

# Relativistická kvantová mechanika

Michal Lenc

## Poznámky k přednášce v jarním semestru 2009

1	Obrazy.....	2
1.1	Postulát o kvantové kausalitě.....	2
1.2	Evoluční operátor.....	2
1.3	Schrödingerův a Heisenbergův obraz.....	3
1.4	Interakční obraz.....	4
2	Relativita a antičástice podle Feynmana.....	4
3	Komplexní proměnná.....	5
4	Antičástice podle Feynmana II.....	7
5	Relativistická kvantová mechanika – historický přístup.....	8
6	Spinory ve čtyřrozměrném časoprostoru.....	9
6.1	Vlastnosti spinorů.....	9
6.2	Lorentzova transformace spinorů.....	11
7	Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice.....	13
7.1	Diracova rovnice pro volnou částici.....	13
7.2	Diracova rovnice v elektromagnetickém poli.....	14
7.3	Heisenbergův obraz.....	15
7.4	Rovnice kontinuity.....	15
7.5	Standardní reprezentace.....	16
8	Rovinné vlny.....	17
9	Transformace Diracovy rovnice.....	18
9.1	Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace).....	18
9.2	Rovnice částice v elektromagnetickém poli.....	19
10	Rozptyl elektronu na jádře.....	22
11	Invariantní účinný průřez.....	24
12	Spinová matice hustoty.....	26
13	Spinové středování.....	28

# 1 Obrazy

## 1.1 Postulát o kvantové kauzalitě

Postulát o kvantové kauzalitě říká, že:

- (a) Stav systému v čase  $t_0$  jednoznačně určuje stav systému v libovolném okamžiku  $t > t_0$  i v okamžiku  $t < t_0$ .
- (b) Platí princip superposice: Jsou-li stavy  $|\psi_1(t)\rangle$  a  $|\psi_2(t)\rangle$  časové evoluce stavů  $|\psi_1(t_0)\rangle$  a  $|\psi_2(t_0)\rangle$ , pak také stav  $c_1|\psi_1(t_0)\rangle + c_2|\psi_2(t_0)\rangle$  má časovou evoluci  $c_1|\psi_1(t)\rangle + c_2|\psi_2(t)\rangle$ .
- (c) Norma stavového vektoru se během časové evoluce nemění.

## 1.2 Evoluční operátor

Podle postulátu o kvantové kauzalitě existuje jednoznačný vztah mezi vektory  $|\psi(t)\rangle$

a  $|\psi(t_0)\rangle$  a lze tedy definovat evoluční operátor  $\hat{T}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (1.1)$$

Ze zachování normy dostáváme

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\hat{T}(t, t_0)\psi(t_0)|\hat{T}(t, t_0)\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (1.2)$$

a platí tak

$$\hat{T}^+(t, t_0)\hat{T}(t, t_0) = \hat{1}. \quad (1.3)$$

Dále porovnáním

$$\begin{aligned} |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle = \hat{T}(t_2, t_1)\hat{T}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \\ |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_0)|\psi(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

dostáváme

$$\hat{T}(t_2, t_0) = \hat{T}(t_2, t_1)\hat{T}(t_1, t_0). \quad (1.5)$$

Evoluční operátor je unitární, neboť také

$$\hat{T}(t, t_0)\hat{T}^+(t, t_0) = \hat{1} \quad (1.6)$$

a dále máme

$$\hat{T}^+(t, t_0) = \hat{T}(t_0, t) \quad . \quad (1.7)$$

Pro Taylorův rozvoj  $\hat{T}(t + \Delta t, t)$  dostáváme

$$\hat{T}(t + \Delta t, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t + \dots, \quad (1.8)$$

kde  $\hat{H}$  je nějaký hermiteovský operátor. Evoluční operátor splňuje rovnici

$$i \hbar \frac{d}{dt} \hat{T}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{T}(t, t_0) \quad , \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1} \quad . \quad (1.9)$$

### 1.3 Schrödingerův a Heisenbergův obraz

Ve Schrödingerově obraze předpokládáme, že se v čase mění stavový vektor. Pro stavový vektor platí přirozeně ta samá rovnice, jako pro evoluční operátor (Schrödingerova rovnice)

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H}_S(t) |\psi_S(t)\rangle \quad (1.10)$$

a pokud operátory závisí na čase, tak pouze explicitně. V Heisenbergově obraze naopak předpokládáme, že se stavový vektor v čase nemění. Požadavek rovnosti vyjádření střední hodnoty libovolné fyzikální veličiny v obou obrazech vede ke vztahu mezi operátory

$$\begin{aligned} |\psi_H\rangle &\equiv |\psi_S(t_0)\rangle = \hat{T}^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad , \\ \langle \psi_S(t) | \hat{F}_S | \psi_S(t) \rangle &= \langle \psi_H | \hat{F}_H(t) | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{T}(t, t_0) \hat{F}_H(t) \hat{T}^+(t, t_0) | \psi_H \rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.11)$$

tedy

$$\hat{F}_H(t) = \hat{T}^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}(t, t_0) \quad . \quad (1.12)$$

Rovnici pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze získáme derivováním předchozího vztahu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{F}_H &= \frac{d\hat{T}^+}{dt} \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \frac{d\hat{T}}{dt} + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left( -\hat{T}^+ \hat{H}_S \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \hat{H}_S \hat{T} \right) + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

S uvážením (1.6) máme

$$\frac{d}{dt} \hat{F}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}_H, \hat{H}_H] + \frac{\partial \hat{F}_H}{\partial t} \quad . \quad (1.14)$$

## 1.4 Interakční obraz

Velmi důležitým pro aplikace je interakční obraz. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí,  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ , kde  $\hat{H}_0$  je na čase nezávislá základní část a  $\hat{V}(t)$  je interakční část, která může explicitně záviset na čase. Zvolíme

$$\begin{aligned} \hat{T}_0(t, t_0) &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} , \\ F_I &= \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}_0(t, t_0) \quad , \quad |\psi_I(t)\rangle = \hat{T}_0^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle , \end{aligned} \quad (1.15)$$

a dostáváme pak

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{H}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad , \quad \hat{H}_I(t) = \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{V}(t) \hat{T}_0(t, t_0) \quad , \\ \frac{d}{dt} \hat{F}_I &= \hat{T}_0^+(t, t_0) \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} \hat{T}_0(t, t_0) + [\hat{H}_0, \hat{F}_I] \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 2 Relativita a antičástice podle Feynmana

Amplituda pravděpodobnosti přechodu

$$A(\phi_0 \rightarrow \chi) = -i \int d^3 \vec{x} \chi^*(\vec{x}) U(\vec{x}) \phi_0(\vec{x}) = -i \langle \chi | \hat{U} | \phi_0 \rangle \quad . \quad (2.1)$$

Předpokládáme (první předpoklad je splněn normováním  $|\phi_0\rangle$ , druhý vhodnou volbou počátku odečítání energie)

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1 \quad , \quad \langle \phi_0 | \hat{U} | \phi_0 \rangle = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Působení v čase  $t_1$  označme  $\hat{U}_1$ , působení v čase  $t_2$  jako  $\hat{U}_2$  atd. Máme pak

$$A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) = 1 - \sum_m \langle \phi_0 | \hat{U}_2 | \psi_m \rangle \exp\{-i E_m(t_2 - t_1)\} \langle \psi_m | \hat{U}_1 | \phi_0 \rangle \quad . \quad (2.3)$$

Za  $|\psi_m\rangle$  vezmeme rovinné vlny. S označeními

$$a(\vec{x}_1) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_1, t_1) \phi_0(\vec{x}_1) \quad , \quad b(\vec{x}_2) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_2, t_2) \phi_0(\vec{x}_2) \quad , \quad (2.4)$$

kde  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  (ne nutně kladná větev odmocniny), můžeme psát

$$\begin{aligned} A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) &= 1 - \\ &\int d^3 \vec{x}_2 b^*(\vec{x}_2) d^3 \vec{x}_1 a(\vec{x}_1) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \exp\{-i[E_p(t_2 - t_1) - \vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)]\} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Proč jsme vydělili člen s energií, je vidět z úpravy relativisticky invariantního výrazu

$$\begin{aligned} \delta(p^i p_i - m^2) d p^0 d p^1 d p^2 d p^3 &= \delta(E^2 - p^2 - m^2) d E d^3 \vec{p} = \\ \frac{1}{2 E_p} [\delta(E + E_p) + \delta(E - E_p)] d E d^3 \vec{p} &\Rightarrow \frac{d^3 \vec{p}}{2 E_p} = \text{inv} \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Označme  $t = t_2 - t_1$  a  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  a všimněme si chování funkce

$$G(\vec{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2 E_p} \exp\{i[\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p t]\} \quad . \quad (2.7)$$

Předpokládejme  $E_p > 0$  a prostorupodobný interval  $\lambda = \sqrt{-s^2} = \sqrt{r^2 - t^2}$ . Integrací přes úhlové proměnné dostaneme

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d p \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} = \\ &\frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} d p \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituce  $p = m \sinh \varphi$  a označení  $r = \lambda \cosh \varphi_0$ ,  $t = \lambda \sinh \varphi_0$  převedou integrál na

$$G(r, t) = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} d \varphi \exp\{i m \lambda \sinh(\varphi - \varphi_0)\} = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(m \lambda) \quad , \quad (2.9)$$

kde  $K_0(x) = \int_0^{\infty} d y \cos(x \sinh y)$  je Besselova funkce. Pomocí vztahu  $K_0'(x) = -K_1(x)$  přepíšeme (2.9) na

$$G(\lambda) = \frac{i m}{8\pi^2 \lambda} K_1(m \lambda) \quad . \quad (2.10)$$

### 3 Komplexní proměnná

Místo úpravy integrálu podle (2.8) napišme

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{i}{4\pi^2 r} \int_0^{\infty} d p \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \sin(p r) \exp\{-i \sqrt{p^2 + m^2} t\} = \\ &\frac{i}{4\pi^2 r} \int_m^{\infty} d \omega \sin(\sqrt{\omega^2 - m^2} r) \exp\{-i \omega t\} \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nemusíme provádět detailní výpočet (3.1), ale pro prostorupodobný interval  $-r < t < r$  využít následující věty

**Věta:** Necht'

(1)  $F(\omega)$  je komplexní funkce reálné proměnné definovaná na intervalu  $\omega \in [0, \infty)$  skoro všude.

(2) Pro všechna  $t \in (-\infty, \infty)$  konverguje absolutně integrál

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad , \quad \text{tj.} \quad \int_0^{\infty} |F(\omega)| d\omega < \infty \quad (3.2)$$

(funkce  $F(\omega)$  je absolutně integrabilní na  $[0, \infty)$ ).

(3) Existuje interval  $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$  tak, že  $f(t) = 0$  na  $[a, b]$ .

Pak  $f(t)$  je identicky nulová na  $[-\infty, \infty]$ .

**Důkaz:** Definujme funkci  $G(z)$  komplexní proměnné  $z = t + iy$  vztahem

$$G(z) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega z} d\omega \quad . \quad (3.3)$$

Funkce  $f(t)$  je restrikcí  $G(z)$  na reálnou osu, tj.  $G(z)|_{\mathbb{R}} = f(t)$ . Uvažujme  $G(z)$  pouze na množině  $\mathbb{C}_d = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \leq 0\}$ , tj. v dolní polorovině komplexní roviny. Pak platí

$$\left| \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega z} d\omega \right| \leq \int_0^{\infty} |F(\omega) e^{-i\omega z}| d\omega \leq \int_0^{\infty} |F(\omega)| e^{\omega y} d\omega \leq \int_0^{\infty} |F(\omega)| d\omega \quad . \quad (3.4)$$

Integrál definující funkci  $G(z)$  tedy konverguje (dokonce absolutně) v dolní polorovině.

Označme dále

$$\begin{aligned} u(t, y) &= \text{Re } G(z) = \int_0^{\infty} (\text{Re } F(\omega) \cos \omega t - \text{Im } F(\omega) \sin \omega t) e^{\omega y} d\omega \quad , \\ v(t, y) &= \text{Im } G(z) = \int_0^{\infty} (\text{Re } F(\omega) \sin \omega t + \text{Im } F(\omega) \cos \omega t) e^{\omega y} d\omega \quad . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Přímým výpočtem (derivování podle parametru je zajištěno absolutní konvergencí integrálů) se snadno prověří platnost Cauchyových - Riemannových podmínek

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial v(t, y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(t, y)}{\partial t} \quad . \quad (3.6)$$

Diferencovatelnost funkcí  $u(t, y)$  a  $v(t, y)$  je rovněž zřejmá ze vztahů, jimiž jsou definovány a s použitím absolutní konvergence integrálů. Funkce  $G(z)$  je tedy holomorfním rozšířením funkce  $f(t)$  z reálné osy do dolní poloroviny komplexní roviny. Vzhledem k tomu, že reálná osa má v této polorovině hromadné body, je toto rozšíření určeno jednoznačně.

**Věta o jednoznačnosti:** Necht'  $G(z)$  je holomorfní v otevřené souvislé oblasti  $\mathcal{D}$ .

Označme  $N_G = \{z \in \mathcal{D} \mid G(z) = 0\}$ . Pak nastane právě jedna ze dvou možností

(1)  $N_G$  je tvořena izolovanými body.

(2)  $N_G = \mathcal{D}$  (tedy  $G(z) \equiv 0$ )  $\Leftrightarrow N_G$  má v  $\mathcal{D}$  alespoň jeden hromadný bod.

#### 4 Antičástice podle Feynmana II

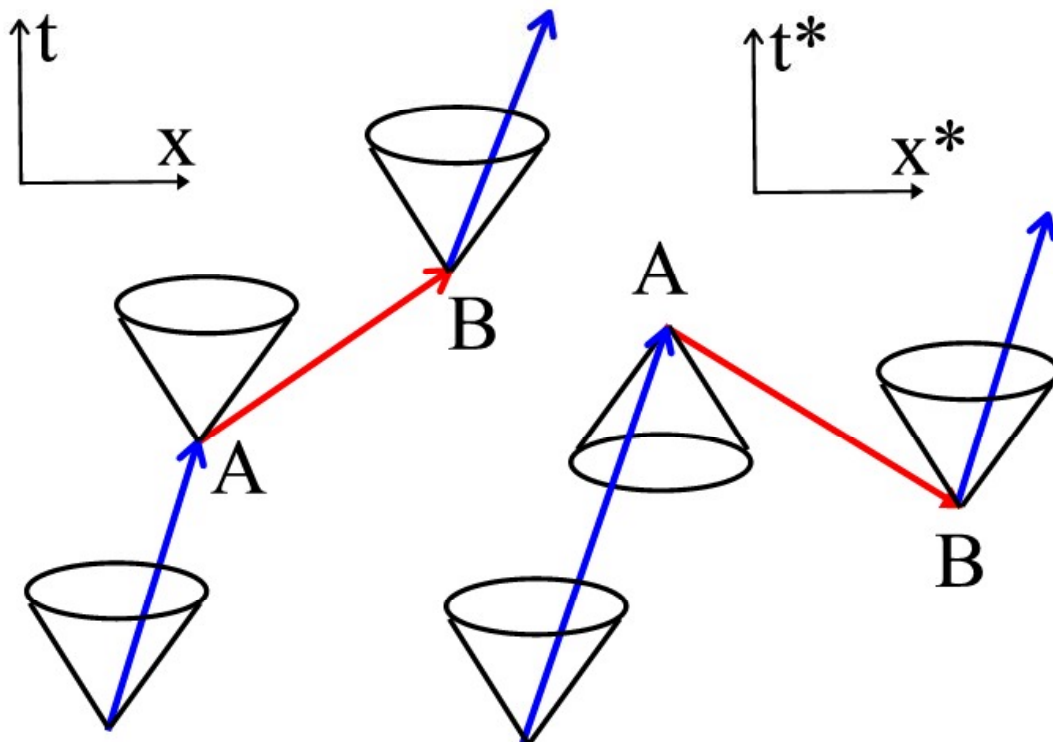
Podle uvedené věty nemůže být amplituda pravděpodobnosti přechodu rovna nule pro konečný interval času, speciálně nemůže být rovna nula vně světelného kužele bodu  $(t_A, \vec{x}_A)$ . Proto, je-li (levá část obrázku)  $t_A < t_B$  dostáváme příspěvek k amplitudě od částic putujících nadsvětelnou rychlostí, pro které je interval prostorupodobný, tj. pro které platí  $c^2(t_B - t_A)^2 - (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 < 0$ . Časová následnost událostí je pro události oddělené prostorupodobným intervalem závislá na zvolené inerciální soustavě. To snadno ukážeme: vztah pro Lorentzovu transformaci je (soustava  $K^*$  se pohybuje vzhledem k soustavě  $K$  podél osy  $x$  rychlostí  $V$ )

$$ct = \frac{ct^* + \frac{V}{c}x^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x^* + Vt^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \quad (4.1)$$

Pro  $V > 0$  platí

$$x_B - x_A > \frac{c^2}{V}(t_B - t_A) \Rightarrow t_B^* < t_A^* . \quad (4.2)$$

V souřadné soustavě  $K$  (levý obrázek) se pohybuje částice volně do bodu  $(t_A, \vec{x}_A)$ , kde je rozptýlena, pak opět volně do bodu  $(t_B, \vec{x}_B)$ , kde se opět rozptylem dostane do původního



stavu a pohybuje se jako volná částice. V souřadné soustavě  $K^*$  (pravý obrázek) vypadá však věc úplně jinak. Částice se pohybuje volně, ale v čase  $t_B^*$  vznikne v bodě  $(t_B^*, \vec{x}_B^*)$  dvojice částic, z nichž jedna se pohybuje proti směru času a druhá je ve stavu původní částice. Právě tato částice se pak v bodě  $(t_A^*, \vec{x}_A^*)$  setká s původní částicí a obě zmizí. Zbylá částice pokračuje volným pohybem.

## 5 Relativistická kvantová mechanika – historický přístup

V nerelativistické teorii máme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad \hat{H} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (5.1)$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) . \quad (5.2)$$

V relativistické teorii

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) , \quad (5.3)$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) .$$



Invariantní délka čtyřvektoru impulzu je

$$p_i p^i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad . \quad (5.4)$$

Hamiltonián je tedy

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (5.5)$$

a analogie ke kvantování v souřadnicové reprezentaci

$$\hat{p}_i \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \quad (5.6)$$

Analogie ke Schrödingerově rovnici je ovšem

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi(\vec{r}, t) \quad . \quad (5.7)$$

## 6 Spinory ve čtyřrozměrném časoprostoru

### 6.1 Vlastnosti spinorů

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.1)$$

Spinor je dvoukomponentový objekt, jehož komponenty odpovídají dvěma možným hodnotám projekce spinu do osy  $z$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.2)$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je  $\hat{P}^2 = \hat{1}$ . U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o  $0$  a  $2\pi$  nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \Rightarrow \hat{P} = \pm 1, \quad \hat{P}^2 = -1 \Rightarrow \hat{P} = \pm i \quad . \quad (6.3)$$

Ve čtyřrozměrném prostoru však prostorová inverse mění znaménko pouze tří  $(x, y, z)$  ze čtyř  $(ct, x, y, z)$  časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P} \hat{L}(\vec{V}) = \hat{L}(-\vec{V}) \hat{P} \quad . \quad (6.4)$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^1 = \alpha \xi^1 + \beta \xi^2 \quad , \quad \xi'^2 = \gamma \xi^1 + \delta \xi^2 \quad , \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1 \quad . \quad (6.5)$$

Koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\delta$  jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Bilineární forma

$$\xi^1 \Xi^2 - \xi^2 \Xi^1 \quad (6.6)$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2). Je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$\mathbf{g} = (g_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}^T = (g^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (6.7)$$

$$\xi_A = g_{AB} \xi^B \quad , \quad \xi^A = g^{AB} \xi_B \quad .$$

Potom můžeme psát místo (6.6)

$$\xi^A \Xi_A = -\xi_A \Xi^A = inv \quad . \quad (6.8)$$

V nerelativistické teorii určuje  $\psi^1 \psi^{1*} + \psi^2 \psi^{2*}$  hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (6.5) unitární ( $\alpha = \delta^*$ ,  $\beta = -\gamma^*$ ). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů  $\xi$  a  $\eta$ , transformujících se podle komplexně sdružených representací Lorentzovy grupy,  $\xi$  podle (6.5) a  $\eta$  podle

$$\eta'^1 = \alpha^* \eta^1 + \beta^* \eta^2 \quad , \quad \eta'^2 = \gamma^* \eta^1 + \delta^* \eta^2 \quad , \quad \alpha^* \delta^* - \beta^* \gamma^* = 1 \quad . \quad (6.9)$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené representace Lorentzovy grupy značíme tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (6.7). Vidíme, že transformace (6.9) odpovídá úměrnosti

$$\eta^{\dot{A}} \sim \xi^{*A} \quad . \quad (6.10)$$

Při prostorových rotacích se kovariantní složky trojrozměrného spinoru transformují jako komplexně sdružené složky kontravariantního spinoru  $\psi_A \sim \psi^{*A}$ . Tuto vlastnost si musí zachovat i složky čtyřrozměrného spinoru. S uvažováním (6.10) je tedy

$$\eta_A \sim \eta^{*\dot{A}} \sim \xi^A \quad . \quad (6.11)$$

Budem tedy podobně jako v (6.2) psát

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (6.12)$$

Působení operátoru prostorové inverse nemůže být násobkem jednotkové matice, jako tomu bylo u trojrozměrných spinorů. Bude proto operátor prostorové převádět  $\xi$  na  $\eta$  a naopak. Zapsáno ve složkách je (volíme reprezentaci, kde  $\hat{P}^2 = -1$ )

$$\hat{P}\xi^A = i\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta_{\dot{A}} = i\xi^A \quad (6.13)$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \quad (6.14)$$

Zápis některých vztahů výrazně zjednodušíme maticovým značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\xi} = (\xi_1 \quad \xi_2) \quad , \quad \tilde{\eta} = (\eta^1 \quad \eta^2) \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad . \quad (6.15)$$

Transformační vztahy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \xi' &= L\xi \quad , \quad \tilde{\xi}' = \tilde{\xi}L^{-1} \quad , \quad \hat{P}\xi = i\eta \quad , \quad \hat{P}\eta = i\xi \quad , \\ \tilde{\eta}' &= \tilde{\eta}L^+ \quad , \quad \eta' = (L^+)^{-1}\eta \quad , \quad \hat{P}\tilde{\xi} = -i\tilde{\eta} \quad , \quad \hat{P}\tilde{\eta} = -i\tilde{\xi} \quad . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dvojice bispinorů  $(\xi, \eta)$  a  $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  reprezentují mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\xi}\xi + \tilde{\eta}\eta = \Xi_A\xi^A + \tilde{H}^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = \omega \quad , \\ \omega &= \tilde{\xi}\xi - \tilde{\eta}\eta = \Xi_A\xi^A - \tilde{H}^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = -\omega \quad . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Pro vektorové veličiny

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi\tilde{H} + \Xi\tilde{\eta} = (\xi^A\tilde{H}^{\dot{B}} + \Xi^A\tilde{\eta}^{\dot{B}}) \quad , \quad \hat{P}\zeta = \zeta \quad , \\ \zeta &= \xi\tilde{H} - \Xi\tilde{\eta} = (\xi^A\tilde{H}^{\dot{B}} - \Xi^A\tilde{\eta}^{\dot{B}}) \quad , \quad \hat{P}\zeta = -\zeta \quad . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vzhledem k relacím

$$\zeta = (\zeta^{A\dot{B}}) = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0 \sigma_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta \vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta\} \quad (6.19)$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}(a^0, \vec{a}) = (a^0, -\vec{a}) \quad , \quad \hat{P}(a^0, \vec{a}) = (-a^0, \vec{a}) \quad . \quad (6.20)$$

## 6.2 Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi spinorem  $\zeta$  a čtyřvektorem  $a^i$  využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Zopakujme potřebné značení

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta} = (\eta^1 \quad \eta^2), \quad \xi \tilde{\eta} \sim \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{11} & \zeta^{12} \\ \zeta^{21} & \zeta^{22} \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\xi' = L\xi, \quad \tilde{\eta}' = \tilde{\eta}L^+, \quad \zeta' = L\zeta L^+.$$

Pro infinitesimální Lorentzovu transformaci píšeme

$$\delta L = I + \lambda, \quad \zeta' = \zeta + \lambda\zeta + \zeta\lambda^+, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci čtyřvektoru máme jednak

$$\vec{a}' = \vec{a} - a^0 \vec{n} \delta V = \vec{a} - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \text{Tr}\{\zeta\},$$

$$a'^0 = a^0 - \vec{a} \cdot \vec{n} \delta V = a^0 - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \cdot \text{Tr}\{\vec{\sigma} \zeta\}$$
(6.23)

a také

$$\vec{a}' = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta' \vec{\sigma}\} = \vec{a} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\vec{\sigma} \lambda + \lambda^+ \vec{\sigma})\},$$

$$a'^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta' \gamma\} = a^0 + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\lambda + \lambda^+)\}.$$
(6.24)

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{\delta V}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}. \quad (6.25)$$

Konečná Lorentzova transformace (pro jednoduchat zápisu v rovině  $t$ - $x$ ) je

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} = \cosh\phi x - \sinh\phi t,$$

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}} = \cosh\phi t - \sinh\phi x.$$
(6.26)

Infinitesimální transformace je pak

$$x' = x - \delta V t = x - \delta\phi t, \quad t' = t - \delta V x = t - \delta\phi x. \quad (6.27)$$

Pro výpočet konečné Lorentzovy transformace budeme infinitesimální transformaci aplikovat násobně

$$\delta\phi = \frac{\phi}{n}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I - \frac{\phi}{2n} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right)^n = \exp\left\{ -\frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\}. \quad (6.28)$$

Infinitesimální transformaci jsme charakterizovali parametrem  $\delta\phi$  a nikoliv  $\delta V$ , protože

$$L(\phi_1)L(\phi_2) = L(\phi_1 + \phi_2), \quad L(V_1)L(V_2) \neq L(V_1 + V_2), \quad (6.29)$$

jak se můžeme přesvědčit z (6.26). S využitím vztahů

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^{2n} = I \quad , \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^{2n+1} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (6.30)$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\} = I \cosh \frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sinh \frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh \phi = V \quad . \quad (6.31)$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \delta\theta (\vec{n} \times \vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta\theta}{2} \text{Tr} \{ \zeta (\vec{\sigma} \times \vec{n}) \} \quad , \quad a'^0 = a^0 \quad , \quad (6.32)$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^+ = \frac{i\delta\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad . \quad (6.33)$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp \left\{ \frac{i\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\} = I \cos \frac{\theta}{2} + i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \frac{\theta}{2} \quad . \quad (6.34)$$

## 7 Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

### 7.1 Diracova rovnice pro volnou částici

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory můžeme operátoru čtyřimpulsu  $\hat{p}^i$  přiřadit operátorový spinor  $\hat{p}^{A\dot{B}}$  resp.  $\hat{p}_{A\dot{B}}$ . Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{A\dot{B}} \eta_{\dot{B}} = m \xi^A \quad , \quad \hat{p}_{\dot{B}A} \xi^A = m \eta_{\dot{B}} \quad , \quad (7.1)$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

můžeme přepsat na

$$(\hat{p}_0 \sigma_0 + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma}) \eta = m \xi \quad , \quad (\hat{p}_0 \sigma_0 - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma}) \xi = m \eta \quad . \quad (7.3)$$

Zavedení bispinorů a  $\gamma$  matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (7.4)$$

přejde (7.3) na

$$\left(\gamma^0 \hat{p}_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \psi = m \psi \quad . \quad (7.5)$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}} \equiv \gamma^j \hat{p}_j \quad , \quad (\underline{\hat{p}} - m) \psi = 0 \quad . \quad (7.6)$$

V souřadnicové reprezentaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\begin{aligned} (\underline{\hat{p}} - m c) \psi = 0 \quad , \quad \underline{\hat{p}} \rightarrow i \hbar \nabla = i \hbar \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} = i \hbar \left( \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \quad , \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m c^2 \beta \quad , \end{aligned} \quad (7.7)$$

kde matice  $\alpha$  a  $\beta$  jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2 \delta_{ik} \quad , \quad \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0 \quad , \quad \beta^2 = 1 \quad . \end{aligned} \quad (7.8)$$

## 7.2 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i = \left( \frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right) \quad , \quad A_i = \left( \frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad (7.9)$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impuls) oproti volné částici

$$p_i \rightarrow p_i - e A_i \quad (7.10)$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^j (\hat{p}_j - e \hat{A}_j) \psi = m c \psi \quad , \quad (7.11)$$

kde  $\gamma^j$  je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové reprezentaci tvar (jsou možné i jiné reprezentace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^j = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

a  $\psi$  je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové reprezentaci je

$$\hat{p}_i = i \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, i \hbar \vec{\nabla} \right) \quad , \quad \hat{p}^i = \left( i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, -i \hbar \vec{\nabla} \right) \quad (7.13)$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left( \frac{1}{c} \gamma^0 \left( i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - e \Phi \right) + \vec{\gamma} \cdot (i \hbar \vec{\nabla} + e \vec{A}) - m c \right) \psi = 0 \quad . \quad (7.14)$$

nebo po přepsání

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( c \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}) + \beta m c^2 + e \hat{\Phi} \right) \psi \quad , \quad (7.15)$$

kde jsme označili

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} \quad . \quad (7.16)$$

### 7.3 Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{dt} \hat{F} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad . \quad (7.17)$$

Zavedeme operátor mechanického impulzu

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}}) \quad . \quad (7.18)$$

Výpočet komutátorů

$$[\hat{H}, \hat{\vec{r}}] = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \quad , \quad (7.19)$$

a trochu komplikovaněji

$$[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}})] = -\frac{e \hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{e c \hbar}{i} \vec{\nabla} (\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) - \frac{e c \hbar}{i} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad . \quad (7.20)$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla} (\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\alpha} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad (7.21)$$

dostaneme

$$[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}})] = -\frac{e \hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{e c \hbar}{i} \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (7.22)$$

Tedy

$$\frac{d \hat{\vec{r}}}{dt} = c \vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d \hat{\vec{\pi}}}{dt} = -e \vec{\nabla} \Phi + e c \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (7.23)$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

### 7.4 Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left( i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m c \right) \psi = 0 \quad (7.24)$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů  $(\gamma^j)^+ = \gamma^0 \gamma^j \gamma^0$ , tedy

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0 \quad , \quad (\vec{\gamma})^+ = -\vec{\gamma} \quad (7.25)$$

napišeme jako

$$\left( -i \hbar (\gamma^0)^T \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar (\vec{\gamma})^T \cdot \vec{\nabla} - m c \right) \psi^* = 0 \quad . \quad (7.26)$$

Rovnici (7.26) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+ \left( -i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m c \right) = 0 \quad (7.27)$$

a po zavedení Diracova sdružení  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$  s využitím antikomutačních relací  $\gamma$  matic máme

$$\bar{\psi} \left( i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m c \right) = 0 \quad . \quad (7.28)$$

S použitím symbolů  $\underline{a} = \gamma^j a_j$  můžeme (7.24) a (7.28) zapsat jako

$$(\underline{\hat{p}} - m c) \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} (\underline{\hat{p}} + m c) = 0 \quad . \quad (7.29)$$

Vynásobení první rovnice v (7.29) zleva  $\bar{\psi}$  a druhé rovnice zprava  $\psi$  dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad j^k = \bar{\psi} \gamma^k \psi \quad . \quad (7.30)$$

Časupodobná komponenta je  $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi > 0$ .

## 7.5 Standardní representace

Od spinorové representace přejdeme ke standardní representaci unitární transformací

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) \quad , \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta) \quad . \quad (7.31)$$

Vzhledem k chování  $\xi$  a  $\eta$  při působení operátoru parity máme

$$\hat{P} \varphi = i \varphi \quad , \quad \hat{P} \chi = -i \chi \quad . \quad (7.32)$$

Rovnice pro tyto nové spinory získáme sečtením a odečtením rovnic v (7.3)



$$\hat{p}_0 \sigma_0 \varphi - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \chi = m \varphi \quad , \quad -\hat{p}_0 \sigma_0 \chi + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \varphi = m \chi \quad . \quad (7.33)$$

Rovnice (7.5) a (7.7) mají ve standardní reprezentaci stejný tvar, matice v nich jsou po transformaci

$$\gamma \rightarrow \hat{U} \gamma \hat{U}^+ \quad (7.34)$$

vyjádřeny jako

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (7.35)$$

Matice operátoru spinu je ve všech reprezentacích stejná

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad , \quad \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \quad . \quad (7.36)$$

## 8 Rovinné vlny

Dosadíme-li do (7.29) rovinné vlny (volba normovací konstanty  $\varepsilon = c p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  se ozřejmí později)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(p) \exp(-i p_i x^i) \quad , \quad \psi(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(-p) \exp(i p_i x^i) \quad , \quad (8.1)$$

dostáváme

$$(\underline{p} - mc)u(p) = 0 \quad , \quad (\underline{p} + mc)u(-p) = 0 \quad (8.2)$$

a

$$\bar{u}(p)(\underline{p} - mc) = 0 \quad , \quad \bar{u}(-p)(\underline{p} + mc) = 0 \quad . \quad (8.3)$$

podmínkou řešitelnosti je  $p^i p_i = m^2 c^2$ . Bispinory normujeme tak, že

$$\bar{u}(p)u(p) = 2mc^2 \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2mc^2 \quad . \quad (8.4)$$

Násobení zleva první rovnice v (8.2)  $\bar{u}(p)$  a druhé rovnice  $\bar{u}(-p)$  vede na

$$\bar{u}(\pm p) \gamma^j p_i u(\pm p) = 2m^2 c^3 = 2c p^i p_i \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\pm p) \gamma^j u(\pm p) = 2c p^i \quad . \quad (8.5)$$

Pro čtyřvektor toku pak

$$j^i = \bar{\psi}(\pm p) \gamma^i \psi(\pm p) = \frac{c p^i}{\varepsilon} = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) \quad . \quad (8.6)$$

Ve standardní reprezentaci, kde píšeme

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad (8.7)$$

se Diracova rovnice rozpadá na dvě vázané rovnice

$$\begin{aligned} (\varepsilon - mc^2)\phi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \chi &= 0 , \\ (\varepsilon + mc^2)\chi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \phi &= 0 . \end{aligned} \quad (8.8)$$

Máme pak

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + mc^2} w(+)) \\ \sqrt{\varepsilon - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(+)) \end{pmatrix} , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(-)) \\ \sqrt{\varepsilon + mc^2} w(-)) \end{pmatrix} , \quad (8.9)$$

kde  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$  a  $w(\pm)$  jsou libovolné dvoukomponentové veličiny, splňující  $w^+(\pm)w(\pm) = 1$ .

Pro relativisticky sdružené bispinory máme z (8.9)

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \left( \sqrt{\varepsilon + mc^2} w^+(+) \quad -\sqrt{\varepsilon - mc^2} w^+(+) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right) , \\ \bar{u}(-p) &= \left( \sqrt{\varepsilon - mc^2} w^+(-) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad -\sqrt{\varepsilon + mc^2} w^+(-) \right) . \end{aligned} \quad (8.10)$$

## 9 Transformace Diracovy rovnice

### 9.1 Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)

Hamiltonián je

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2 . \quad (9.1)$$

Ve standardní reprezentaci jsou matice  $\vec{\alpha}$  a  $\beta$  dány vztahy

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} . \quad (9.2)$$

Uvažujme o takové unitární (a na čase explicitně nezávislé) transformaci, která by odstranila operátory, které vážou velké komponenty s malými

$$\hat{U} = \exp(i \hat{S}) , \quad \hat{S} = \hat{S}^\dagger , \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = 0 . \quad (9.3)$$

Platí

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \exp(i \hat{S}) |\psi\rangle , \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle &= \exp(i \hat{S}) \hat{H} |\psi\rangle = \exp(i \hat{S}) \hat{H} \exp(-i \hat{S}) |\psi'\rangle = \hat{H}' |\psi'\rangle . \end{aligned} \quad (9.4)$$

Velké a malé komponenty spojuje operátor  $c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}$ . Uhádneme tedy poměrně snadno potřebný tvar  $\hat{S}$

$$\exp(i\hat{S}) = \exp(\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \theta) = \cos(|\hat{\vec{p}}|\theta) + \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \frac{\sin(|\hat{\vec{p}}|\theta)}{|\hat{\vec{p}}|} \quad , \quad \theta = \theta(\hat{\vec{p}}) \quad . \quad (9.5)$$

Pro transformovaný hamiltonián dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \exp(i\hat{S}) \hat{H} \exp(-i\hat{S}) = \\ & \left( \cos(|\hat{\vec{p}}|\theta) + \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \frac{\sin(|\hat{\vec{p}}|\theta)}{|\hat{\vec{p}}|} \right) (c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m c^2) \left( \cos(|\hat{\vec{p}}|\theta) - \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \frac{\sin(|\hat{\vec{p}}|\theta)}{|\hat{\vec{p}}|} \right) = \\ & (c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m c^2) \left( \cos(|\hat{\vec{p}}|\theta) - \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \frac{\sin(|\hat{\vec{p}}|\theta)}{|\hat{\vec{p}}|} \right)^2 = \\ & (c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m c^2) \exp(-2\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \theta) = \\ & c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \left[ \cos(2|\hat{\vec{p}}|\theta) - m c \frac{\sin(2|\hat{\vec{p}}|\theta)}{|\hat{\vec{p}}|} \right] + \beta m c^2 \left[ \cos(2|\hat{\vec{p}}|\theta) + |\hat{\vec{p}}| \frac{\sin(2|\hat{\vec{p}}|\theta)}{m c} \right] . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Položíme-li teď

$$\tan(2|\hat{\vec{p}}|\theta) = \frac{|\hat{\vec{p}}|}{m c} \quad , \quad (9.7)$$

dostáváme výsledný hamiltonián

$$\hat{H}' = \beta \sqrt{m^2 c^4 + \hat{\vec{p}}^2 c^2} \quad . \quad (9.8)$$

## 9.2 Rovnice částice v elektromagnetickém poli

Hamiltonián v tomto případě je

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}) + \beta m c^2 + e \Phi = \beta m c^2 + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{O}} \quad , \quad (9.9)$$

kde

$$\hat{\mathcal{E}} = e \Phi \quad , \quad \hat{\mathcal{O}} = c \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}) \quad . \quad (9.10)$$

Platí

$$\beta \hat{O} = -\hat{O} \beta \quad , \quad \beta \hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}} \beta \quad . \quad (9.11)$$

Uvažujme opět o takové unitární (ale teď už možná na čase závislé) transformaci, která by odstranila liché operátory, které vážou velké komponenty s malými a ponechala jen operátory sudé

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^+ \quad . \quad (9.12)$$

Pro  $|\psi'\rangle = \exp(i\hat{S})|\psi\rangle$  dostáváme

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S})|\psi'\rangle &= \exp(-i\hat{S}) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle + \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S}) \right) |\psi'\rangle = \\ & \hat{H} |\psi'\rangle = \hat{H} \exp(-i\hat{S}) |\psi'\rangle \quad . \end{aligned} \quad (9.13)$$

odkud pak

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \hat{H}' |\psi'\rangle \quad , \quad \hat{H}' = \exp(i\hat{S}) \left( \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp(-i\hat{S}) \quad . \quad (9.14)$$

Mějme výraz (chápaný jako funkce parametru  $\lambda$ , který pak položíme roven jedné)

$$F(\lambda) = \exp(i\hat{B}\lambda) \hat{A} \exp(-i\hat{B}\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left( \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right) \Big|_{\lambda=0} \quad . \quad (9.15)$$

Derivováním (9.15) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= i [\hat{B}, \hat{A}] \quad , \\ \dots \quad , \\ \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} &= i^n \left[ \hat{B}, \left[ \hat{B}, \left[ \dots \left[ \hat{B}, \hat{A} \right] \dots \right] \right] \right] \quad , \end{aligned} \quad (9.16)$$

takže ponecháme-li v rozvoji pouze členy do třetího řádu (nebo čtvrtého, násobí-li člen klidovou energií) v  $\hat{S}$ , dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} + i [\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \\ & \frac{m c^2}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \beta]]]] - \hbar \dot{S} - \frac{i\hbar}{2} [\hat{S}, \dot{S}] + \frac{\hbar}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, \dot{S}]] \quad . \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ponecháme-li v (9.17) jen členy nejnižšího řádu, máme

$$\hat{H}' = \beta m c^2 + \hat{\mathcal{E}} + \hat{O} + i m c^2 [\hat{S}, \beta] \quad . \quad (9.18)$$

Tento tvar vede k tomu, že zkusíme zvolit

$$\hat{S} = -\frac{i}{2mc^2} \beta \hat{O} \quad (9.19)$$

S označením matice spinu (ta je stejná ve spinorové i standardní reprezentaci)

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

máme po delších výpočtech výsledný hamiltonián ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \beta \left( mc^2 + \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\vec{p}}^4 \right) + e\Phi - \\ & \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{\vec{p}}) - \frac{ie\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (9.21) \end{aligned}$$

Pro rotačně souměrné pole máme

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (9.22)$$

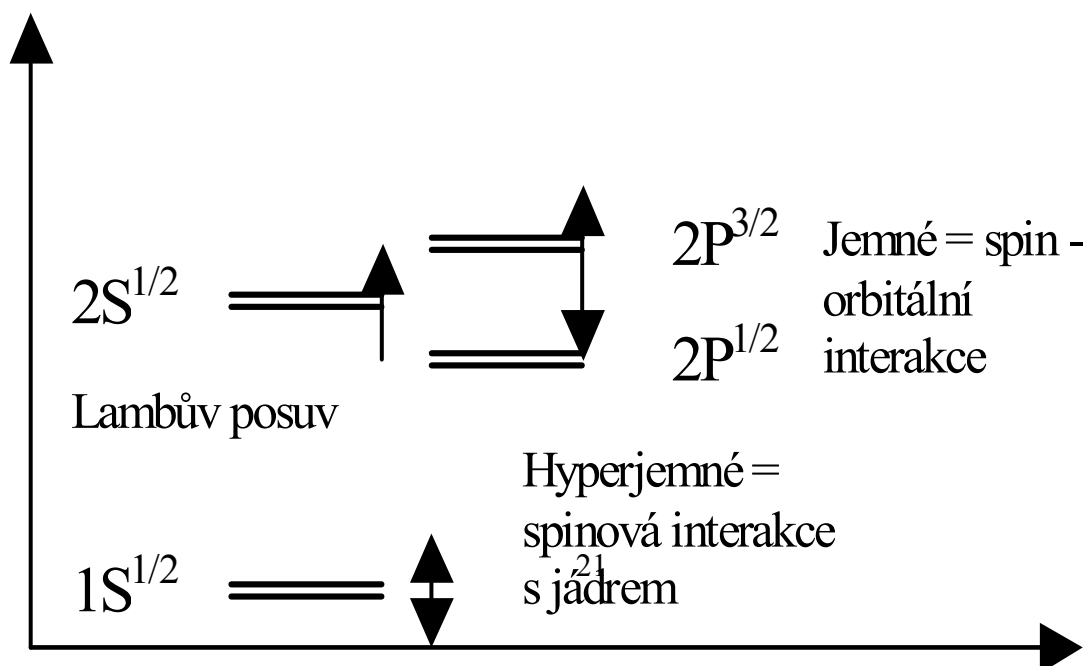
a příslušný člen nabude tvaru

$$-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{\vec{p}}) = \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} \quad (9.23)$$

kterým popisujeme spin - orbitální interakci. Poslední člen se nazývá Darwinův, jeho vznik se dá se chápat jako rozmazání energie Coulombova působení

$$\langle V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) \rangle \approx \left\langle \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right\rangle \approx \frac{1}{6} \Delta V \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \quad (9.24)$$

Schéma nejnižších hladin je na obrázku:



## 10 Rozptyl elektronu na jádře

Budeme počítat rozptyl elektronu na (nekonečně) těžkém jádře náboje  $Ze$ . Volba souřadné soustavy je velmi důležitá pro zjednodušení výpočtu. Impuls elektronu před rozptylem ať je ve směru osy  $x$ , impuls elektronu po rozptylem ať leží v rovině  $x$ - $y$  (značíme

$$\underline{p} \equiv p_i \gamma^i = (E/c) \gamma^t - \vec{p} \vec{\gamma}$$

$$\underline{p}_1 = \gamma^t \frac{E_1}{c} - \gamma^x p_{1x} \quad , \quad \underline{p}_2 = \gamma^t \frac{E_2}{c} - \gamma^x p_{2x} - \gamma^y p_{2y} \quad . \quad (10.1)$$

Čtyřvektor potenciálu je

$$A^i = \left( \frac{\phi}{c} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r}, \vec{A} = 0 \right) \Rightarrow \underline{A} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r} \gamma^t \quad . \quad (10.2)$$

Připomeňme Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - e \underline{A} - mc) |\psi\rangle = 0 \quad , \quad \underline{p} = i \hbar \underline{\nabla} \quad (10.3)$$

a vyjádření matic ve standardní reprezentaci

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad . \quad (10.4)$$

Počáteční a koncový stav je, pokud píšeme i obvykle vynechávaný normovací faktor

$$\langle x | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_1 V}} u_1 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{1x} x} \quad , \quad \langle x | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_2 V}} u_2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{2x} x} \quad . \quad (10.5)$$

Amplituda pravděpodobnosti přechodu je

$$\langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{u}_2 \gamma^t u_1}{2\sqrt{E_1 E_2}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt \quad . \quad (10.6)$$

Pro integrály máme vyjádření

$$\int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt = \frac{\sin\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}} e^{i\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T} \quad . \quad (10.7)$$

První integrál počítáme jako

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{\infty} dr r e^{iqr \cos \vartheta - \lambda r} = \frac{4\pi}{q} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dr \sin(qr) e^{-\lambda r} =$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\lambda^2 + q^2} = \frac{4\pi}{q^2} . \quad (10.8)$$

Pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$w(1 \rightarrow 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle \right|^2 =$$

$$\frac{|\bar{u}_2 \gamma' u_1|^2}{4 \hbar^2 E_1 E_2 V^2} \left( \frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\sin^2 \left( \frac{E_1 - E_2}{2 \hbar} T \right)}{\left( \frac{E_1 - E_2}{2 \hbar} \right)^2 T} . \quad (10.9)$$

Jedním z vyjádření Diracovy delta funkce je

$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} . \quad (10.10)$$

Využitím (10.10) upravíme vztah (10.9) na

$$w(1 \rightarrow 2) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\bar{u}_2 \gamma' u_1|^2}{4 E_1 E_2 V^2} \left( \frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \delta(E_2 - E_1) . \quad (10.11)$$

Hustota stavů v okolí koncového stavu (stav 2) je ( $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ )

$$d\rho = \frac{V d^3 \vec{p}_2}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{V E_2 p_2}{(2\pi \hbar)^3 c^2} d\Omega dE_2 \quad (10.12)$$

a tak můžeme psát (platí  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ )

$$d w = \frac{V d\Omega}{(2\pi \hbar)^3 c^2} \int w(1 \rightarrow 2) E_2 p_2 dE_2 = \frac{p_1}{E_1 V} |\bar{u}_2 \gamma' u_1|^2 \left( \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 d\Omega . \quad (10.13)$$

Poněvadž  $\vec{v} = \partial E / \partial \vec{p}$ , máme pro hustotu toku částic výraz

$$j = \frac{v_1}{V} = \frac{p_1 c^2}{E_1 V} \quad (10.14)$$

a pro diferenciální účinný průřez pak

$$d\sigma = |\bar{u}_2 \gamma' u_1|^2 \left( \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 q^2} \right)^2 d\Omega , \quad q^2 = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2 = 4 p_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} . \quad (10.15)$$

Nyní zvolme bispinory jako

$$u^{(1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} \begin{pmatrix} E+mc^2 \\ 0 \\ c(p_x + i p_y) \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(-1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+mc^2 \\ 0 \\ c(p_x - i p_y) \end{pmatrix}, \quad (10.16)$$

které získáme z (8.9) volbou

$$w(+)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(-)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Pro složky hybnosti máme

$$p_{1x} + i p_{1y} = p_1, \quad p_{2x} + i p_{2y} = p_1 \exp\{i\theta\}. \quad (10.18)$$

Platí

$$\left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = \frac{\left| (E_1 + mc^2)^2 + p_1^2 c^2 e^{-i\theta} \right|^2}{(E_1 + mc^2)^2} = 4 E_1^2 \left( 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (10.19)$$

kde výpočet zjednodušuje

$$\bar{u}_2 \gamma^t u_1 = u_2^+ \gamma^t \gamma^t u_1 = u_2^+ u_1. \quad (10.20)$$

Obdobně spočteme další výrazy, takže máme

$$\left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = 4 E_1^2 \left( 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 = 0, \quad (10.21)$$

$$\left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = 0, \quad \left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 = 4 E_1^2 \left( 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Pro diferenciální účinný průřez rozptylu je tedy konečný výraz

$$d\sigma_{rel} = \left( \frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\sigma_{Ruth}, \quad d\sigma_{Ruth} = \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_1^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (10.22)$$

## 11 Invariantní účinný průřez

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice 2 počet srážek v objemu  $dV$  za čas  $dt$

$$d\nu = n_1 \sigma v_{rel} dt n_2 dV, \quad d\nu = A n_1 n_2 dt dV, \quad (11.1)$$



kde  $v_{rel}$  je velikost rychlosti částice 1 v klidové soustavě částice 2,  $n_1$  a  $n_2$  jsou hustoty částic a konečně  $\sigma$  je účinný průřez. Veličiny  $dV$  a  $dt dV$  jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina  $An_1 n_2$ , přičemž  $A$  musí v klidové soustavě jedné z částic přejít na  $v_{rel} \sigma$ . Máme

$$n dV = n_0 dV_0 \Rightarrow n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n_0 \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \quad (11.2)$$

a tedy

$$An_1 n_2 = inv'' \Rightarrow A \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = inv' \Rightarrow A = \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} inv' \quad , \quad (11.3)$$

kde skalární součin označujeme jako  $p_1 \cdot p_2 = p_{1i} p_2^i$ . V klidové soustavě částice 2 je

$$A = v_{rel} \sigma \quad , \quad p_2^i = \left( \frac{\mathcal{E}_2}{c} = m_2 c, \vec{p}_2 = 0 \right) \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} \Rightarrow inv = v_{rel} \sigma c^2 \quad (11.4)$$

a dále

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} m_2 c \Rightarrow \frac{v_{rel}}{c} = \sqrt{1 - \left( \frac{m_1 m_2 c^2}{p_1 \cdot p_2} \right)^2} \quad . \quad (11.5)$$

Spojením vztahů (11.1), (11.3) a (11.4) dostáváme

$$d w = \frac{dV}{dt} = c \sigma n_1 n_2 \frac{c^2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} dV \quad . \quad (11.6)$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$\sigma = \frac{d w}{J n_2 dV} \quad , \quad J = c^3 \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} n_1 \quad . \quad (11.7)$$

V těžišťové soustavě je  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$ , takže

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 = \left( \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} + \vec{p}^2 \right)^2 - \left( \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \left( \frac{\mathcal{E}_2^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) = \vec{p}^2 \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{c^2} \quad (11.8)$$

a tedy

$$J = c^2 |\vec{p}| \left( \frac{1}{\mathcal{E}_1} + \frac{1}{\mathcal{E}_2} \right) n_1 = (v_1 + v_2) n_1 \quad , \quad (11.9)$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku. V laboratorní soustavě pak

$$J = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \vec{v}_1 \times \vec{v}_2} n_1 \quad . \quad (11.10)$$

## 12 Spinová matice hustoty

Shrneme nejprve vyjádření  $\gamma$  matic a  $\Sigma$  matice ve spinorové a standardní reprezentaci.

Matice  $\gamma^5$  a  $\bar{\Sigma}$  jsou definovány jako

$$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad , \quad \bar{\Sigma} = \gamma^0 \bar{\gamma} \gamma^5 \quad . \quad (12.1)$$

Ve spinorové reprezentaci je

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

a ve standardní reprezentaci

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ -\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad . \quad (12.3)$$

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\begin{aligned} (\underline{p} - m)u(p) = 0 \quad , \quad (\underline{p} + m)u(-p) = 0 \quad , \\ \bar{u}(p)(\underline{p} - m) = 0 \quad , \quad \bar{u}(-p)(\underline{p} + m) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (12.4)$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2m \quad . \quad (12.5)$$

Ve standardní reprezentaci máme

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} + m} w(p) \\ \sqrt{\mathcal{E} - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(p) \end{pmatrix} \quad , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(-p) \\ \sqrt{\mathcal{E} + m} w(-p) \end{pmatrix} \quad , \quad (12.6)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad , \quad w^+(p)w(p) = w^+(-p)w(-p) = 1 \quad .$$

Pro relativisticky sdružené výrazy pak

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \left( \sqrt{\mathcal{E} + m} w^+(p) \quad - \sqrt{\mathcal{E} - m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) \right) \quad , \\ \bar{u}(-p) &= \left( \sqrt{\mathcal{E} - m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) \quad - \sqrt{\mathcal{E} + m} w^+(p) \right) \quad . \end{aligned} \quad (12.7)$$

V těchto výrazech jsou  $w(p)$  a  $w(-p)$  libovolné normované dvoukomponentové veličiny.

Uvedené volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je například

$$\begin{aligned}
w(p)^{(\sigma=1/2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & w(-p)^{(\sigma=1/2)} &= -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w(p)^{(\sigma=-1/2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & w(-p)^{(\sigma=-1/2)} &= -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{12.8}$$

Platí

$$\sum_{\sigma} w(p)^{(\sigma)} w^+(p)^{(\sigma)} = \sum_{\sigma} w(-p)^{(\sigma)} w^+(-p)^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.9}$$

Pro bispinory pak máme

$$\sum_{\sigma} u(p)^{(\sigma)} u^+(p)^{(\sigma)} = \underline{p} + m, \quad \sum_{\sigma} u(-p)^{(\sigma)} u^+(-p)^{(\sigma)} = \underline{p} - m. \tag{12.10}$$

Prvky spinové matice hustoty jsou v čistém stavu triviální výrazy

$$\rho_{AB}(p) = u_A(p) \bar{u}_B(p). \tag{12.11}$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1

$$\text{Tr}\{\rho(p)\} = \sum_A u_A(p) \bar{u}_A(p) = \bar{u}(p) u(p) = 2m. \tag{12.12}$$

Ze (12.11) je zřejmé, že matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude splňovat Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - m)\rho(p) = 0, \quad \rho(p)(\underline{p} - m) = 0. \tag{12.13}$$

V čistém stavu spočteme střední hodnotu spinu podle vztahu

$$\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2} \int \psi^* \bar{\Sigma} \psi d^3 \vec{r} = \frac{1}{4\varepsilon} u^*(p) \bar{\Sigma} u(p) = \frac{1}{4\varepsilon} \bar{u}(p) \gamma^0 \bar{\Sigma} u(p) \tag{12.14}$$

a odpovídající výraz pro stav částečné polarizace je pak

$$\begin{aligned}
\langle \hat{s} \rangle &= \frac{1}{4\varepsilon} \sum_A \sum_B \bar{u}_A(p) (\gamma^0 \bar{\Sigma})_{AB} u_B(p) = \\
&= \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr}\{\rho(p) \gamma^0 \bar{\Sigma}\} = \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr}\{\rho(p) \gamma^5 \vec{\gamma}\}.
\end{aligned} \tag{12.15}$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme  $\vec{\zeta} = 2\langle \hat{s} \rangle$ , platí tedy pro čistý stav  $|\vec{\zeta}| = 1$ , pro smíšený stav  $|\vec{\zeta}| < 1$ . Čtyřvektory impulsu a spinu v klidové soustavě jsou  $p^i = (m, \vec{0})$  a  $a^i = (0, \vec{\zeta})$  a v libovolné inerciální souřadné soustavě tedy musí platit

$$p \cdot p = m^2, \quad a \cdot a = -\zeta^2, \quad p \cdot a = 0. \tag{12.16}$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^0 = \frac{\bar{\zeta} \bar{p}}{m} \quad , \quad \bar{a} = \bar{\zeta} + \frac{(\bar{\zeta} \bar{p}) \bar{p}}{m(\varepsilon + m)} \quad . \quad (12.17)$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impuls jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_n(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m) \quad . \quad (12.18)$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{4m}(\underline{p} + m) \tilde{\rho}(\underline{a})(\underline{p} + m) \quad , \quad \tilde{\rho}(\underline{a}=0) = 1 \quad . \quad (12.19)$$

Připomeňme si, že platí  $(\underline{p} + m)^2 = 2m(\underline{p} + m)$ . Matice  $\tilde{\rho}(\underline{a})$  má na čtyřvektoru  $\underline{a}$  záviset lineárně. Napišme tedy  $\tilde{\rho}(\underline{a}) = 1 - A\gamma^5 \underline{a}$ . Konstantní matici  $A$  určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5(\bar{\gamma}\bar{\zeta}))(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5(\bar{\gamma}\bar{\zeta})) \quad , \\ \bar{\zeta} &= 2\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2m} \text{Tr}\{\rho(p)\gamma^5 \bar{\gamma}\} = -\frac{1}{4} A \text{Tr}\{(\bar{\gamma}\bar{\zeta})\bar{\gamma}\} = A\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (12.20)$$

a musí být tedy  $A=1$ . Protože je  $\underline{a} \cdot \underline{p} = 0$ ,  $\underline{p}$  antikomutuje s  $\underline{a}$  a komutuje s  $\gamma^5 \underline{a}$ . Výraz pro spinovou matici hustoty lze přepsat do konečného tvaru

$$\rho(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (12.21)$$

Vektor spinové polarizace lze naopak z matice hustoty spočítat pomocí vztahu

$$a^i = \frac{1}{2m} \text{Tr}\{\rho(p)\gamma^5 \gamma^i\} \quad . \quad (12.22)$$

Obdobně by bylo možné odvodit obecný vztah pro spinovou matici hustoty positronů

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}(\underline{p} - m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (12.23)$$

### 13 Spinové středování

Máme-li ve Feynmanově diagramu jen jednu fermionovou čáru (rozptyl na vnějším poli, Comptonův rozptyl, anihilace nebo kreace páru), můžeme použít následujícího způsobu spinového středování (středování přes počáteční spinové stavy a součtu přes koncové spinové

stavy pro rozptyl, středování přes spinové stavy elektronu a pozitronu při anihilaci nebo kreaci). Maticový element  $M_{fi}$  je ve zmíněných případech možno zapsat jako

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} = \bar{u}_f Q u_i \quad . \quad (13.1)$$

Potom máme

$$M_{fi}^* = \left( \sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} \right)^* = \sum_{A,B,C} u_{fC} \gamma_{CA}^{0*} Q_{AB}^* u_{iB}^* = \sum_{A,B,C,D,E} u_{iB}^* \gamma_{BD}^0 \gamma_{DE}^0 Q_{BA}^+ \gamma_{AC}^0 u_{fC} = \bar{u}_i \bar{Q} u_f \quad , \quad (13.2)$$

kde jsme využili vlastností  $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ ,  $\gamma^{0+} = \gamma^0$  a označili  $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$ . Můžeme teď psát

$$|M_{fi}|^2 = \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} u_f = \text{Tr} \{ u_f \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} \} \quad . \quad (13.3)$$

Takže máme

$$\begin{aligned} 2 \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{ rozptyl elektronů na vnějším potenciále} \\ 2 \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{ Comptonův rozptyl} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(-p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{ anihilace páru} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(-p) \bar{Q} \} & \text{ kreace páru} \end{aligned} \quad (13.4)$$