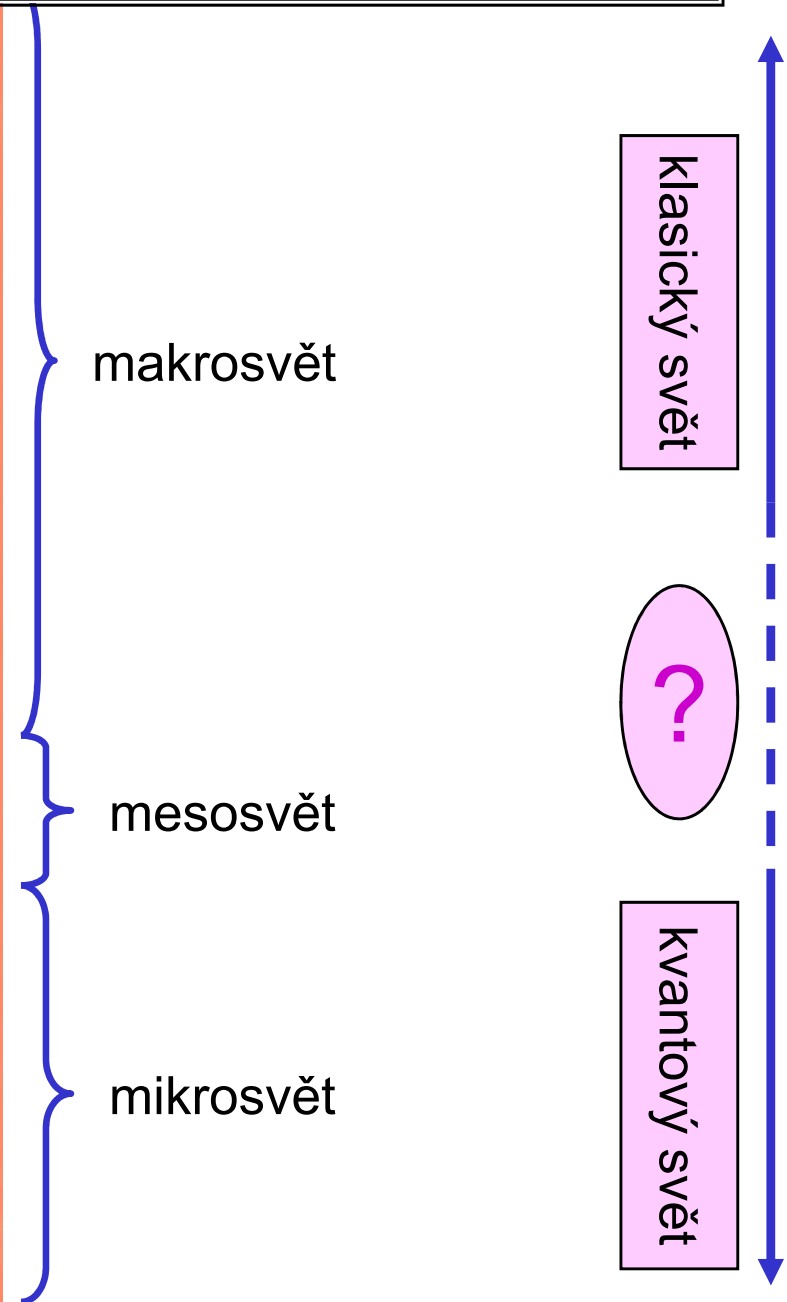
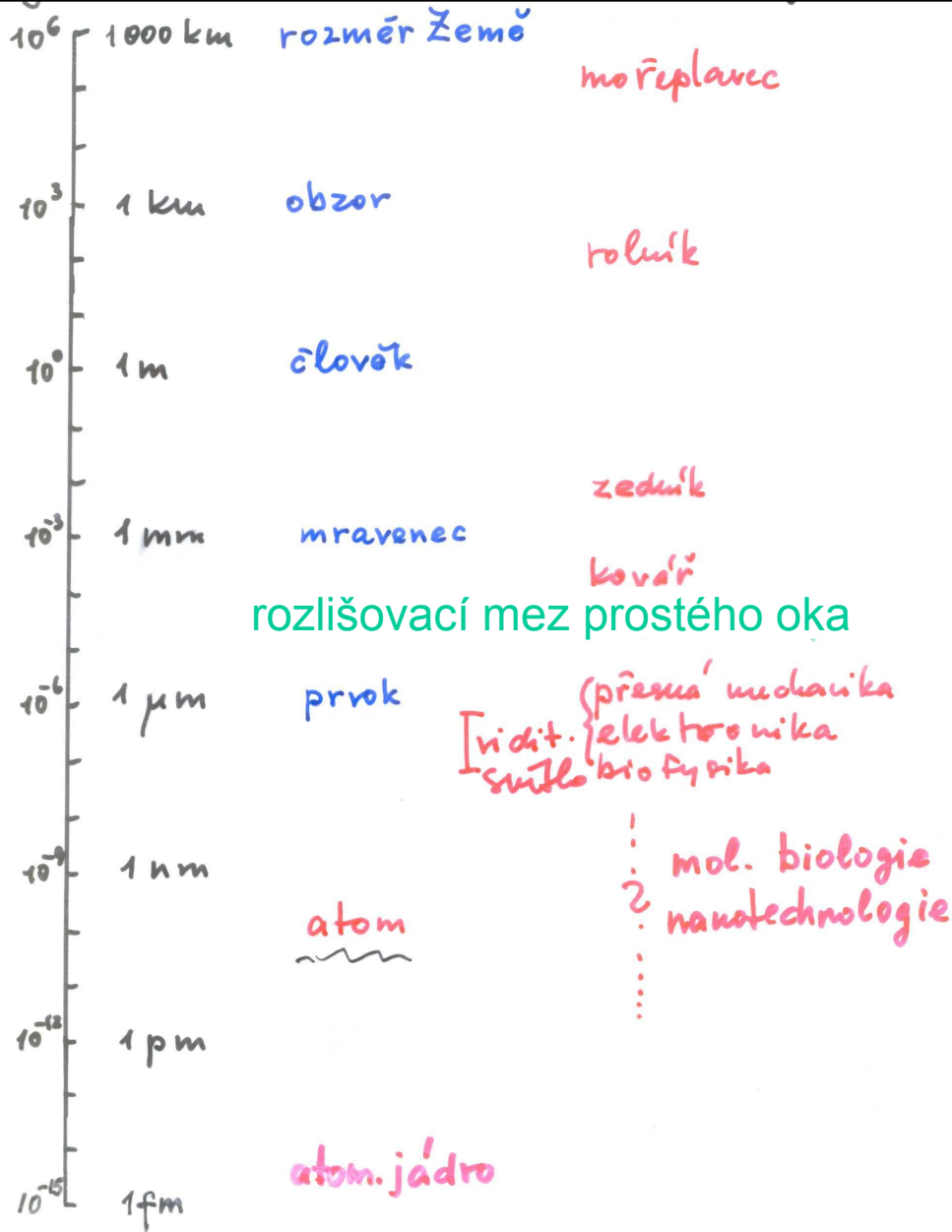
mikros

Klasický svět



Kvantový svět

# Souběh dvou stupnic





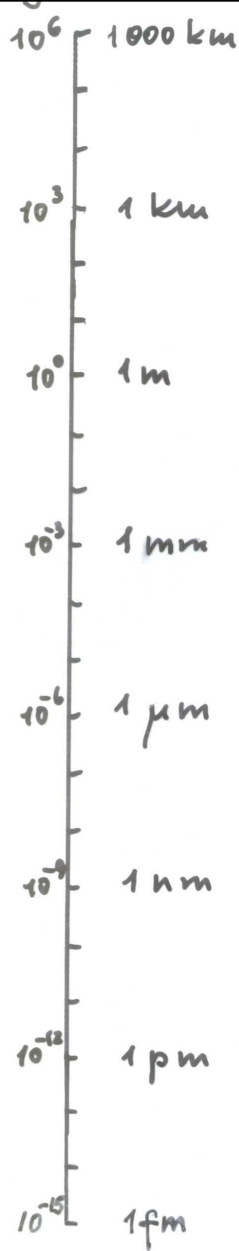
# THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

CLASSICAL DOMAIN



# Klasický a kvantový svět



**KVANTOVÉ OBJEKTY**  
makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické  
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

mikroskopické  
molekuly  
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

makrosvět

mesosvět

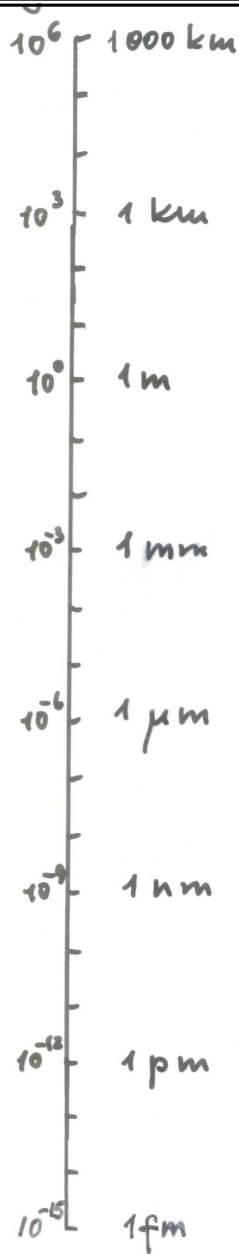
mikrosvět

Klasický svět

Kvantový svět



# Klasický a kvantový svět



**KVANTOVÉ OBJEKTY**  
makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické

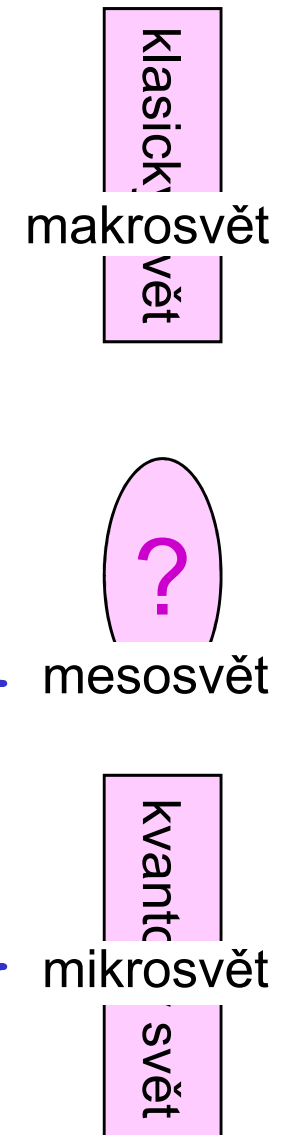
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

mikroskopické

molekuly  
atomy a ionty

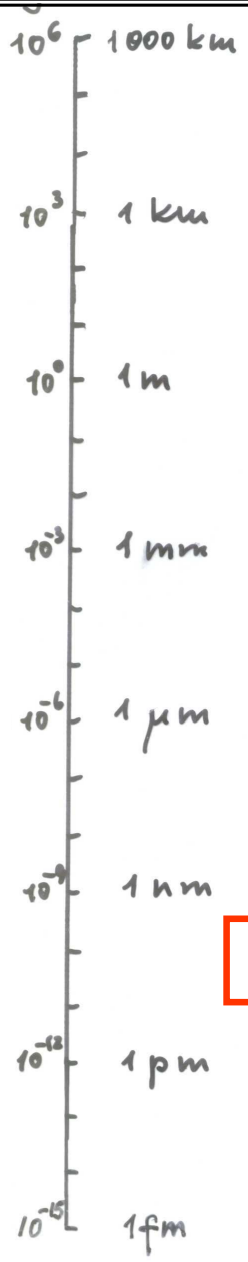
atomová jádra

subjaderné objekty



- KVANTOVÉ ÚKAZY**
- kvantování energií
  - vlnové šíření – interference, difrakce ...
  - provázané stavy
  - korelované chování identických částic

# Klasický a kvantový svět



**KVANTOVÉ OBJEKTY**  
makroskopické

teleportace přes Dunaj

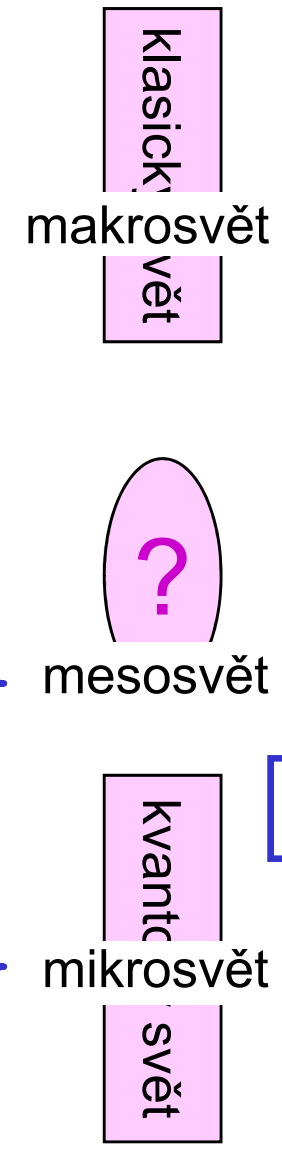
supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

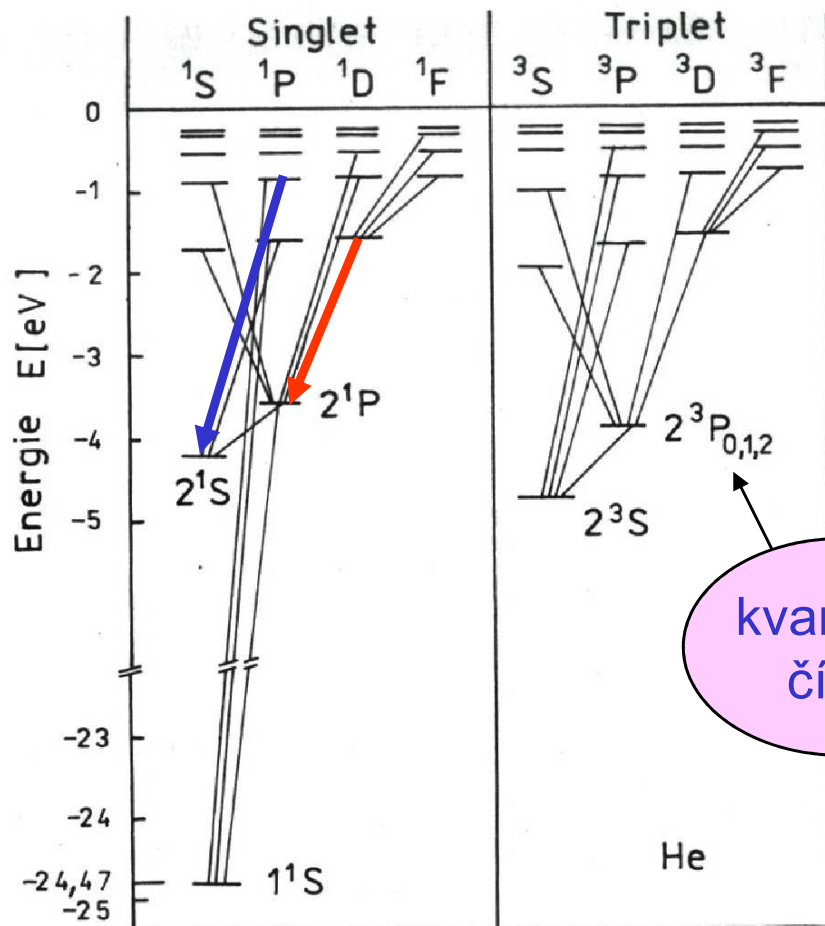
mikroskopické

molekuly  
atomy a ionty  
atomová jádra  
subjaderné objekty



- KVANTOVÉ ÚKAZY**
- kvantování energií
  - vlnové šíření – interference, difrakce ...
  - provázané stavy
  - korelované chování identických částic

# Kvantování energie v atomu (helia)



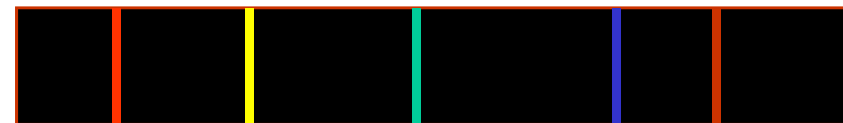
kvantová čísla

Bohrova podmínka

$$h\nu = E_1 - E_2$$

dává fotony s určitou energií,  
čili ostré spektrální linie

Uvidíme něco takového:

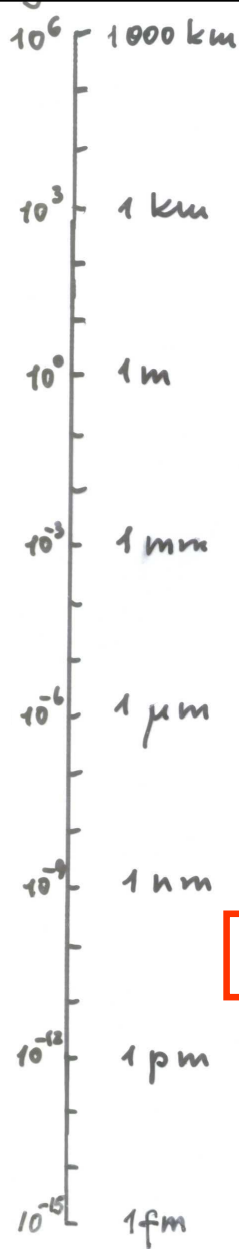


Celkový spin 0

Celkový spin 1

2-elektronové hladiny

# Klasický a kvantový svět



**KVANTOVÉ OBJEKTY**  
makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické  
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

mikroskopické  
molekuly  
atomy a ionty  
atomová jádra  
subjaderné objekty

klasický svět  
makrosvět



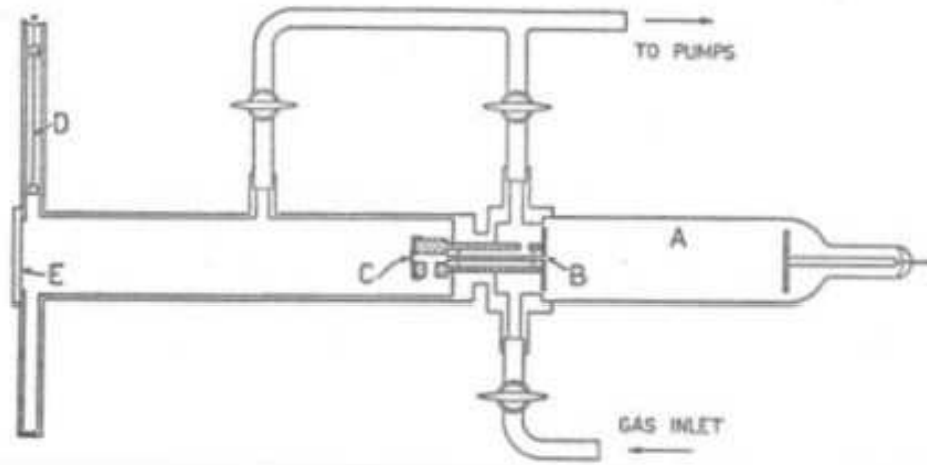
mesosvět

kvantový svět  
mikrosvět

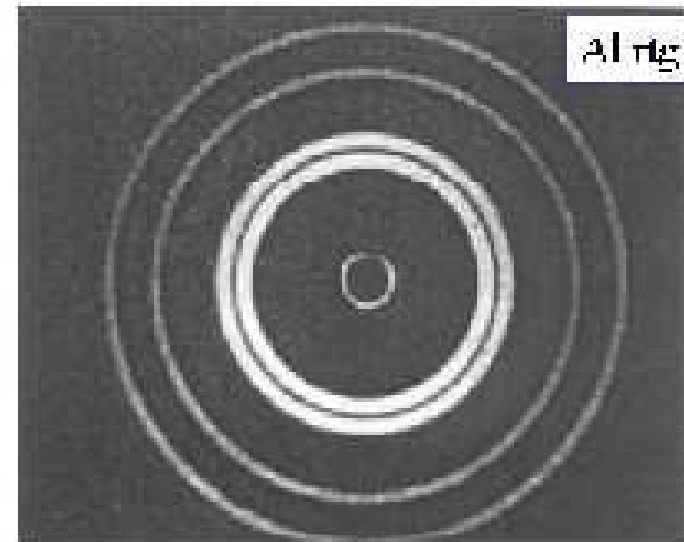
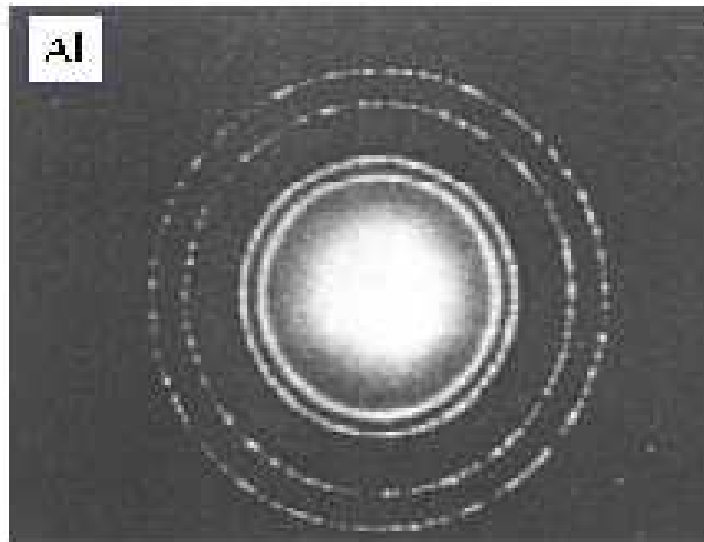
## KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

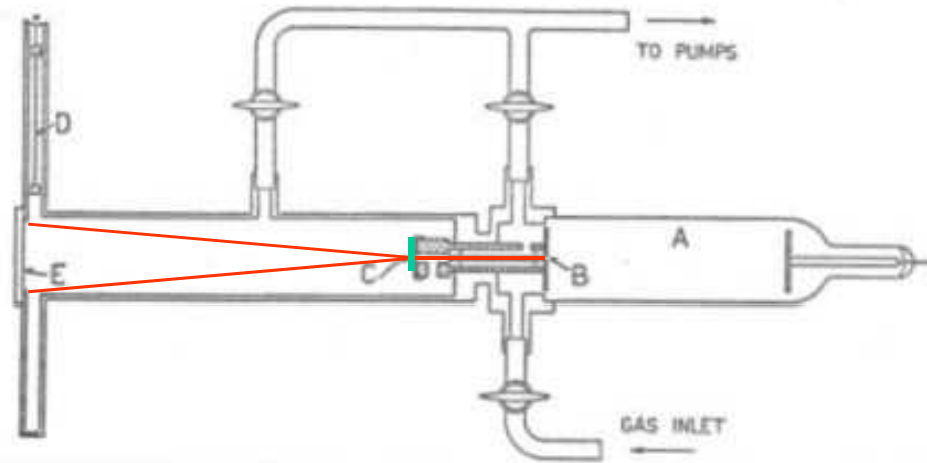
# *Difrakce rychlých elektronů na hliníkové folii*



G.P. Thomson 1927



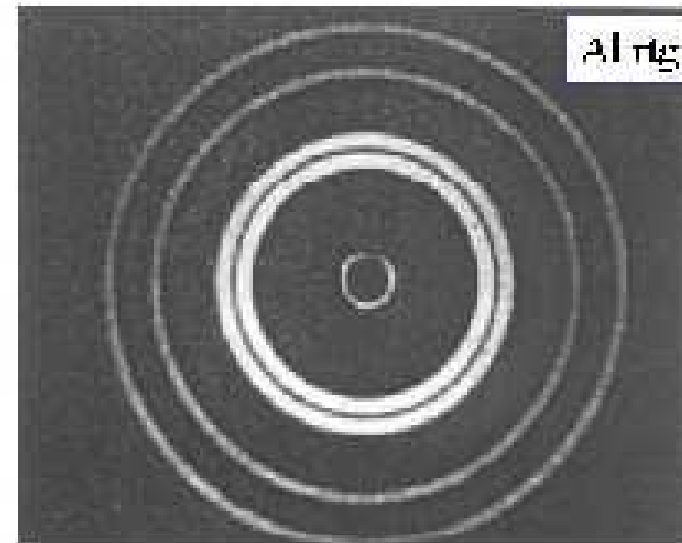
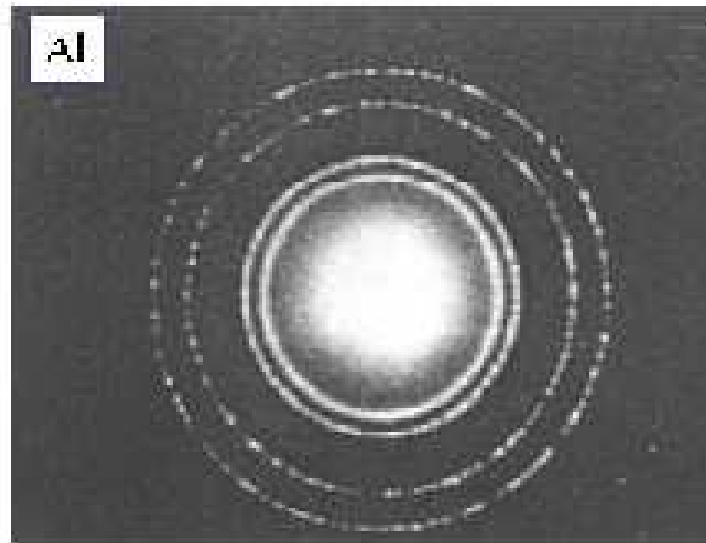
# *Difrakce rychlých elektronů na hliníkové folii*



G.P. Thomson 1927

elektrony

Röntgenovy paprsky





# THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

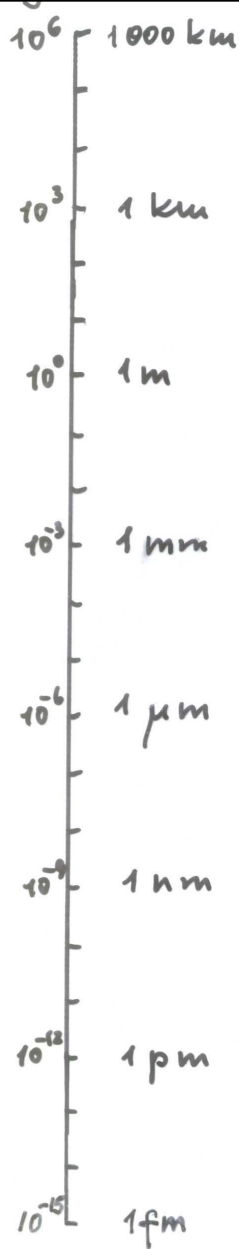
CLASSICAL DOMAIN



*Rozmazané rozmezí  
klasického a kvantového světa*

**To jest:  
makroskopické se nekryje s klasickým,  
mikroskopické se nekryje s kvantovým**

# Klasický a kvantový svět



## KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

## meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

## mikroskopické

molekuly  
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět  
makrosvět



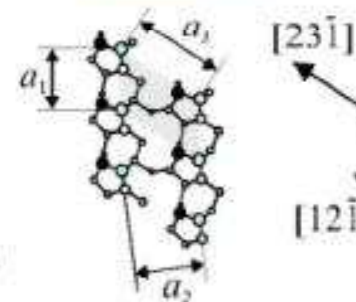
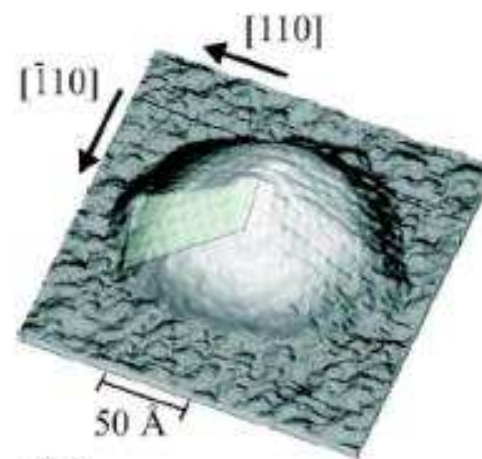
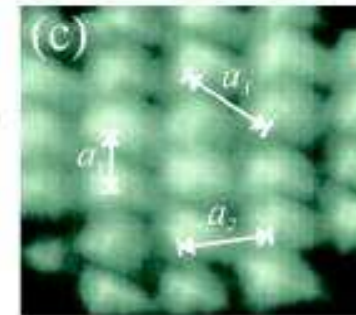
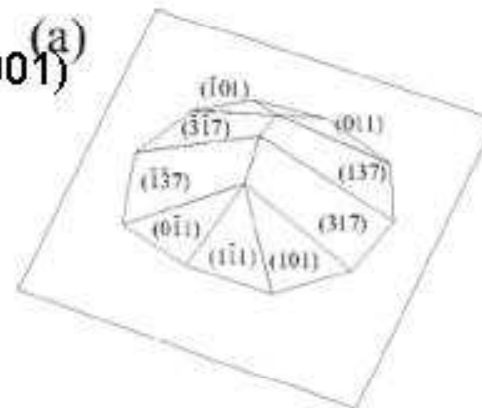
mesosvět

kvantový svět  
mikrosvět

## KVANTOVÉ ÚKAZY

- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

Kvantové tečky InAs na GaAs (001)  
(STM)



$$a_1 = 6,5 \pm 0,1 \text{ \AA}$$

$$a_2 = 9,0 \pm 0,3 \text{ \AA}$$

$$a_3 = 10,5 \pm 0,2 \text{ \AA}$$

$$\angle(a_1, a_2) = 82,4^\circ \pm 0,7^\circ$$

(d)

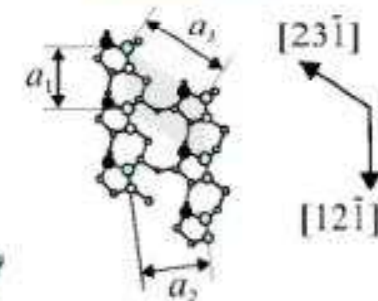
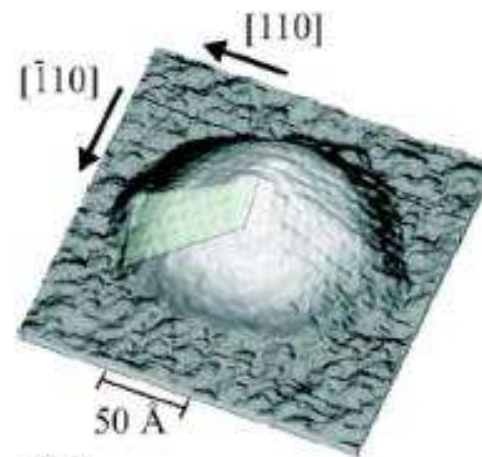
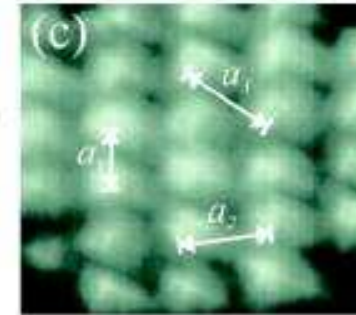
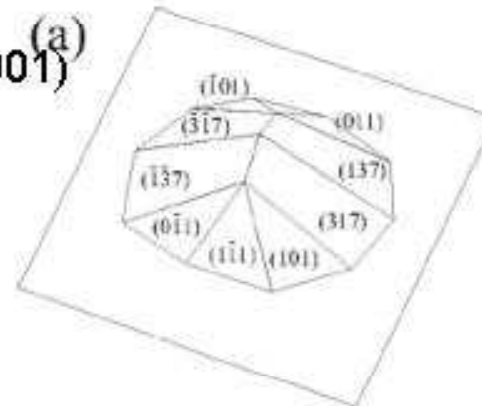
# Kvantové tečky

Kvantové tečky InAs na GaAs (001)  
(STM)

UMĚLÉ ATOMY  
(dimense 0)

průměr tečky 10 nm  
průměr atomu 0.3 nm

elektrony jsou v  
resonančních  
vlnových stavech  
s kvantovanou  
energií



$$a_1 = 6,5 \pm 0,1 \text{ \AA}$$

$$a_2 = 9,0 \pm 0,3 \text{ \AA}$$

$$a_3 = 10,5 \pm 0,2 \text{ \AA}$$

$$\angle(a_1, a_2) = 82,4^\circ \pm 0,7^\circ$$

(d)

*Science* 3 February 2006:  
Vol. 311. no. 5761, pp. 636 - 639

### Optical Signatures of Coupled Quantum Dots

E. A. Stinaff,<sup>1</sup> M. Scheibner,<sup>1</sup> A. S. Bracker,<sup>1</sup> I. V. Ponomarev,<sup>1</sup> V. L. Korenev,<sup>2</sup> M. E. Ware,<sup>1</sup> M. F. Doty,<sup>1</sup> T. L. Reinecke,<sup>1</sup> D. Gammon<sup>1\*</sup>

An asymmetric pair of coupled InAs quantum dots is tuned into resonance by applying an electric field so that a single hole forms a coherent molecular wave function. The optical spectrum shows a rich pattern of level anticrossings and crossings that can be understood as a superposition of charge and spin configurations of the two dots. Coulomb interactions shift the molecular resonance of the optically excited state (charged exciton) with respect to the ground state (single charge), enabling light-induced coupling of the quantum dots. This result demonstrates the possibility of optically coupling quantum dots for application in quantum information processing.



*Science* 3 February 2006:

Vol. 311. no. 5761, pp. 636 - 639

### Optical Signatures of Coupled Quantum Dots

E. A. Stinaff,<sup>1</sup> M. Scheibner,<sup>1</sup> A. S. Bracker,<sup>1</sup> I. V. Ponomarev,<sup>1</sup> V. L. Korenev,<sup>2</sup> M. E. Ware,<sup>1</sup> M. F. Doty,<sup>1</sup> T. L. Reinecke,<sup>1</sup> D. Gammon<sup>1\*</sup>

An asymmetric pair of coupled InAs quantum dots is tuned into resonance by applying an electric field so that a single hole forms a coherent molecular wave function. The optical spectrum shows a rich pattern of level anticrossings and crossings that can be understood as a superposition of charge and spin configurations of the two dots. Coulomb interactions shift the molecular resonance of the optically excited state (charged exciton) with respect to the ground state (single charge), enabling light-induced coupling of the quantum dots. This result demonstrates the possibility of optically coupling quantum dots for application in quantum information processing.

APLIKACE

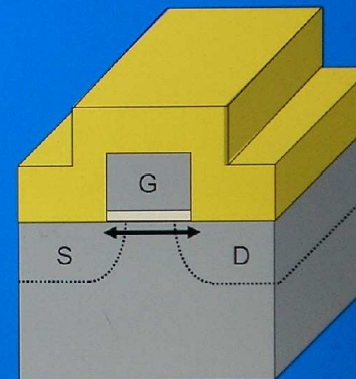
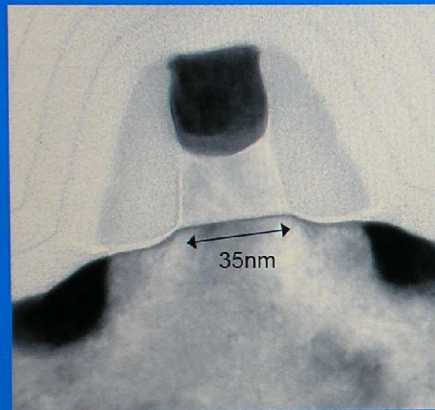
*Rozmazané rozmezí  
klasického a kvantového světa*

V MOSFETECH i při dnešním stupni  
miniaturisace (ULSI) se elektrony řídí  
(semi)klasickými zákony pohybu



# Technologie 65 nm firmy Intel

## NMOS with Enhanced Strain



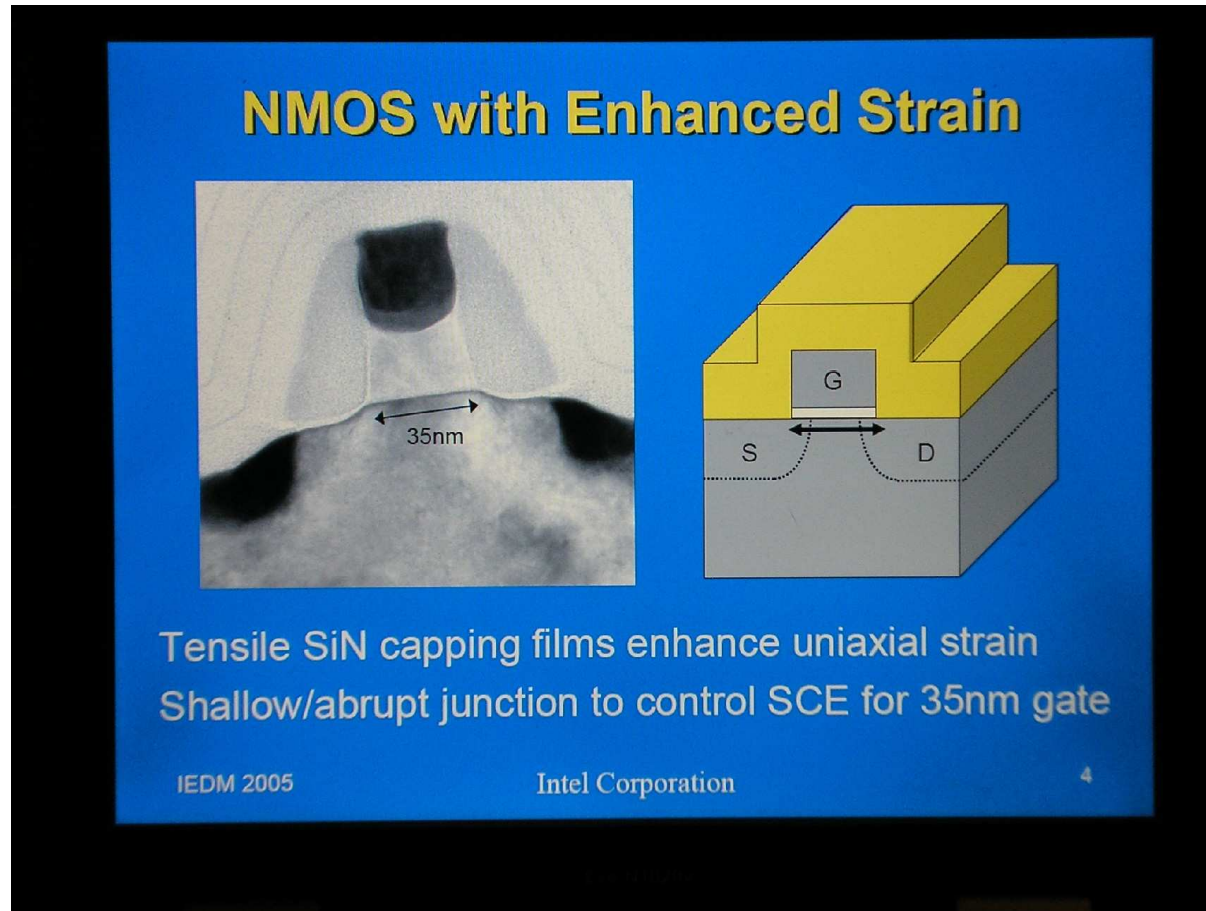
Tensile SiN capping films enhance uniaxial strain  
Shallow/abrupt junction to control SCE for 35nm gate

IEDM 2005

Intel Corporation

4

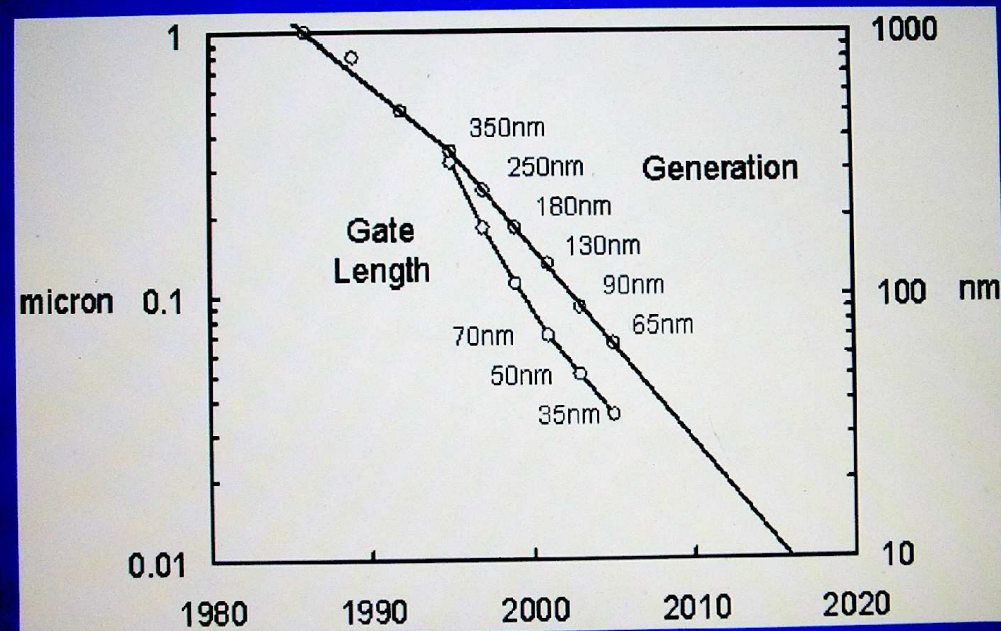
# Technologie 65 nm firmy Intel



Elektrony jsou zde jako malé nabitě kuličky, které přenášejí proud

# Technologie 65 nm firmy Intel

## Logic Transistor Gate Length Trend



65nm continues aggressive gate length scaling

IEDM 2005

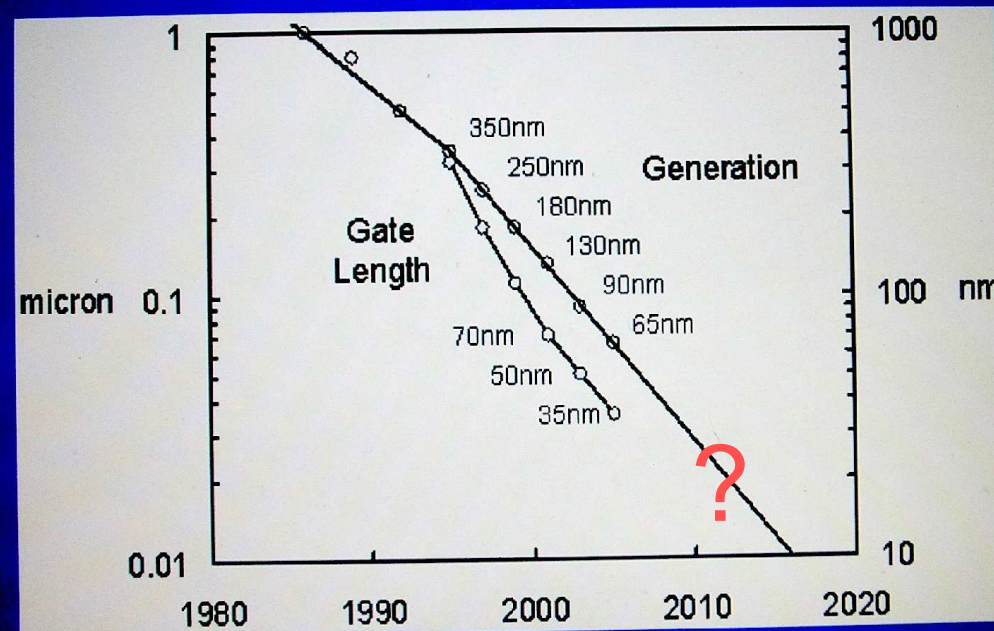
Intel Corporation

2



# Technologie 65 nm firmy Intel

## Logic Transistor Gate Length Trend



65nm continues aggressive gate length scaling

IEDM 2005

Intel Corporation

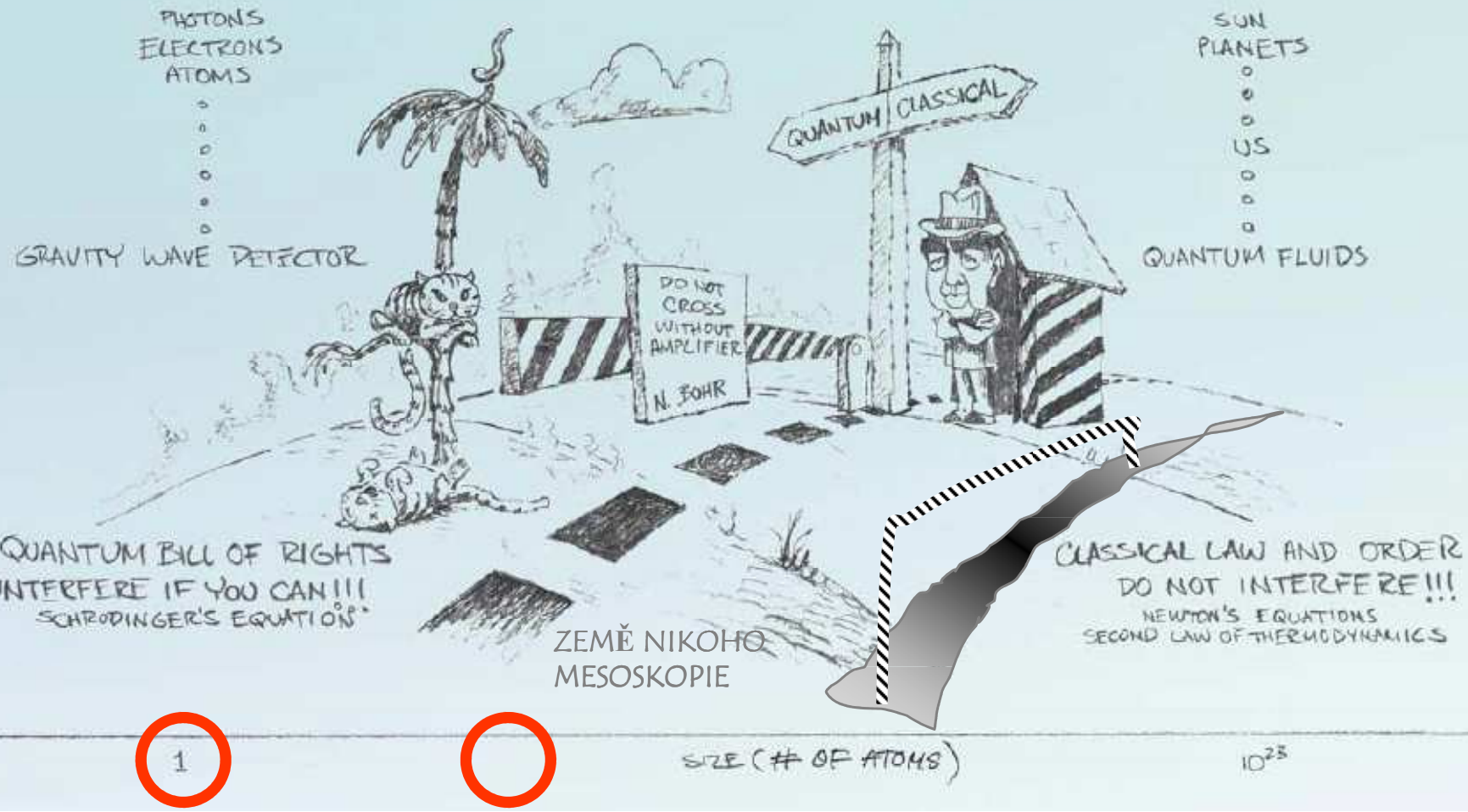
2

Postupné nenápadné přibližování ke kvantové limitě

# THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

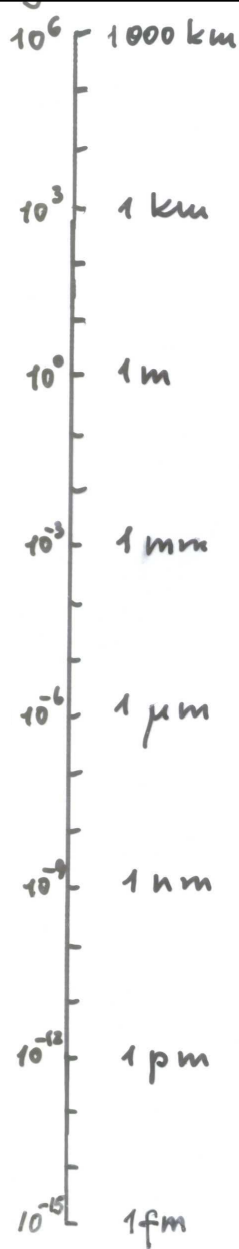
CLASSICAL DOMAIN



# *Kvantové objekty a úkazy v makroskopickém světě*

**Ještě výrazněji:  
makroskopické se nekryje s klasickým,  
mikroskopické se nekryje s kvantovým**

# Klasický a kvantový svět



## KVANTOVÉ OBJEKTY makroskopické

teleportace přes Dunaj

supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

## meso("nano")skopické

kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

## mikroskopické

molekuly  
atomy a ionty

atomová jádra

subjaderné objekty

klasický svět

mesosvět

kvantový svět

## KVANTOVÉ ÚKAZY

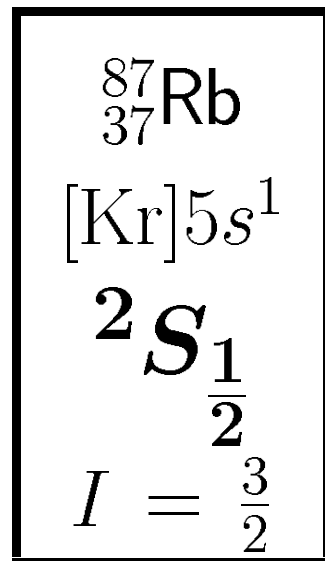
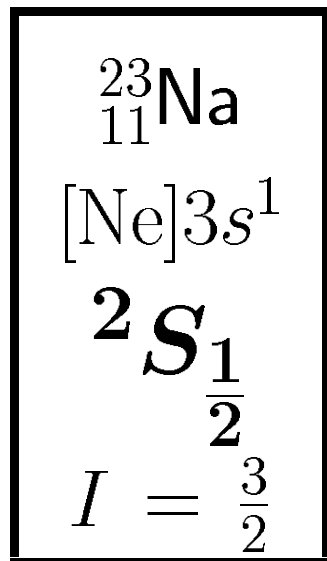
- kvantování energií
- vlnové šíření – interference, difrakce ...
- provázané stavy
- korelované chování identických částic

# Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Obláček atomů (alkalických kovů) za extrémně nízkých teplot  
přejde do zvláštního stavu – BE kondensátu, ve kterém  
všechny atomy se pohybují naprosto shodně, koherentně a  
dohromady vytvoří makroskopickou vlnovou funkci

*objeveno 1995*

*Nobelova cena 2001*



## Rubidium

37 electrons      *total electron spin*  $S = \frac{1}{2}$

37 protons      }  
50 neutrons      } *total nuclear spin*  $I = \frac{3}{2}$

*total spin of the atom*

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$\overline{F} = \overline{|S - I|}, \dots, \overline{S + I} = \overline{1, 2}$$



# *Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech*

Příbuzný jev – supratekutost  
znám v kapalném heliu od 30tých let

## PŘIBLIŽNÉ ÚDAJE KRITICKÝCH TEPLŮT

system	$M$	$n$	$T_C$
He liquid	4	$2 \times 10^{28}$	1.47 K
Na trap	23	$2 \times 10^{20}$	1.19 $\mu$ K
Rb trap	87	$2 \times 10^{17}$	3.16 nK

# *Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech*

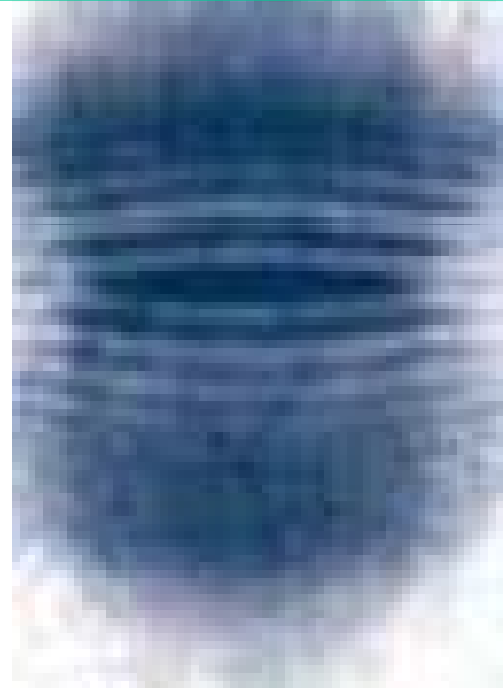
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

*experiment ve skupině Ketterle a spol.*



# *Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech*

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

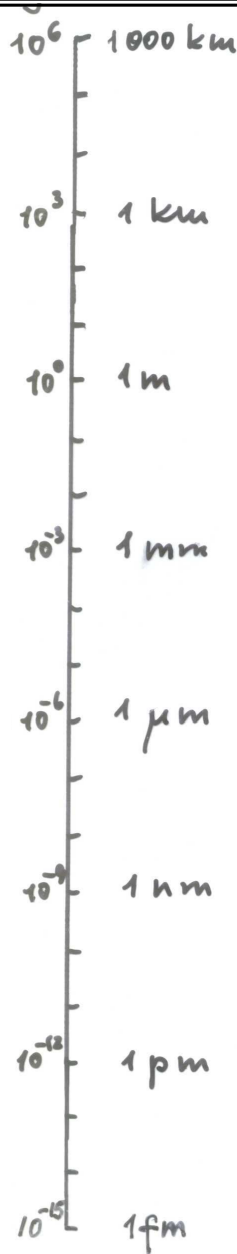
*experiment ve skupině Ketterle a spol.*



vlny na vodě



# Klasický a kvantový svět



**KVANTOVÉ OBJEKTY**  
makroskopické

teleportace přes Dunaj

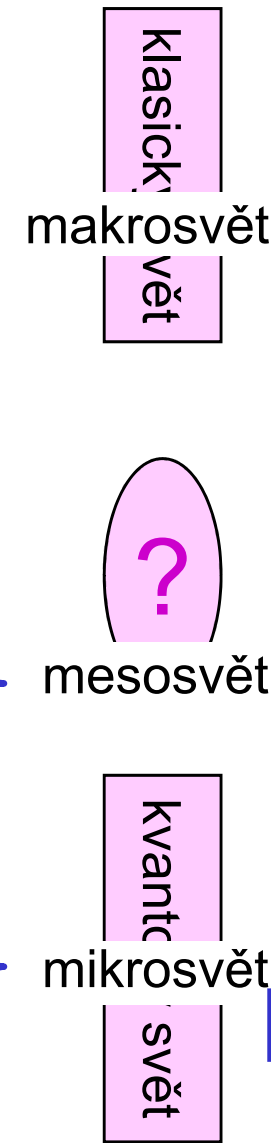
supravodiče, supratekuté helium  
BE kondensace v atom. oblacích  
kohese a chem. vazba v látkách

meso("nano")skopické  
kvantové multivrstvy, kvant. tečky,  
vortexové struktury, qubity

mikroskopické  
molekuly  
atomy a ionty

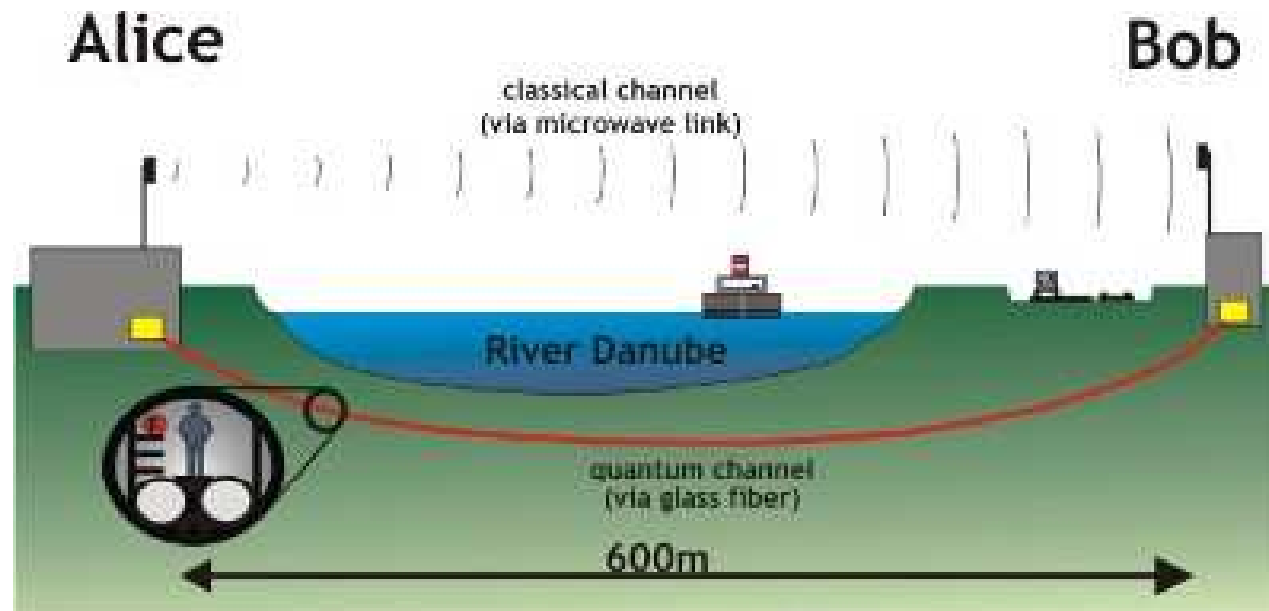
atomová jádra

subjaderné objekty



- KVANTOVÉ ÚKAZY**
- kvantování energií
  - vlnové šíření – interference, difrakce ...
  - provázané stavy
  - korelované chování identických částic

# *Kvantová teleportace fotonů*



R. Ursin et.al: *Quantum Teleportation link across the Danube*, [Nature](#) **430**, 849 (2004)

# THE BORDER TERRITORY

QUANTUM DOMAIN

CLASSICAL DOMAIN

PHOTONS  
ELECTRONS  
ATOMS  
GRAVITY WAVE DETECTOR

SUN  
PLANETS  
US

PODIVNÝ  
SEZNAM

KVANTOVÉ  
KAPALINY

QUANTUM BILL OF RIGHTS  
INTERFERE IF YOU CAN!!!  
SCHRÖDINGER'S EQUATION

KVANTOVÉ PROVÁZÁNÍ

DO NOT  
CROSS  
WITHOUT  
AMPLIFIER  
N. BOHR

NO-MAN'S LAND  
MESOSCOPY

CLASSICAL LAW AND ORDER  
DO NOT INTERFERE!!!  
NEWTON'S EQUATIONS  
SECOND LAW OF THERMODYNAMICS

SIZE (# OF ATOMS)

1

$10^{23}$

## *Planckova konstanta*

Samotná velikost objektů není tedy rozhodující pro jejich kvantové chování.

Obecné kritérium je spíše, jak důležitá je pro daný problém Planckova konstanta.

# *Planckova konstanta*

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$



# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$

# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

## Více rolí Planckovy konstanty

1. V základních rovnicích  $[x, p] = i\hbar$        $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$

# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

## Více rolí Planckovy konstanty

1. V základních rovnicích  $[x, p] = i\hbar$   $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$

2. Jako převodní koeficient  $E = \hbar\omega = h\nu$  **Planckův vztah**

# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

## Více rolí Planckovy konstanty

1. V základních rovnicích  $[x, p] = i\hbar$   $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$

2. Jako převodní koeficient  $E = \hbar\omega = h\nu$

Planckův vztah

3. Jako charakteristická mezní veličina  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

relace neurčitosti

# Planckova konstanta

$$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1,05457168(18) \times 10^{-34} \text{ Js}$$

CODATA recomm. value

- hodně malé číslo
- rozměr energie $\times$ čas=akce=délka  $\times$ hybnost=moment hybnosti
- Planck původně zavedl  $h = 2\pi\hbar$
- dnes již známo s velkou přesností

## Více rolí Planckovy konstanty

1. ~~V základních rovnicích~~  $[x, p] = i\hbar$   $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$

2. Jako převodní koeficient  $E = \hbar\omega = h\nu$

Planckův vztah

3. Jako charakteristická mezní veličina  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

relace neurčitosti

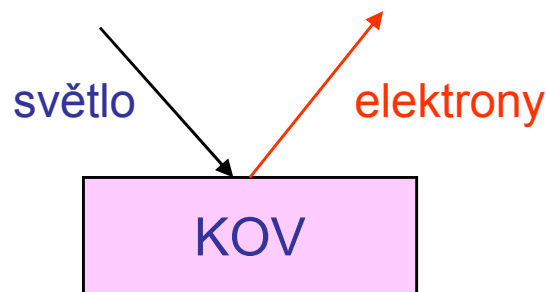
## 2. Planckova konstanta jako převodní koeficient

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{Planckův vztah}$$

Překlad mezi jazyky dvou teorií ... most C  $\leftrightarrow$  Q

„Světlo o frekvenci  $\nu$  je tvořeno fotony o energii  $E$ “

Tak uvažoval Einstein při vysvětlení **fotoefektu**



elektrony vyletují jen pro  $\nu > \nu_0$

Důvod:  $h\nu_0 \equiv W$  je **výstupní práce elektronu**

foton musí mít energii větší, aby ho vyrval.

*Einstein 1905 ... NP*

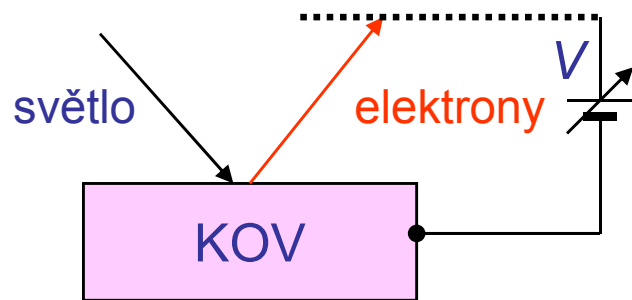
## 2. Planckova konstanta jako převodní koeficient

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \text{Planckův vztah}$$

Překlad mezi jazyky dvou teorií ... most C  $\leftrightarrow$  Q

„**Světlo o frekvenci  $\nu$  je tvořeno fotony o energii  $E$** “

Tak uvažoval Einstein při vysvětlení **fotoefektu**



elektrony vyletují jen pro  $\nu > \nu_0$

Důvod:  $h\nu_0 \equiv W$  je **výstupní práce elektronu**

foton musí mít energii větší, aby ho vyrval.

*Einstein 1905 ... NP*

**Experiment zejména Lenard ... NP**

Určení energie elektronu ... brzdňý potenciál

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W = e \cdot V$$

elektronvolt



## Odbočka: děsivé hodnoty a šikovní jednotky

Uvažme, že

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Je rozumné si zavést jednotky atomistice přiměřené.  
Např. (v rámci zákonné soustavy SI)

nm, eV, fs

1 eV je energie, kterou elementární náboj získá při  
průchodu potenciálním rozdílem 1 V,

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pak vyjde neobyčejně šikovně

$$\hbar = 0.66 \text{ eVfs}$$

$$m_e = 5.7 \text{ eVfs}^2 \text{nm}^{-2}$$

## Odbočka: děsivé hodnoty a šikovní jednotky

Uvažme, že

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Je rozumné si zavést jednotky atomistice přiměřené.  
Např. (v rámci zákonné soustavy SI)

nm, eV, fs

1 eV je energie, kterou elementární náboj získá při  
průchodu potenciálním rozdílem 1 V,

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pak vyjde neobyčejně šikovně

$$\hbar = 0.66 \text{ eVfs}$$

$$m_e = 5.7 \text{ eVfs}^2 \text{nm}^{-2}$$

Ještě lepší je přejít k **přirozeným jednotkám**

$$m_e = e = \hbar = 1 \text{ ... za chvíli}$$

### 3. Planckova konstanta jako hraniční hodnota

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad \text{relace neurčitosti}$$

Propojíme prostorovou rozlehlost  $L$  a energii  $E$  vázaného stavu částice o hmotnosti  $m$  ... *kriterium superkvantového režimu*

1. krok kinetická energie částice ve vázaném stavu (v potenciál. jámě)

$$mE_{\text{kin}} \approx (\Delta p)^2$$

energie kvant. fluktuací

2. krok odhad z relace neurčitosti

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{L}$$

3. krok kinetická a celková energie stejného řádu

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

### 3. Planckova konstanta jako hraniční hodnota

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad \text{relace neurčitosti}$$

Propojíme prostorovou rozlehlost  $L$  a energii  $E$  vázaného stavu částice o hmotnosti  $m$  ... *kriterium superkvantového režimu*

1. krok kinetická energie částice ve vázaném stavu (v potenciál. jámě)

$$mE_{\text{kin}} \approx (\Delta p)^2$$

energie kvant. fluktuací

2. krok odhad z relace neurčitosti

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{L}$$

3. krok kinetická a celková energie stejného řádu

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

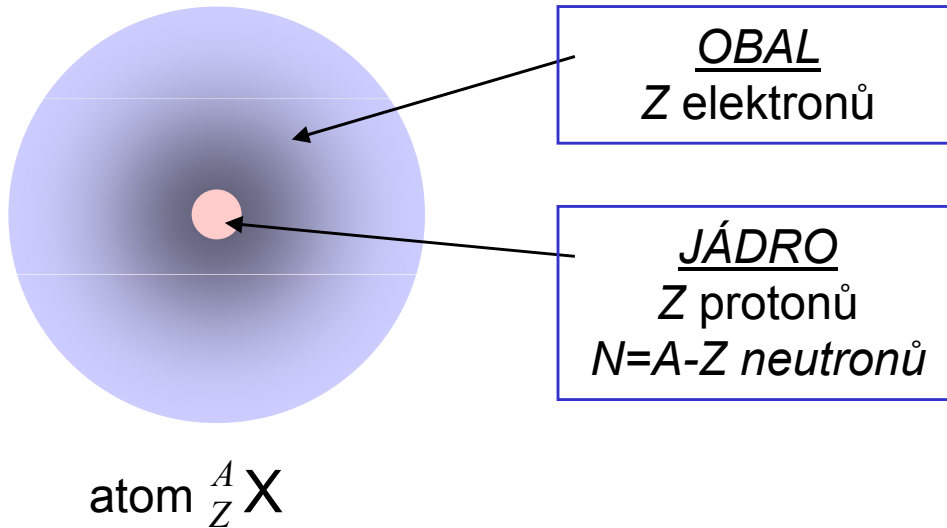
zkusíme pro atomy

## *Velikost atomů*

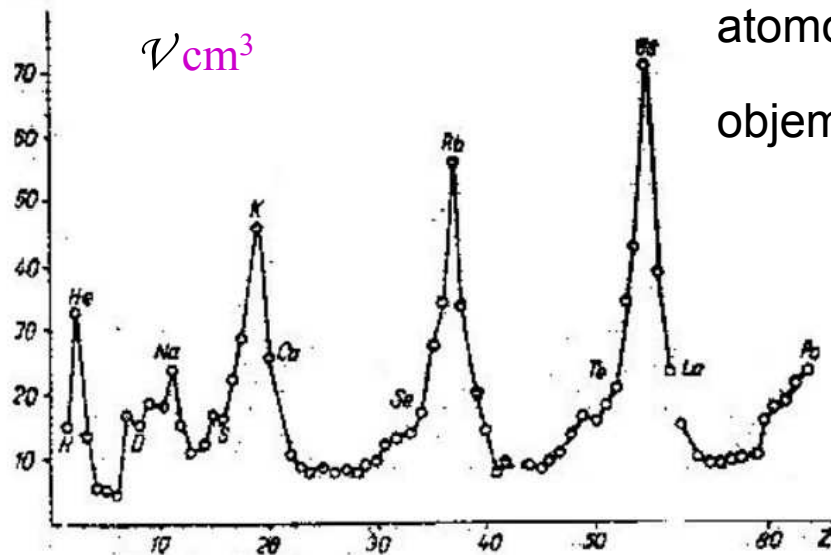
Jaké jsou empirické údaje o velikosti atomů

Jaké jsou teoretické důvody pro tyto údaje

# Opakování o atomech



náboj jádra	$Q = Z  e $
hmotnost atomu	$M \sim A \text{ u}$
poloměr jádra	$R = r_0 A^{1/3}$
	$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$



atomový objem = rel. at. hmotnost  $\text{g} / 10^3 \times$  hustota  
 objem na atom = atomový objem / Avogadr. číslo

$$V = 10^{-3} M / \rho$$

$$r = \left( \frac{3}{4\pi} \times V / N_A \right)^{1/3}$$

... odhad z empirických dat

Obr. 4. Závislost atomového objemu na atomovém čísle

# Odhad ionizační energie atomu z relace neurčitosti

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

použijeme našich jednotek nm, eV, fs

$$\frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{0,66^2}{5,7} \approx 0.076$$

Empirické poloměry atomů mají hodnoty v řádu 0,1 nm (1Å)

Energie valenčních elektronů v atomech pak vycházejí v řádu eV

# Odhad ionizační energie atomu z relace neurčitosti

$$m \cdot E \cdot L^2 \approx \hbar^2$$

použijeme našich jednotek nm, eV, fs

$$\frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{0,66^2}{5,7} \approx 0.076$$

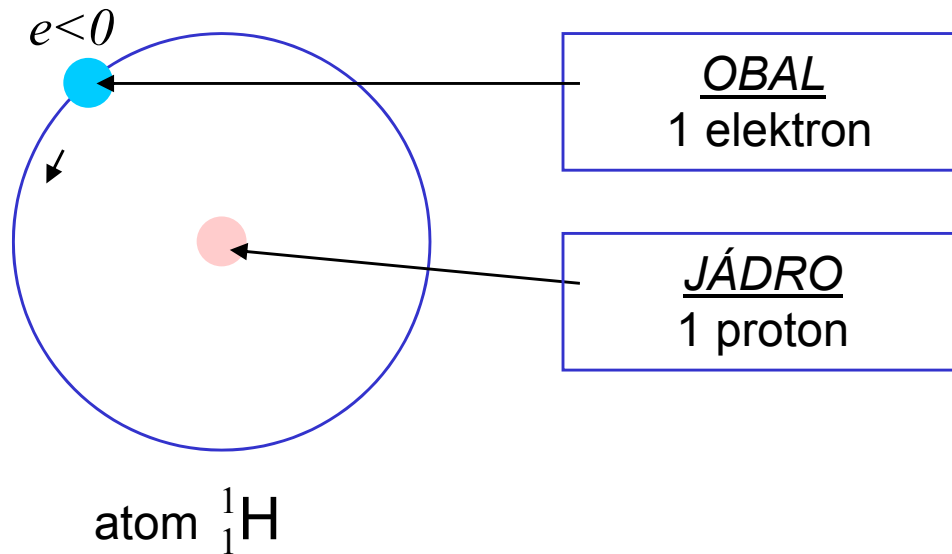
Poloměry atomů vycházejí v řádu 0,1 nm (1Å)

Energie valenčních elektronů v atomech vycházejí v řádu eV

v tabulkách lze ověřit, že je to  
správný odhad



# Semiklasický popis atomu vodíku podle Bohra



náboj jádra	$Q =  e $
hmotnost atomu	$M \sim u \gg m_e$
poloměr jádra	$R = r_0 \ll r$
	$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$

- Elektron obíhá rychlostí  $v$  kolem nehybného jádra. Má hybnost  $p = m_e v$ , moment hybnosti  $m_e v r$ , odstředivá síla je  $m_e v^2/r$  ... všechno klasické
- Přitahován je coulombickou silou

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \equiv \frac{e'^2}{r^2}$$

- Připojeno je kvantování, prostřednictvím *kvanta akce*, Planckovy konstanty  $\hbar$ .
- Veličina ke kvantování vhodná má rozměr akce. To je právě moment hybnosti.

# Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

odstř. síla = dostř. síla

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e'^2}{r^2}$$

Klasická podmínka

kvantování momentu hybnosti

$$m_e r v = k \cdot \hbar, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kvantová podmínka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr  
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2},$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie  
27,2 eV

# Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

odstř. síla = dostř. síla

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e'^2}{r^2}$$

Klasická podmínka

kvantování momentu hybnosti

$$m_e r v = k \cdot \hbar, \quad k = 1, 2, \dots$$

Kvantová podmínka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr  
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2},$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie  
27,2 eV

2x ionizační energie vodíku

# Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

$$m_e v^2 = e^2 / r$$

Klasická podmínka

o tyto výpočty nejde, důležité je podívat se na výsledek který je exaktní

kvantování

nka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr  
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

$$E_0 = \frac{m_e e^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie  
27,2 eV

# Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

$$m_e v^2 = e^2 / r$$

Klasická podmínka

o tyto výpočty nejde, důležité je podívat se na výsledek který je exaktní

kvantování

hka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr  
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie  
27,2 eV

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}$$

shoduje se s odhadem  
z relací neurčitosti

# Bohrova teorie vodíku

- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii

$$m_e v^2 = e^2 / r$$

Klasická podmínka

o tyto výpočty nejde, důležité je podívat se na výsledek který je exaktní

kvantování

hka

- Výsledek

$$r_k = a_0 \cdot k^2, \quad E_k = -\frac{1}{2} E_0 \cdot k^{-2}$$

Bohrov poloměr  
0,053 nm

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}$$

$$E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

Hartreeho energie  
27,2 eV

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}$$

shoduje se s odhadem  
z relací neurčitosti

## *Přirozené jednotky*

Rozměrové úvahy a zavedení  
přirozených jednotek

jsou založeny na víře (dobře již osvědčené), že  
rozměrová úvaha vede k výsledku, který se od  
přesného liší jen numerickým faktorem v řádu  
jednotek

# *Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)*

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,  
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**  
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

**G** Klasická mechanika a teorie gravitace

*Gravitační zákon*

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}$$



# *Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)*

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,  
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**  
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

**G** Klasická mechanika a teorie gravitace

**c** Teorie elektromagnetického pole  
*Maxwellovy rovnice, vlnová rovnice*

$$\partial_{tt}\mathbf{E} - c^2 \Delta \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

# Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,  
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**  
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

***G*** Klasická mechanika a teorie gravitace

***c*** Teorie elektromagnetického pole

***ħ*** Kvantová teorie  
*Komutační relace, Schrödingerova rovnice*

$$[x, p] = i\hbar$$

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

# Tři klíčové teorie (pro atomární systémy)

Nepůjdeme-li na sub-atomární úroveň,  
jsou pro popis fyzikálního světa klíčové **tři teorie**  
a ty mají jako svůj symbol **tři universální konstanty**

***G*** Klasická mechanika a teorie gravitace

***c*** Teorie elektromagnetického pole

***ħ*** Kvantová teorie  
*Komutační relace, Schrödingerova rovnice*

$$[x, p] = i\hbar$$

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

O této trojici za chvíli více

# Další universální konstanty

Jiný typ universálních konstant – charakteristiky částic

		elektron	proton	
vlastnosti částic	náboje	elektrické	$-e$	$+e$
		gravitační	$m_e$	$m_p$
	hmotnosti		$m_e$	$m_p$

## SOUHRN -- ATOMOVÁ FYSIKA

univ. konstanty	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$
			$\frac{h}{2\pi}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$		
bezrozměrné kombinace				$\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c}$	$\frac{m_p}{m_e}$	$\alpha_p = \frac{Gm_p^2}{\hbar c}$

# Přirozené jednotky ve fyzice

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•	•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

## *Atomové přirozené jednotky*

Jsou nejvhodnější pro atomární soustavy  
... relativní jednotky, kde  
jeden elektron, jeden proton, jeden atom vodíku  
slouží jako etalon

# Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•	•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

Atomové jednotky

# Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•	•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

## Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha → relevantní veličiny**



# Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

## Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha → relevantní veličiny**
- Dvě podmínky pro Bohrov poloměr a Hartreeho energii  
(rozměrové kombinace ... kinetická energie a Coulomb. potenciál. energie)

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}, \quad E_0 = \frac{e'^2}{a_0}$$

# Atomové přirozené jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

## Atomové jednotky

- Inspirace od *Bohra*(1913) **Rozměrová úvaha** → **relevantní veličiny**
- Dvě podmínky pro Bohrovův poloměr a Hartreeho energii  
(rozměrové kombinace ... kinetická energie a Coulomb. potenciál. energie)

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}, \quad E_0 = \frac{e'^2}{a_0}$$

- Výsledek

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e'^2}, \quad E_0 = \frac{m_e e'^4}{\hbar^2}$$

v plné shodě s  
Bohrovou teorií

# *Planckovy přirozené jednotky*

Byly první a zdály se hodně divné,  
ale ...

# Planckovy "přirozené" jednotky

Přirozené soustavy jednotek závisejí na výběru fundamentálních konstant

jednotky	$G$	$c$	$\hbar$	$e'^2$	$m_e$	$m_p$	hodí se v
Planckovy	•	•	•				kvantové gravitaci
relativistické		•	•		(•)	(•)	kvantové elektrodynamice
atomové			•	•	•		atomové fyzice

## Planckovy jednotky

- Sestavíme veličiny o rozměru **délka, hmotnost, čas**
- To jsou Planckovy jednotky, historicky první, jak je navrhl 1899, sotva svou konstantu zavedl, ještě bez dnešní interpretace
- Hodnoty Planckových jednotek jsou poněkud zarážející

$$l_P = (\hbar G / c^3)^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$m_P = (\hbar c / G)^{\frac{1}{2}} = 2.2 \times 10^{-8} \text{ kg}$$

$$t_P = (\hbar G / c^5)^{\frac{1}{2}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$$

## *Hlubší pohled na Planckovu volbu: ( $c\hbar G$ ) schéma*

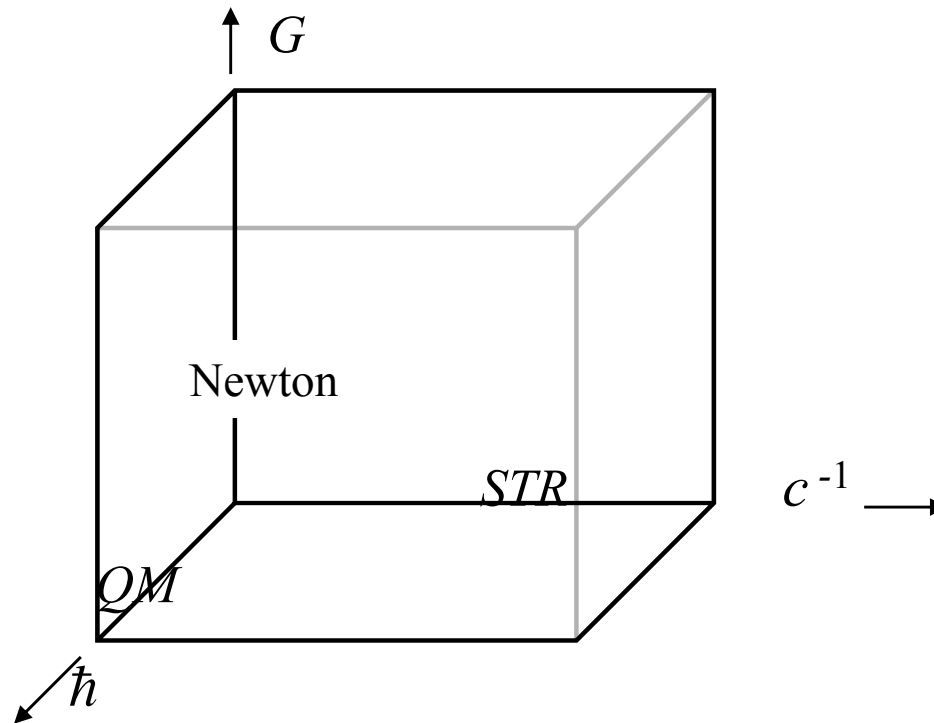
V atomové fyzice jsou jádra neměnná tělíska (téměř).

**Působí dvě universální interakce: gravitační a elektromagnetická**

Podmínky jejich působení lze znázornit v ( $c\hbar G$ ) schématu, které má Newtonův svět v počátku, tři hlavní teorie na osách.

Příklad: STR je důležitá, jestliže typická rychlost  $v \approx c, v/c \approx 1$ , atd.

U atomové fyziky je gravitace slabá (Newtonova), jedná se o kvasirelativistickou limitu, zato **kvantové efekty jsou započteny plně**.



## Hlubší pohled na Planckovu volbu: ( $c\hbar G$ ) schéma

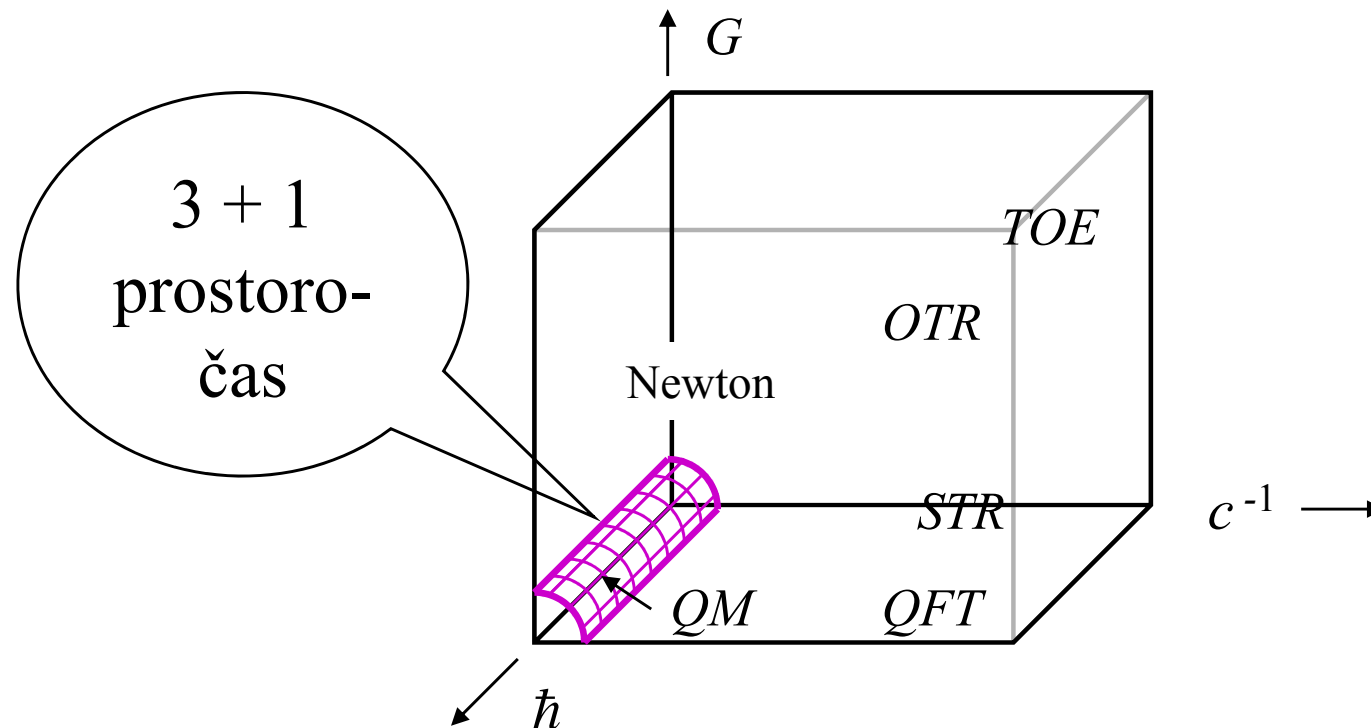
V atomové fyzice jsou jádra neměnná tělíska (téměř).

**Působí dvě universální interakce: gravitační a elektromagnetická**

Podmínky jejich působení lze znázornit v ( $c\hbar G$ ) schématu, které má Newtonův svět v počátku, tři hlavní teorie na osách.

Příklad: STR je důležitá, jestliže typická rychlost  $v \approx c, v/c \approx 1$ , atd.

U atomové fyziky je gravitace slabá (Newtonova), jedná se o kvasirelativistickou limitu, zato **kvantové efekty jsou započteny plně**.



## *Bičákov diagram*

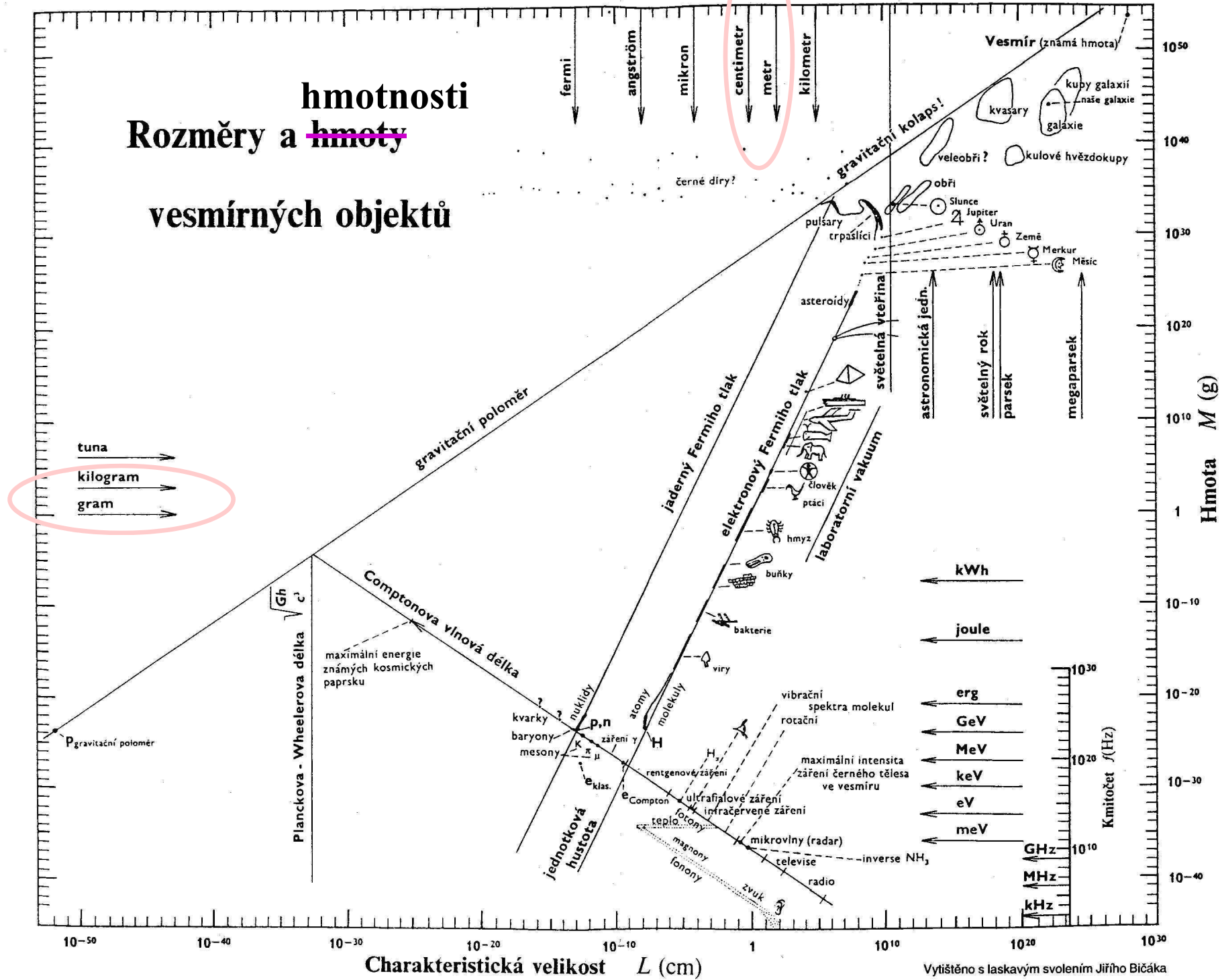
Zveřejněný již před mnoha lety ve  
Žlutém časopisu (Čs. čas. fys.)  
mírně zastaralý,  
ale stále inspirující.

My se podíváme z hledisek důležitých pro  
atomistiku

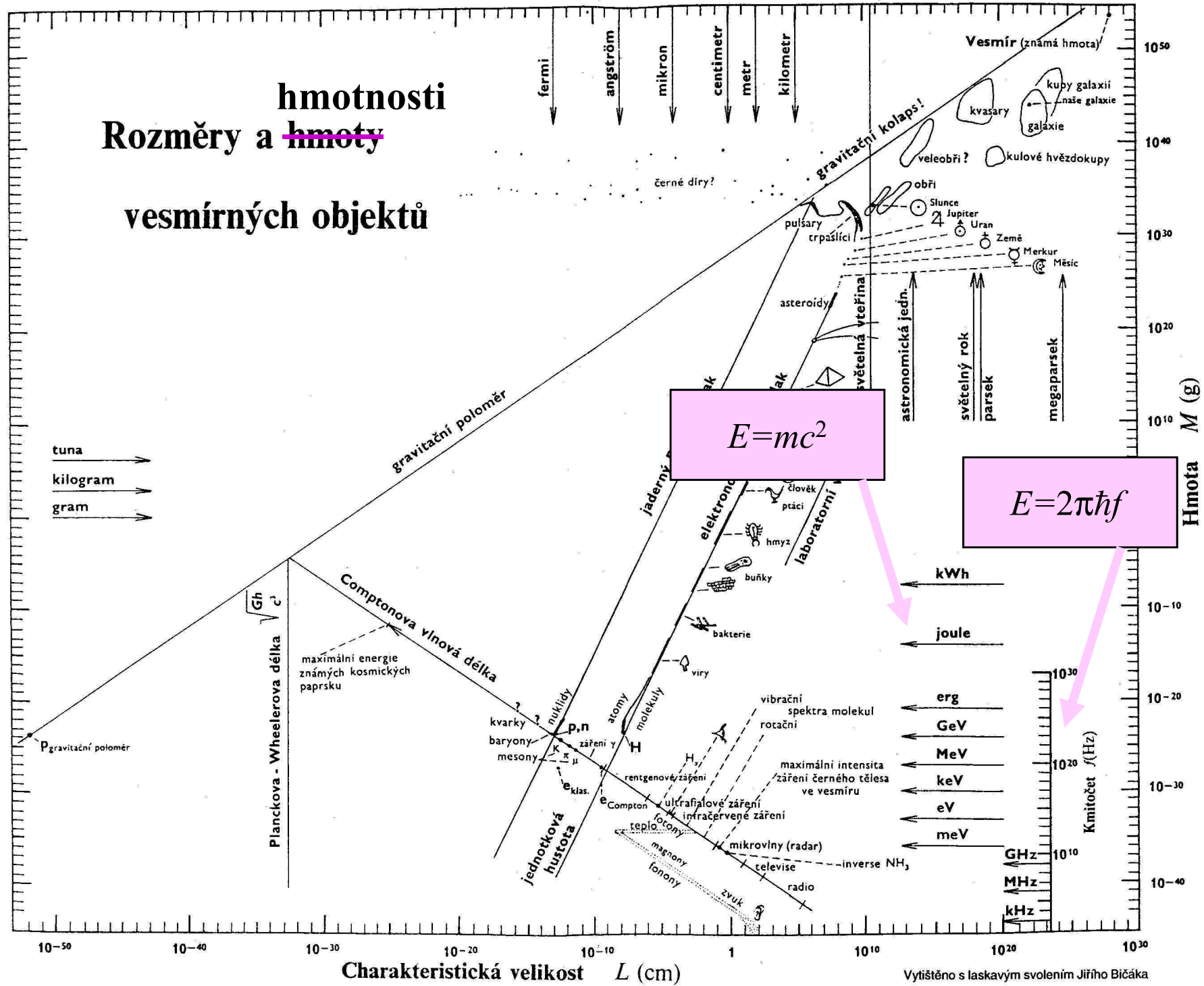




# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů



# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů



Vytlačeno s laskavým svolením Jiřího Bičáka

## *Dvojlogaritmické měřítko*

$$Y = K \cdot X^{\alpha}$$

se zobrazí jako

$$\log Y = \log K + \alpha \cdot \log X$$

## *Dvojlogaritmické měřítko*

$$Y = K \cdot X^{\alpha}$$

se zobrazí jako

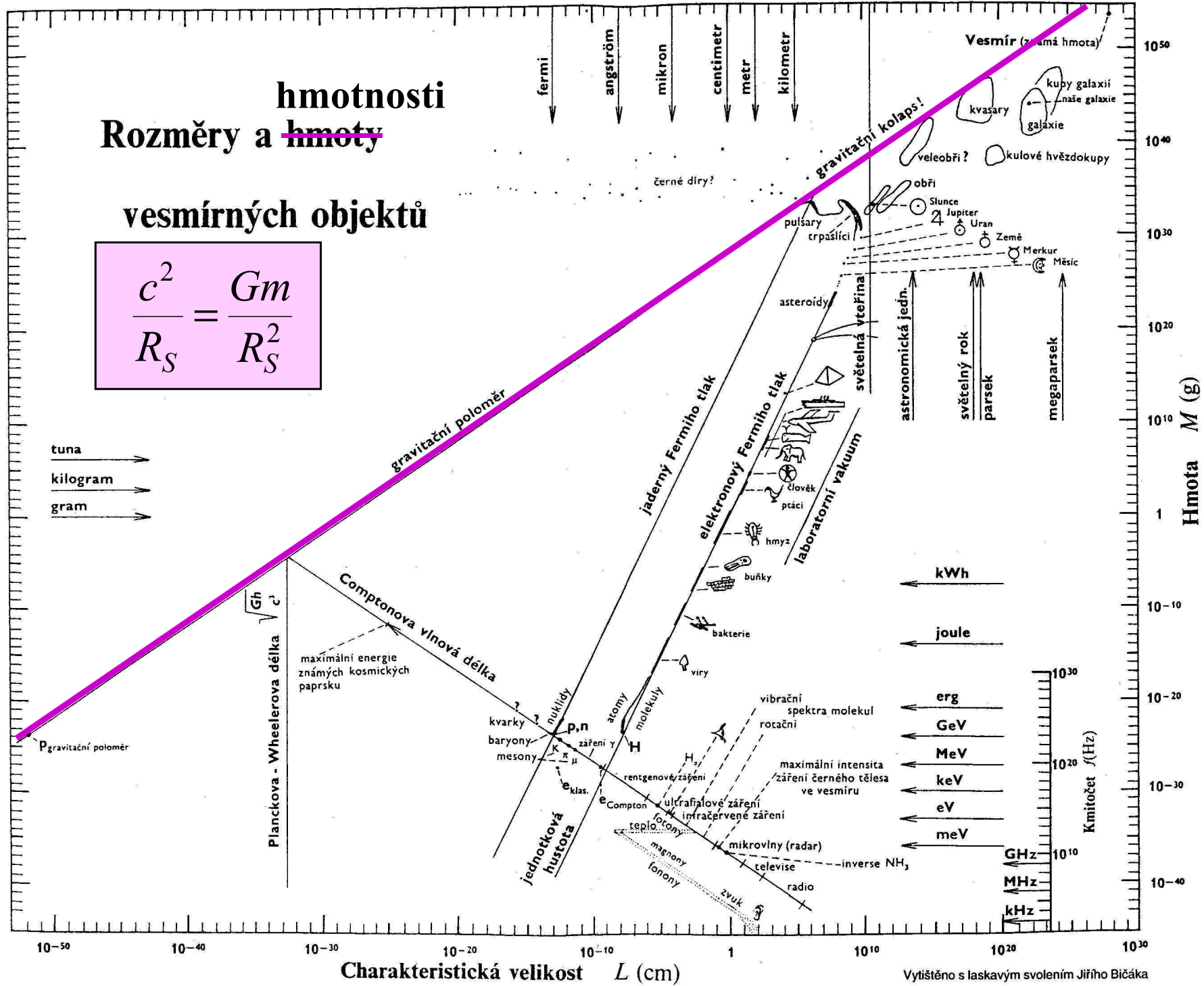
$$\log Y = \log K + \alpha \cdot \log X$$

Krásné, ale ošidné:

logaritmus se mění pomalu

# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$



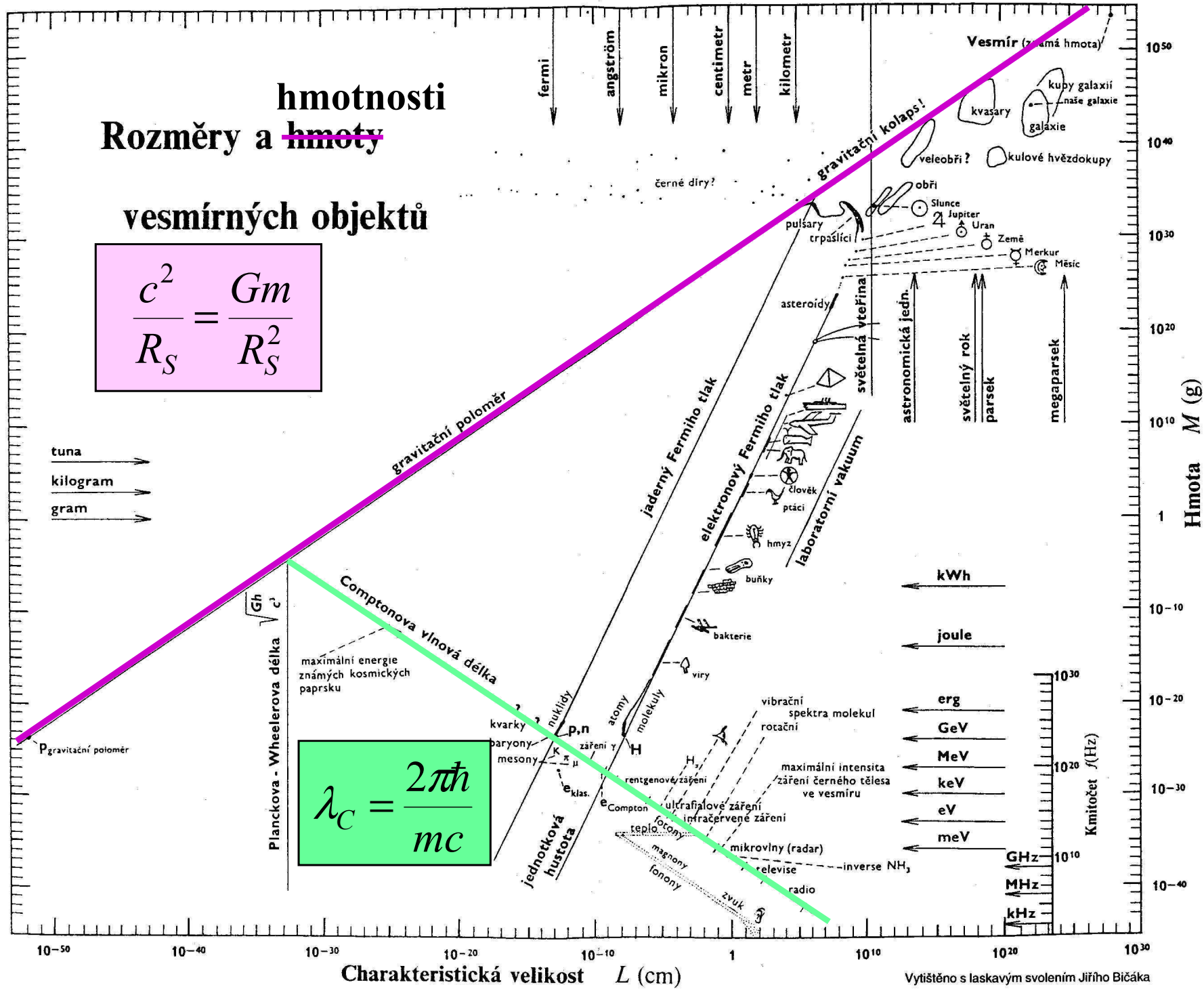
Vytlačeno s laskavým svolením Jiřího Bičáka

# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna  
kilogram  
gram

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$













# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~

## vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna  
kilogram  
gram

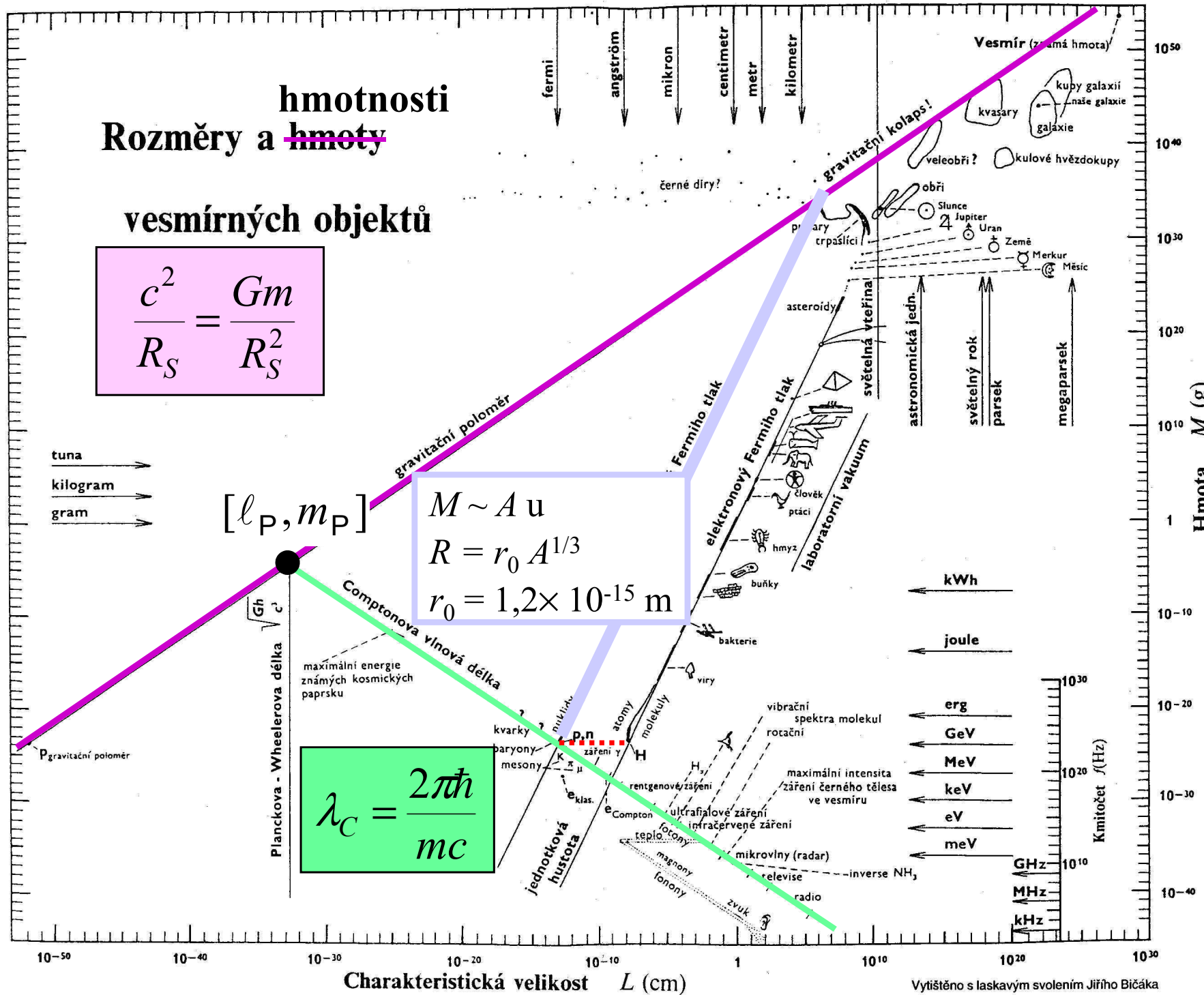
$[l_P, m_P]$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna  
kilogram  
gram

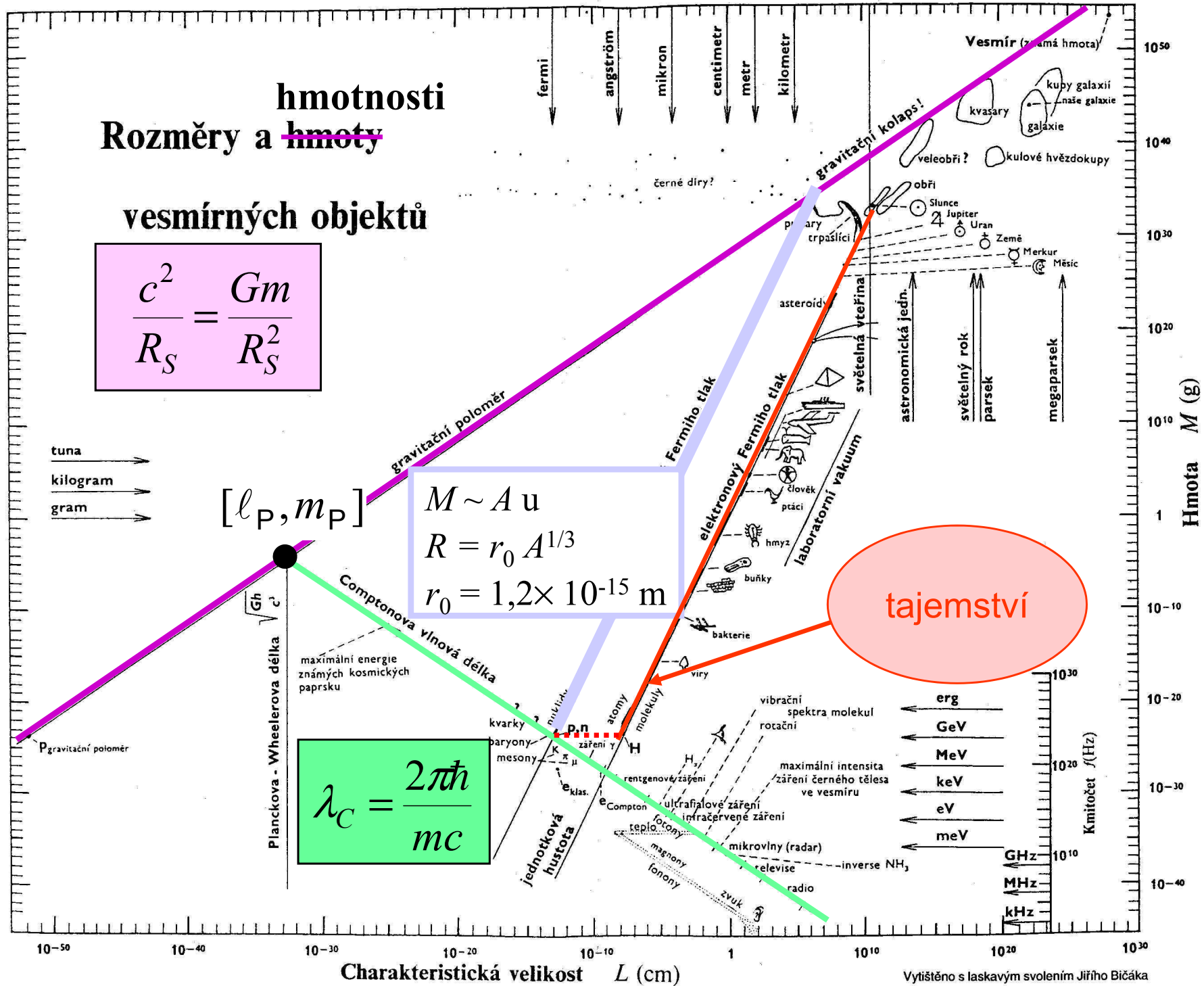
$[l_P, m_P]$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna  
kilogram  
gram

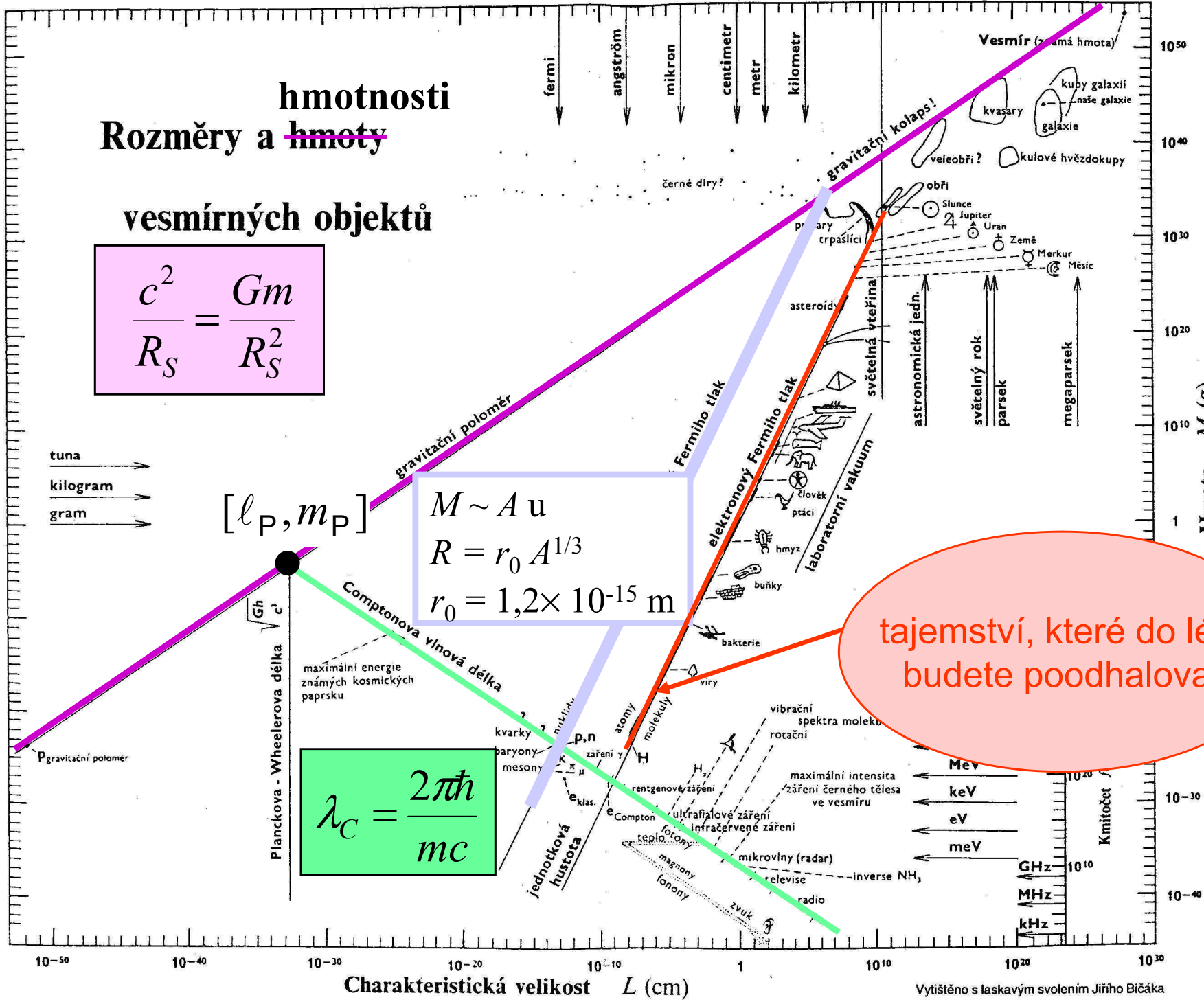
$[l_P, m_P]$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



tajemství, které do léta  
budete poodhalovat



# hmotnosti Rozměry a ~~hmoty~~ vesmírných objektů

$$\frac{c^2}{R_S} = \frac{Gm}{R_S^2}$$

tuna  
kilogram  
gram

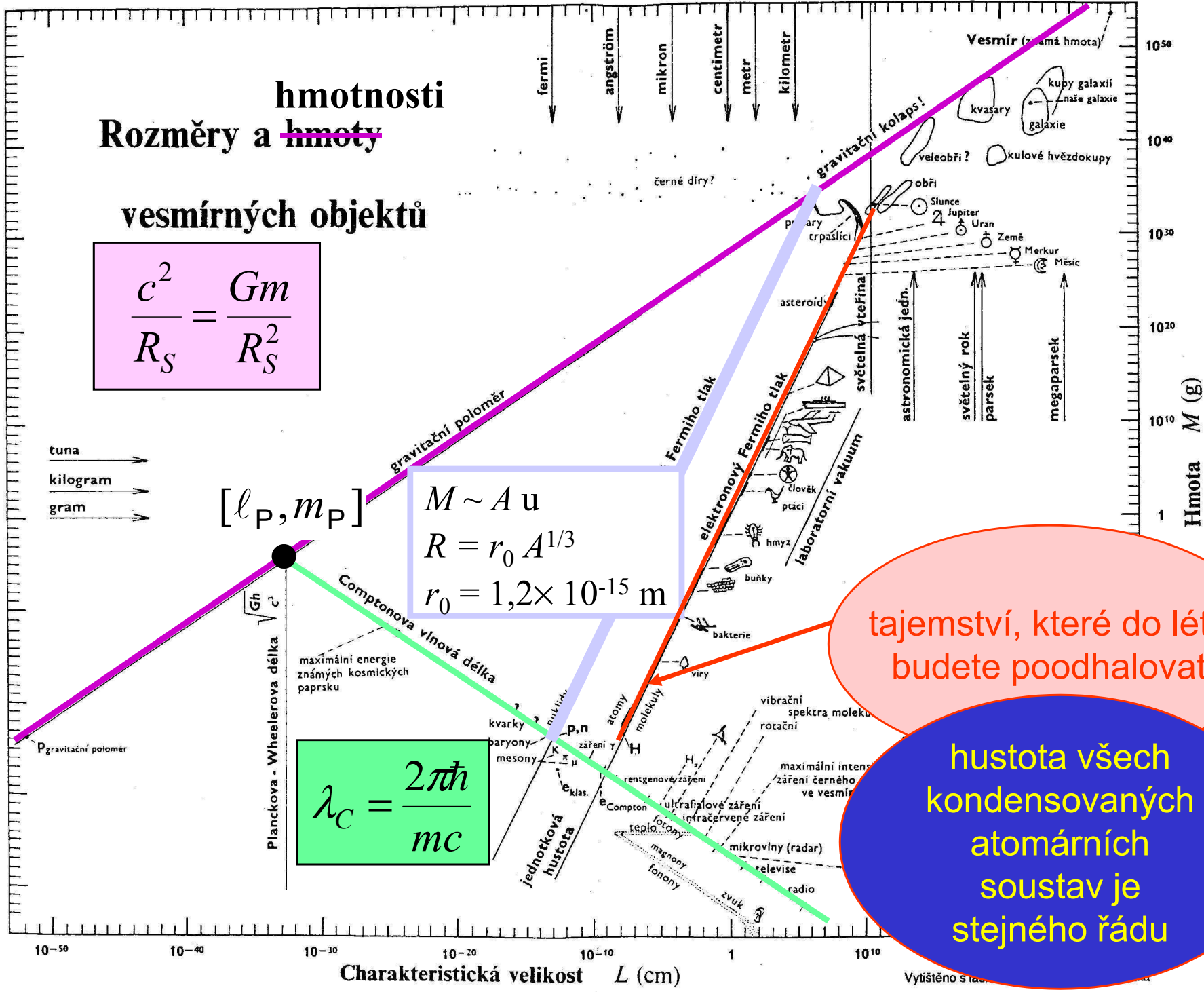
$[l_P, m_P]$

$$M \sim A u$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1,2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$



tajemství, které do léta budete poodhalovat

hustota všech kondenzovaných atomárních soustav je stejného řádu

*The end*