Dvojný integrál

1. Vypočtěte $\iint_A x^2y\,dxdy$, kde množina A je obdélník s vrcholy $B=[0,1]$, $C=[2,1]$, $D=[2,2]$ a $E=[0,2]$.

   Vidíme, že platí $0\le x\le 2$ a $1\le y\le 2$. Dostáváme

$$\iint_A x^2y\,dxdy=\int_0^2 dx\int_1^2 x^2y\,dy=\int_0^2\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx=\int_0^2\left(2x^2-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_0^2\frac{3}{2}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{2}\right]_0^2=4.$$

   Mohli bychom ovšem řešit i takto

$$\iint_A x^2y\,dxdy=\int_1^2 dy\int_0^2 x^2y\,dx=\int_1^2\left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^2 dy=\int_1^2\frac{8}{3}y\,dy=\left[\frac{4}{3}y^2\right]_1^2=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}=4.$$

   Vzhledem k tomu, že integrační oblast je obdélník a integrovaná funkce je tvaru $f(x,y)=g(x)h(y)$, nejjednodušší způsob výpočtu je následující

$$\iint_A x^2y\,dxdy=\int_0^2 x^2\,dx\cdot\int_1^2 y\,dy=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2=\frac{8}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=4.$$

2. Vypočtěte $\iint_A(2x+y)\;dxdy$, kde množina A je lichoběžník určený přímkami $x=1$, $x=2$, $y=1$ a $y=4x$

   Vidíme, že platí $1\le x\le 2$ a $1\le y\le 4x$. Dostáváme

$$\iint_A(2x+y)\;dxdy=\int_1^2 dx\int_1^{4x}(2x+y)\;dy=\int_1^2\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^{4x}dx=\int_1^2\left(8x^2+8x^2-2x-\frac{1}{2}\right)dx=$$
$$=\left[\frac{16}{3}x^3-x^2-\frac{1}{2}x\right]_1^2=\frac{203}{6}.$$

3. Vypočtěte $\iint_A\left(x^2+y\right)\,dxdy$, kde množina A je uzavřená a ohraničená parabolou $y=x^2$ a přímkou $y=x$.

   Vidíme, že platí $0\le x\le 1$ a $x^2\le y\le x$. Dostáváme

$$\iint_A\left(x^2+y\right)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\left(x^2+y\right)\,dy=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=$$
$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{10}\right]_0^1=\frac{7}{60}.$$

4. Vypočtěte $\iint_A\frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, kde množina A je ohraničená křivkami $y=x$, $x=2$ a $xy=1$.

   Načrtneme-li si zadané křivky, vidíme, že platí $1\le x\le 2$ a $\frac{1}{x}\le y\le x$. Integrovaná funkce je na oblasti A spojitá. Dostáváme

$$\iint_A\frac{x^2}{y^2}\,dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2\left(-x+x^3\right)\,dx=$$
$$\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{9}{4}.$$

5. Vypočtěte $\iint_A y^2 \sin x \, dxdy$, kde množina A je uzavřená a ohraničená osou x a grafem funkce $y = 1 + \cos x$ pro $0 \le x \le \pi$.

$$\iint_A y^2 \sin x \, dxdy = \int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy = \int_0^\pi \left[\frac{y^3}{3} \sin x\right]_0^{1+\cos x} dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 + \cos x)^3 \sin x \, dx =$$
$$|1 + \cos x = t| = -\frac{1}{3} \int_2^0 t^3 \, dt = -\frac{1}{3} \left[\frac{t^4}{4}\right]_2^0 = \frac{4}{3}.$$

6. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného obloukem hyperboly $xy = 1$ a přímkou $2x + 2y = 5$.

   Nejprve určíme průsečíky přímky a hyperboly. Platí $y = \frac{1}{x}$, a tedy $2x + \frac{2}{x} = 5$. Řešíme kvadratickou rovnici $2x^2 - 5x + 2 = 0$, která má kořeny $x_1 = 2$ a $x_2 = \frac{1}{2}$. Křivky se tedy protnou v bodech $[2, \frac{1}{2}]$ a $[\frac{1}{2}, 2]$.

   Pro obsah obrazce pak dostáváme

$$S = \iint_A dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 [y]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right] dx =$$
$$= \left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{15}{8} - 2\ln 2.$$

Možné příklady do cvičení

1. Vypočtěte $\iint_A xy \, dxdy$, kde množina A je trojúhelník s vrcholy $A = [-2, 0]$, $B = [2, 0]$ a $C = [0, 2]$. Výsledek 0 (dá se odvodit úvahou).
2. Vypočtěte $\iint_A \left(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4\right) dxdy$, kde množina A je čverec s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [2, 2]$ a $D = [0, 2]$. Výsledek $10\frac{2}{3}$.
3. Vypočtěte $\iint_A x \sin y \, dxdy$, kde množina A je ohraničena přímkami $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ a $x = 1$. Výsledek $\frac{1}{2}$.
4. Vypočtěte $\iint_A xy^2 \, dxdy$, kde množina A je lichoběžník ohraničený přímkami $y = -1$, $y = x$, $x = 0$ a $x = 2$. Výsledek $2\frac{4}{5}$.

Transformace dvojných integrálů

1. Vypočtěte $\iint_A x^3 y^2 \, dxdy$, kde A je kruh $x^2 + y^2 \le a^2$.

   Zavedením polárních souřadnic dostaneme pro množinu $A : 0 \le \varrho \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

   Odtud máme

$$\iint_A x^3 y^2 \, dxdy = \int_0^a d\varrho \int_0^{2\pi} \varrho^3 \cos^3 \varphi \, \varrho^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^a \varrho^5 \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi =$$
$$= \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^a \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \left(\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi\right) d\varphi = |\sin \varphi = t| = \frac{a^6}{6} \cdot \int_0^0 \left(t^2 - t^4\right) dt = 0.$$

   Výsledek bylo možno odhadnout, uvědomíme-li si geometrický význam počítaného integrálu.

2. Vypočtěte $\iint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, kde pro oblast A platí $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge |x|$.

   Zavedením polárních souřadnic dostaneme pro množinu $A : 1 \le \varrho \le 2$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$.

   Odtud máme

$$\iint_A \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_1^2 \varrho^3 \, d\varrho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) d\varphi = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 \cdot [\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{15}{8}\pi.$$

3. Vypočtěte $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, kde oblast A je čtvrtinou kruhu $x^2+y^2 \leq 1$ ležící v prvním kvadrantu.

   Zavedením polárních souřadnic dostaneme pro množinu $A: 0 \leq \varrho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

   Odtud máme

$$\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,d\varrho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = |1-\varrho^2 = t| = \frac{\pi}{2}\int_1^0 \frac{-1}{2}\sqrt{t}\,dt =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$

4. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného kružnicemi $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ a přímkami $y=x$ a $y=0$.

   Křivky určující obrazec mají v polárních souřadnicích rovnice $\varrho^2 = 2\varrho\cos\varphi$, $\varrho^2 = 4\varrho\cos\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $\varphi = 0$. Obrazec popisují nerovnosti $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $2\cos\varphi \leq \varrho \leq 4\cos\varphi$.

   Pro obsah obrazce tedy platí

$$S = \iint_A dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \varrho\,d\varrho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi\right)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\cos^2\varphi\,d\varphi =$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = 3\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}.$$

Příklady pro procvičení

1. Vypočtěte $\iint_A \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, kde pro oblast A platí $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $y \leq x$. Výsledek $\frac{15}{16}\pi$.
2. Vypočtěte $\iint_A y\,dxdy$ a $\iint_A x\,dxdy$, kde pro oblast A platí $x^2+y^2 \leq 4$, $y \leq x$, $y \geq -x$. Výsledky 0, resp. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Trojný integrál

1. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V (x+y)\,dxdydz$, kde množina V je krychle, pro kterou platí $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$ a $0 \leq z \leq 1$.

$$\iiint_V (x+y)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^1 (x+y)\,dz = \int_0^1 dx \int_1^2 [xz+yz]_0^1\,dy =$$
$$= \int_0^1 dx \int_1^2 (x+y)\,dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x+\frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]_0^1 = 2.$$

2. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V \frac{x}{y^2}\,dxdydz$, kde množina V je kvádr, pro který platí $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ a $1 \leq z \leq 3$.

$$\iiint_V \frac{x}{y^2}\,dxdydz = \int_0^2 dx \int_1^2 dy \int_1^3 \frac{x}{y^2}\,dz = \int_0^2 dx \int_1^2 \left[\frac{xz}{y^2}\right]_1^3 dy =$$
$$= \int_0^2 dx \int_1^2 \left(\frac{3x}{y^2} - \frac{x}{y^2}\right) dy = \int_0^2 dx \int_1^2 \frac{2x}{y^2}\,dy = \int_0^2 \left[\frac{2x}{y}\right]_1^2 dx = \int_0^2 (-x+2x)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+x^2\right]_0^2 = 2.$$

   Protože oblast V je kvádr a integrovaná funkce je tvaru $f(x,y,z) = g_1(x)g_2(y)g_3(z)$, můžeme trojný integrál vyjádřit jako součin tří integrálů

$$\iiint_V \frac{x}{y^2}\,dxdydz = \int_0^2 x\,dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy \cdot \int_1^3 dz = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 \cdot [z]_1^3 =$$
$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}+1\right) \cdot (3-1) = 2.$$

3. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V xz\,dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$ a $0 \le z \le \sqrt{x+y}$.

$$\iiint_V xz\,dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x+y}} xz\,dz = \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^x \left[xz^2\right]_0^{\sqrt{x+y}} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^x \left(x^2+xy\right)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[x^2y + x\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^3+\frac{x^3}{2}\right)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 3.$$

4. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V z\,dxdydz$, kde množina V je ohraničena rovinami $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$ a $x=0$.

   Vidíme že platí $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ a $0 \le z \le 1-x-y$. Dostáváme

$$\iiint_V z\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy =$$
$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \left[(1-x-y)^3\right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = -\frac{1}{24}\left[(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

5. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V (y+2z)\,dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2x$ a $-y \le z \le x$.

$$\iiint_V (y+2z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_{-y}^x (y+2z)\,dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} \left[yz+z^2\right]_{-y}^x dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} \left(yx+x^2+y^2-y^2\right)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} \left(yx+x^2\right)\,dy =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}x + x^2y\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 \left(2x^3+2x^3\right)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1.$$

6. Vypočtěte objem tělesa M, pro které platí $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ a $0 \le z \le x^2+y^2$.

$$V = \iiint_M dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(x^2+y^2\right)\,dy = \int_0^1 \left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx =$$
$$= \int_0^1 \left(2x^2+\frac{8}{3}\right)\,dx = \left[2\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}x\right]_0^1 = \frac{10}{3}.$$

Trojný integrál — příklady k procvičení

1. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V (7x+2z)\,dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$ a $0 \le z \le xy$. Výsledek $\frac{59}{270}$.
2. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V xy^2z\,dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ a $0 \le z \le 1$. Výsledek $\frac{1}{12}$.
3. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V xy^2z\,dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ a $0 \le z \le xy$. Výsledek $\frac{1}{90}$.

Transformace trojných integrálů

1. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V \left(x^2+y^2\right)\, dxdydz$, kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \le 2z$ a $z \le 2$.

   Množina V představuje část rotačního paraboloidu $x^2+y^2 \le 2z$, který je shora seříznut rovinou $z=2$, která je rovnoběžná s rovinou O_{xy}. Integrál transformujeme do válcových souřadnic. Pro množinu V v těchto souřadnicích platí $\frac{\varrho^2}{2} \le z \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Dostáváme

$$\iiint_V \left(x^2+y^2\right)\, dxdydz = \int_0^2 \varrho^3\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 dz = [\varphi]_0^{2\pi} \int_0^2 [z]_{\frac{\varrho^2}{2}}^2\, \varrho^3\, d\varrho = 2\pi \int_0^2 \varrho^3 \left(2-\frac{\varrho^2}{2}\right) d\varrho =$$
$$= 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{2}-\frac{\varrho^6}{12}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

2. Vypočtěte trojný integrál $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, kde pro množinu V platí $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$ a $0 \le z \le 3$.

   Z nerovnice $y \le \sqrt{2x-x^2}$ dostáváme po umocnění $x^2+y^2-2x \le 0$, a tedy $(x-1)^2+y^2 \le 1$. Vidíme, že integrační oblast je část válce $(x-1)^2+y^2 \le 1$ ohraničeného rovinami $z=0$, $z=3$ a $y=0$. Použijeme tedy válcové souřadnice, pro které dostáváme $0 \le \varrho \le 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le z \le 3$.

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \iiint_V \varrho^2 z\, d\varrho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^2\, d\varrho \int_0^3 z\, dz = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^2\, d\varrho =$$
$$= \frac{9}{2}\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\varrho^3\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = 12\frac{2}{3} = 8.$$

   Zde jsme použili integraci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\left(1-\sin^2 x\right) dx = |\sin x = t| = \int_0^1 \left(1-t^2\right) dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. Vypočtěte objem tělesa, které je ohraničeno plochami $x^2+y^2+z^2=r^2$ a $x^2+y^2=a^2$, kde $a<r$.

   Naše těleso vznikne průnikem válce a koule. K řešení použijeme válcové souřadnice, ve kterých má válcová plocha rovnici $\varrho = a$ a kulová plocha rovnici $\varrho^2+z^2=r^2$. Pro objem tělesa dostáváme

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V \varrho\, d\varrho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \varrho\, d\varrho \int_{-\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{\sqrt{r^2-\varrho^2}} dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \varrho\, d\varrho \int_0^{\sqrt{r^2-\varrho^2}} dz =$$
$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a \varrho\sqrt{r^2-\varrho^2}\, d\varrho = 2\,[\varphi]_0^{2\pi} \cdot \int_0^a \varrho\sqrt{r^2-\varrho^2}\, d\varrho = |r^2-\varrho^2=t| = -2\pi\int_{r^2}^{r^2-\varrho^2} \sqrt{t}\, dt =$$
$$= -\frac{4}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_{r^2}^{r^2-\varrho^2} = \frac{4}{3}\pi\left(r^2-\sqrt{(r^2-a^2)^3}\right).$$