Základy analytické geometrie v rovině a v prostoru

Základní poznatky

- Parametrické rovnice přímky p v rovině, kdy přímka je určena bodem $A = [a_1, a_2]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$, jsou:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t \\ y &= a_2 + u_2 t, \qquad t \in \Re. \end{aligned}$$

- Parametrické rovnice přímky p v prostoru, je-li přímka určena bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, jsou:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t \\ y &= a_2 + u_2 t, \qquad t \in \Re \\ z &= a_3 + u_3 t. \end{aligned}$$

- Parametrické rovnice úsečky AB, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$ jsou:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y &= a_2 + (b_2 - a_2)t, \qquad t \in [0, 1] \\ z &= a_3 + (b_3 - a_3)t. \end{aligned}$$

- Obecná rovnice přímky p určené bodem $A = [a_1, a_2]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (a, b)$ má tvar

$$ax + by + c = 0.$$

  Hodnotu konstanty c získáme tak, že do rovnice za proměnné x a y dosadíme souřadnice bodu A.

- Kruh se středem $O = [0, 0]$ a poloměrem r je popsán nerovnicí

$$x^2 + y^2 \le r^2.$$

  V polárních souřadnicích je tento kruh popsán nerovnicemi

$$0 \le \varrho \le r, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

- Kruh se středem $S = [s_1, s_2]$ a poloměrem r je popsán nerovnicí

$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 \le r^2.$$

- Rovnice roviny určené bodem A a normálovým vektorem $\vec{n} = (a, b, c)$ má tvar

$$ax + by + cz + d = 0.$$

  Hodnotu konstanty d získáme tak, že do rovnice za proměnné x, y a z dosadíme souřadnice bodu A.

- Rotační válec, který má poloměr podstavy r, výšku v, střed dolní podstavy v počátku souřadnic a osu ležící na souřadnicové ose z, je popsán nerovnicemi

$$x^2 + y^2 \le r^2, \qquad 0 \le z \le v.$$

  Ve válcových souřadnicích je tento válec popsán nerovnicemi

$$0 \le \varrho \le r, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le z \le v.$$

- Koule se středem $O = [0, 0, 0]$ a poloměrem r je popsána nerovnicí
$$x^2 + y^2 + z^2 \le r^2.$$
Ve sférických souřadnicích je tato koule popsána nerovnicemi
$$0 \le \varrho \le r, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$
Ve válcových souřadnicích je tato koule popsána nerovnicemi
$$0 \le \varrho \le r, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\sqrt{r^2 - \varrho^2} \le z \le \sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$
- Koule se středem $S = [s_1, s_2, s_3]$ a poloměrem r je popsána nerovnicí
$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 + (z - s_3)^2 \le r^2.$$
- Rotační kužel s vrcholem v počátku, jehož podstavou je kruh $x^2 + y^2 \le r^2$ v rovině $z = v$ je popsán nerovnicemi
$$\frac{v}{r}\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le v.$$

Příklady k procvičení

1. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici úsečky AB, kde $A = [1, 2]$, $B = [-1, 3]$.

   Směrový vektor úsečky $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1)$. Parametrické rovnice úsečky AB pak jsou
$$x = 1 - 2t, \qquad y = 2 + t, \qquad t \in [0, 1].$$
   Normálovým vektorem přímky AB je např. vektor $\vec{n} = (1, 2)$. Obecná rovnice má tvar $x+2y+c = 0$, kde konstantu c získáme, když do této rovnice dosadíme např. souřadnice bodu A. Dostáváme $1.1 + 2.2 + c = 0$. Rovnice přímky určené body A, B je tedy $x + 2y - 5 = 0$.

   Úsečku AB popíšeme rovnicí
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \qquad x \in [-1, 1].$$
2. Napište rovnici úsečky AB, kde $A = [2, 0, -1]$, $B = [-1, 1, 2]$.

   V prostoru můžeme určit jen parametrické rovnice úsečky AB. Směrový vektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 1, 3)$. Rovnice úsečky jsou tedy
$$x = 2 - 3t, \qquad y = t, \qquad z = -1 + 3t, \qquad t \in [0, 1].$$
3. Pomocí nerovnic popište obdélník $ABCD$, kde $A = [-1, -1]$, $B = [2, -1]$, $C = [2, 3]$ a $D = [-1, 3]$.

   Platí
$$-1 \le x \le 2, \qquad -1 \le y \le 3.$$
4. Oběma způsoby popište oblast, která je ohraničená křivkami $y = x$, $y = x^2$.

   Platí
$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le x.$$
   Druhý způsob popisují nerovnice
$$0 \le y \le 1, \qquad y \le x \le \sqrt{y}.$$

5. Oběma způsoby popište oblast, kterou je trojúhelník ABC, kde $A = [0,0]$, $B = [2,1]$, $C = [-2,1]$.
   Trojúhelník je ohraničen přímkami $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 1$.
   První vyjádření:
   $$0 \le y \le 1, \qquad -2y \le x \le 2y.$$
   Ve druhém případě musíme oblast rozdělit na dvě části:
   $$-2 \le x \le 0, \qquad -\frac{1}{2}x \le y \le 1$$
   a
   $$0 \le x \le 2, \qquad \frac{1}{2}x \le y \le 1.$$

6. Oběma způsoby popište oblast, kterou je lichoběžník $O = [0,0]$, $A = [1,0]$, $B = [1,2]$, $C = [0,1]$.
   První vyjádření:
   $$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le x + 1.$$
   Při druhém vyjádření musíme oblast rozdělit na dvě části:
   $$0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x \le 1$$
   a
   $$1 \le y \le 2, \qquad y - 1 \le x \le 1.$$

7. Znázorněte a vhodně popište oblasti, které jsou ohraničené křivkami:
   a) $y = x - 4$ a $y^2 = 2x$;
   b) $x = 0$, $y = \frac{3}{2}x\,(x \ge 0)$, $y = 4 - (x-1)^2$;
   c) $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $xy = 2\,(x \ge 0)$.

8. V kartézských a polárních souřadnicích popište kruh se středem $S = [0,0]$ a poloměrem $r = 2$.
   V kartézských souřadnicích je kruh popsán nerovnicí $x^2 + y^2 \le 4$. Máme tedy
   $$-2 \le x \le 2, \qquad -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}.$$
   V polárních souřadnicích pak nerovnicemi
   $$0 \le \varrho \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

9. V polárních souřadnicích popište část mezikruží, která je popsána nerovnicemi $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge |x|$.
   V polárních souřadnicích je oblast popsána nerovnicemi
   $$1 \le \varrho \le 2, \qquad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}.$$

10. V kartézských a polárních souřadnicích popište kruh se středem $S = [1,0]$ a poloměrem $r = 1$.
    V kartézských souřadnicích je kruh popsán nerovnicí $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. Máme tedy
    $$0 \le x \le 2, \qquad -\sqrt{1 - (x-1)^2} \le y \le \sqrt{1 - (x-1)^2}.$$
    Nerovnici můžeme přepsat do tvaru $x^2 + y^2 \le 2x$. Použijeme-li v ní polární souřadnice dostáváme
    $$\varrho \le 2\cos\varphi \qquad \text{pro} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

11. V kartézských a polárních souřadnicích popište kruh se středem $S = [0, 2]$ a poloměrem $r = 2$.

V kartézských souřadnicích je kruh popsán nerovnicí $x^2 + (y-2)^2 \le 4$. Máme tedy

$$-2 \le x \le 2, \qquad 2 - \sqrt{4 - x^2} \le y \le 2 + \sqrt{4 - x^2}.$$

Nerovnici můžeme přepsat do tvaru $x^2 + y^2 \le 4y$. Použijeme-li v ní polární souřadnice dostáváme

$$\varrho \le 4 \sin\varphi \qquad \text{pro} \qquad 0 \le \varphi \le \pi.$$

12. V kartézských souřadnicích popište kvádr $ABCDA'B'C'D'$, kde $A = [1, 0, -1]$, $B = [2, 0, -1]$, $C = [2, 2, -1]$, $A' = [1, 0, 3]$.

Kvádr je popsán nerovnicemi

$$1 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 2, \qquad -1 \le z \le 3.$$

13. Popište oblast, která je v prvním oktantu ohraničena plochami

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Z první nerovnice dostáváme $x^2 + y^2 \le z^2$ a dále $z \le 2$. Pak platí $x^2 + y^2 \le 4$, odkud vzhledem k $x \ge 0$, $y \ge 0$ dostaneme, že $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$.

Oblast je popsána nerovnicemi

$$0 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2.$$

14. Popište těleso, které je ohraničeno plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$ a $y = x^2$.

Těleso je ohraničené rotačními paraboloidy $z = x^2 + y^2$ a $z = 2x^2 + 2y^2$, rovinou $y = x$ a válcovou plochou $y = x^2$. Průmět tělesa do roviny xy je obrazec ohraničený parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = x$. Těleso popisují nerovnice

$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le x, \qquad x^2 + y^2 \le z \le 2x^2 + 2y^2.$$

15. Ve válcových souřadnicích popište kužel, jehož vrchol leží v počátku soustavy souřadnic a jehož osa leží v ose z. Nechť R je poloměr podstavy a h výška kužele.

Zobrazíme-li např. řez kužele rovinou xz, vidíme, že na základě podobnosti trojúhelníků platí $\frac{z}{h} = \frac{\varrho}{R}$, tedy $\varrho = \frac{R}{h} z$. Dostáváme

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \varrho \le \frac{R}{h} z, \qquad 0 \le z \le h.$$