Křivkové integrály v rovině

- Parametrické rovnice křivky budeme uvažovat ve tvaru
$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta].$$
- Orientovat uzavřený interval $[\alpha, \beta]$ znamená uspořádat jej podle velikosti jeho čísel nebo naopak.
- Buď $x = \varphi(t)$, y=$\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ křivka. Nechť interval $[\alpha, \beta]$ je uspořádán podle velikosti svých čísel. Přeneseme-li tuto orientaci na křivku, říkáme, že *křivka je orientována souhlasně s daným parametrickým vyjádřením*. Přeneseme-li na křivku opačné orientování intervalu $[\alpha, \beta]$, říkáme, že *křivka je orientována nesouhlasně s daným parametrickým vyjádřením.*
- Křivkový integrál 1. druhu
$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$
- Křivkový integrál 2. druhu
$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy,$$
kde
$$\int_C P(x, y)\, dx = \pm \int_\alpha^\beta P\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \varphi'(t)\, dt,$$
$$\int_C Q(x, y)\, dy = \pm \int_\alpha^\beta Q\left[\varphi(t), \psi(t)\right] \psi'(t)\, dt.$$
Přitom znaménko + použijeme, je-li orientace křivky C souhlasná s daným parametrickým vyjádřením, znaménko $-$ v případě opačném.
- Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě.

  Buďte $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P_y(x, y)$, $Q_x(x, y)$ funkce spojité na oblasti G. Jestliže platí $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ pro každý bod $[x, y] \in G$, pak existuje funkce $F(x, y)$ (tzv. kmenová) definovaná na oblasti G taková, že výraz $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ je jejím totálním diferenciálem v každém bodě $[x, y] \in G$. Potom $\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě a platí
$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = F(B) - F(A),$$
kde A je počáteční a B koncový bod křivky C

Křivkový integrál v rovině

1. Vypočtěte $\int_C (x+y)\ ds$, kde C je úsečka $x+y-1=0$, kde $x \in [0,1]$.

   Křivku C parametrizujeme:

$$C : x = t, \qquad y = -t+1, \qquad t \in [0,1].$$

   Platí:

$$dx = dt, \qquad dy = -dt, \qquad ds = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\, dt = \sqrt{2}\, dt.$$

   Máme tedy:

$$\int_C (x+y)\ ds = \int_0^1 [t + (-t+1)]\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1\ dt = \sqrt{2}.$$

2. Vypočtěte $\int_C (x+y)\ ds$, kde C je tvořena hranami trojúhelníka s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[1,0]$ a $C=[0,1]$.

   Křivku C parametrizujeme:

$$AB : x = t, \qquad y = 0, \qquad t \in [0,1],$$
$$BC : x = 1-t, \qquad y = t, \qquad t \in [0,1],$$
$$CA : x = 0, \qquad y = 1-t, \qquad t \in [0,1].$$

   Máme tedy:

$$\int_C (x+y)\ ds = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 \sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (1-t)\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \sqrt{2}\,[t]_0^1 + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \sqrt{2}.$$

3. Vypočtěte $\int_C (x-2y+1)\ ds$, kde C je úsečka AB, kde $A=[4,0], B=[1,1]$.

   Úsečka AB má směrový vektor například $\vec{u} = (-3,1)$, pak její parametrické rovnice jsou

$$C : x = 4-3t, \qquad y = t, \qquad t \in [0,1].$$

   Platí:

$$dx = -3dt, \qquad dy = dt, \qquad ds = \sqrt{(-3)^2 + 1^2}\, dt = \sqrt{10}\, dt.$$

   Máme tedy:

$$\int_C (x-2y+1)\ ds = \int_0^1 (4-3t-2t+1)\sqrt{10}\, dt = \sqrt{10}\int_0^1 (-5t+5)\ dt = \sqrt{10}\left[5t - \frac{5}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{5}{2}\sqrt{10}.$$

4. Vypočtěte $\int_C (4x+3y-3)\ ds$, kde C je kružnice $x^2+y^2=9$.

   Parametrické rovnice kružnice jsou

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

   Platí:

$$dx = -3\sin t\, dt, \qquad dy = 3\cos t\, dt, \qquad ds = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt = 3\, dt$$

   Máme tedy:

$$\int_C (4x+3y-3)\ ds = \int_0^1 3\,(12\cos t + 9\sin t - 3)\ dt = 3\,[12\sin t - 9\cos t - 3t]_0^{2\pi} = -18\pi.$$

5. Vypočtěte $\int_C (x+y)\ dx - (x-y)\ dy$, kde C je kružnice $x^2+y^2=4$.
Parametrické rovnice kružnice jsou

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Máme tedy:

$$\int_C (x+y)\ dx - (x-y)\ dy = \int_0^{2\pi} 2(\cos t + \sin t)(-2\sin t)\ dt - \int_0^{2\pi} 2(\cos t - \sin t)(2\cos t)\ dt =$$
$$= -4\int_0^{2\pi} dt = -8\pi.$$

6. Vypočtěte práci silového pole $\vec{a} = y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}$ při přemisťování hmotného bodu po horní části elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ od bodu $A = [3,0]$ do bodu $B = [-3,0]$.
Parametrické rovnice části elipsy jsou

$$x = 3\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad t \in [0, \pi].$$

Práce silového pole $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ po křivce C je dána křivkovým integrálem 2. druhu

$$W = \int_C a_x\, dx + a_y\, dy.$$

Máme tedy:

$$W = \int_C y\, dx - x\, dy = \int_0^{\pi} 2\sin t\,(-3\sin t)\ dt - \int_0^{\pi} 3\cos t\,(2\cos t)\ dt = \int_0^{\pi} \left[-6\sin^2 t - 6\cos^2 t\right]\ dt =$$
$$= -6\int_0^{\pi} dt = -6\pi.$$

Záporná hodnota práce signalizuje, že částice se pohybuje proti působení silového pole.

Křivkový integrál — příklady k procvičení

1. Vypočtěte $\int_C x^2\, ds$, kde C je “horní” půlkružnice $x^2+y^2=a^2$ pro $y \geq 0$. Výsledek $\frac{a^3}{2}\pi$.
2. Vypočtěte $\int_C \frac{ds}{x-y}$, kde C je úsečka AB, kde $A=[0,-2]$ a $B=[4,0]$. Výsledek $\sqrt{5}\ln 2$.
3. Vypočtěte $\int_C xy\, ds$, kde C je čtvrtina kružnice $x^2+y^2=4$ v 1. kvadrantu. Výsledek 4.
4. Vypočtěte $\int_C y^2\, dx + x^2\, dy$ z bodu $O=[0,0]$ do bodu $B=[1,1]$ po následujících křivkách: a) úsečka OB; b) část paraboly $y=x^2$; c) část paraboly $x=y^2$; d) lomená čára OAB, kde $A=[1,0]$.
Výsledky: a) $\frac{2}{3}$;, b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{7}{10}$; d) 1.
5. Vypočtěte $\int_C (2x-y)\ dx + x\, dy$ z bodu $O=[0,0]$ do bodu $A=[2,1]$ po následujících křivkách: a) úsečka OA; b) část paraboly $x^2-4y=0$.
Výsledky: a) 4;, b) $\frac{14}{3}$.
6. Vypočtěte $\int_C (x+y)\ dx - x\, dy$, kde C je křivka $|x|+|y|=1$ orientovaná kladně. Výsledek -4.

Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

1. Vypočtěte $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy$ z bodu $A = [1,1]$ do bodu $B = [2,4]$ po následujících křivkách: a) úsečka AB; b) část paraboly $y = x^2$; c) lomená čára ACB, kde $C = [2,1]$.

   Funkce $P(x,y) = 2xy$ a $Q(x,y) = x^2$ i jejich derivace $P_y(x,y) = 2x$ a $Q_x(x,y) = 2x$ jsou funkce spojité na $\Re^2$. Platí $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ pro všechny body $[x,y] \in \Re^2$. Hodnota integrálu tedy nezávisí na integrační cestě.

   Vypočtěme integrál např. po úsečce AB. Její parametrické rovnice jsou například $x = 1+t$, $y = 1+3t$, kde $t \in [0,1]$. Platí $dx = dt$ a $dy = 3dt$, tedy

$$\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 2\,(t+1)\,(3t+1)\;dt + \int_0^1 3\,(t+1)^2\;dt = \int_0^1 \left(9t^2+14t+5\right)\,dt =$$
$$= \left[3t^3+7t^2+5t\right]_0^1 = 15.$$

   Můžeme postupovat i tak, že hledáme kmenovou funkci $F(x,y)$, pro kterou je výraz $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ jejím totálním diferenciálem a tedy platí

$$F_x(x,y) = P(x,y) \qquad \text{a} \qquad F_y(x,y) = Q(x,y).$$

   Libovolnou z těchto rovnic integrujeme. Například integrací první rovnice podle x dostaneme

$$F(x,y) = \int 2xy\,dx = x^2y + \varphi(y).$$

   Parciální derivací této funkce podle proměnné y získáme funkci F_y, kterou ale známe

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2.$$

   Pak $\varphi'(y) = 0$ a tedy $\varphi(y) = C$. Pro kmenovou funkci dostáváme $F(x,y) = x^2y + C$. Platí

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = F(B) - F(A).$$

   Dostáváme

$$\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy = F(2,4) - F(1,1) = 16 - 1 = 15.$$

2. Vypočtěte $\int_C \left(3x^2y+1\right)\,dx + \left(x^3-1\right)\,dy$ z bodu $A = [0,0]$ do bodu $B = [2,2]$, když křivka C je úsečka AB.

   Funkce $P(x,y) = \left(3x^2y+1\right)$ a $Q(x,y) = \left(x^3-1\right)$ i jejich derivace $P_y(x,y) = 3x^2$ a $Q_x(x,y) = 3x^2$ jsou funkce spojité na $\Re^2$. Platí $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ pro všechny body $[x,y] \in \Re^2$. Hodnota integrálu tedy nezávisí na integrační cestě.

   Hledáme kmenovou funkci $F(x,y)$, pro kterou je výraz $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ jejím totálním diferenciálem a tedy platí

$$F_x(x,y) = P(x,y) \qquad \text{a} \qquad F_y(x,y) = Q(x,y).$$

   Libovolnou z těchto rovnic integrujeme. Například integrací první rovnice podle x dostaneme

$$F(x,y) = \int \left(3x^2y+1\right)\,dx = x^3y + x + \varphi(y).$$

   Parciální derivací této funkce podle proměnné y získáme funkci F_y, kterou ale známe

$$x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 1.$$

   Pak $\varphi'(y) = -1$ a tedy $\varphi(y) = -y + C$. Pro kmenovou funkci dostáváme $F(x,y) = x^3y + x - y + C$. Platí

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = F(B) - F(A).$$

   Dostáváme

$$\int_C \left(3x^2y+1\right)\,dx + \left(x^3-1\right)\,dy = F(2,2) - F(0,0) = 16 - 0 = 16.$$

3. Vypočtěte $\int_C 2xy\,dx + \left(x^2+1\right)\,dy$, kde C je křivka $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ orientovaná kladně.

   Funkce $P(x,y) = 2xy$ a $Q(x,y) = x^2+1$ i jejich derivace $P_y(x,y) = 2x$ a $Q_x(x,y) = 2x$ jsou funkce spojité na $\Re^2$. Platí $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ pro všechny body $[x,y] \in \Re^2$. Hodnota integrálu tedy nezávisí na integrační cestě, kterou je v tomto případě kružnice $x^2+y^2 = 1$. Počáteční bod $[1,0]$ splývá s koncovým bodem.

   Existuje kmenová funkce $F(x,y)$ a platí

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = F(B) - F(A).$$

   Protože počáteční a koncový bod křivky splývají, je hodnota integrálu rovna 0.

4. Vypočtěte $\int_C (x-y)\,dx + x\,dy$, kde C je kladně orientovaná křivka, kterou představuje obvod čtverce $ABCD$ s vrcholy $A = [2,2]$, $B = [-2,2]$, $C = [-2,-2]$ a $D = [2,-2]$.

   Funkce $P(x,y) = x-y$ a $Q(x,y) = x$ i jejich derivace $P_y(x,y) = -1$ a $Q_x(x,y) = 1$ jsou funkce spojité na $\Re^2$. Křivka C je uzavřená po částech hladká křivka v $\Re^2$. Jsou splněny podmínky Greenovy věty a platí tedy (M je množina bodů uvnitř a na křivce C)

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_M \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dxdy.$$

   V našem případě

$$\int_C (x-y)\,dx + x\,dy = \iint_M (1+1)\,dxdy = 2\int_{-2}^{2} dx \int_{-2}^{2} dy = 32.$$

   Při výpočtu jsme užili skutečnosti, že dvojný integrál vyjadřuje obsah čtverce $ABCD$.

5. Pomocí Greenovy věty vypočtěte $\int_C 2xy\,dx + \left(x^2+1\right)\,dy$, kde C je křivka $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ orientovaná kladně.

   Funkce $P(x,y) = 2xy$ a $Q(x,y) = x^2+1$ i jejich derivace $P_y(x,y) = 2x$ a $Q_x(x,y) = 2x$ jsou funkce spojité na $\Re^2$. Křivka C je uzavřená po částech hladká křivka v $\Re^2$. Jedná se o kružnici $x^2+y^2 = 1$. Jsou splněny podmínky Greenovy věty a platí tedy (M je množina bodů uvnitř a na křivce C)

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_M \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dxdy.$$

   V našem případě

$$\int_C 2xy\,dx + \left(x^2+1\right)\,dy = \iint_M (2x-2x)\,dxdy = 0.$$

6. Pomocí Greenovy věty vypočtěte $\int_C (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, kde C je kladně orientovaná křivka: a) $x^2+y^2 = x$; b) $x^2+y^2 = 1$. Výsledky $\frac{-\pi}{8}$, resp. 0.

Křivkový integrál v prostoru

1. Vypočtěte $\int_C (x+2y-z-1)\,ds$, kde C je úsečka AB, kde $A = [1,1,2], B = [2,1,0]$.

   Úsečka AB má směrový vektor například $\vec{u} = (1,0,-2)$, pak její parametrické rovnice jsou

$$C: x = 1+t, \qquad y = 1, \qquad z = 2-2t \qquad t \in [0,1].$$

   Platí:

$$dx = dt, \qquad dy = 0, \qquad dz = -2dt, \qquad ds = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}\,dt = \sqrt{5}\,dt.$$

   Máme tedy:

$$\int_C (x+2y-z-1)\,ds = \int_0^1 (1+t+2-2+2t-1)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\int_0^1 3t\,dt = \sqrt{5}\left[3\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

2. Vypočtěte $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, kde C je část šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$ pro $t \in [0, 2\pi]$.
Platí:

$$dx = -a\sin t\,dt, \qquad dy = a\cos t dt, \qquad dz = a\,dt, \qquad ds = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2}\,dt = \sqrt{2}a\,dt.$$

Máme tedy:

$$\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \frac{a^2t^2}{a^2}\,dt = \sqrt{2}a\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}a\frac{8\pi^3}{3}.$$

3. Vypočtěte práci silového pole $\vec{a} = x\vec{\imath} + 2\vec{k}$ při přemisťování hmotného bodu po průnikové křivce válce $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ a roviny $z = 2$ z bodu $A = [0, 3, 2]$ do bodu $B = [2, 0, 2]$.
Parametrické rovnice křivky jsou

$$x = 2\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad z = 2, \qquad t \in [\frac{\pi}{2}, 0].$$

Práce silového pole $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$ po křivce C je dána křivkovým integrálem 2. druhu

$$W = \int_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz.$$

Máme tedy:

$$W = \int_C x\,dx + 2\,dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\cos t\,(-2\sin t)\;dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 0.3\sin t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2.0\,dt = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2t\,dt = 2\,[\cos 2t]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 2.$$

Křivkový integrál v prostoru — příklady pro procvičení

1. Vypočtěte $\int_C (x + z)\;ds$, kde C je úsečka AB, kde $A = [1, 0, 1], B = [1, 1, 2]$. Výsledek $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Plošný integrál 1. druhu

1. Vypočtěte integrál $\int_S xyz\,dS$, kde S je část roviny $x+y+z = 1$ v 1. oktantu (tedy pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$).
Plochu S vyjádříme například takto: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $z = f(x, y) = 1 - x - y$. Platí

$$f_x(x, y) = -1, \qquad f_y(x, y) = -1, \qquad dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy.$$

Dostáváme

$$\int_S xyz\,dS = \sqrt{3}\iint_M xy\,(1 - x - y)\;dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy\,(1 - x - y)\;dy =$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{x}{6}\,(1-x)^3\;dx = ... = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

2. Vypočtěte integrál $\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde S je část plochy $z = xy$ vyťaté válcem $x^2 + y^2 = 1$.

Plochu S vyjádříme například takto: $z = f(x, y) = xy$ pro body oblasti M, kterou je kruh $x^2+y^2 = 1$. Platí

$$f_x(x, y) = y, \qquad f_y(x, y) = x, \qquad dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy.$$

Plošný integrál převedeme na dvojný integrál

$$\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_M \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy.$$

Dvojný integrál transformujeme do polárních souřadnic. Oblast M je popsána nerovnicemi $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\varphi$.

$$\iint_M \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\varrho^2}\varrho}{\varrho}\,d\varrho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\varrho\sqrt{1+\varrho^2} + \ln\varrho + \sqrt{1+\varrho^2}\right]_0^1 d\varphi =$$
$$= \pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Přitom integrál $\int \sqrt{1+\varrho^2}\,d\varrho$ řešíme metodou per partes, kde volíme $u = \sqrt{1+\varrho^2}$ a $v = 1$.

3. Vypočtěte integrál $\int_S x\,dS$, kde S je horní polovina kulové plochy $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

   Plochu S vyjádříme například takto: $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ pro body oblasti M, kterou je kruh $x^2+y^2 = 1$. Platí

   $$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

   Plošný integrál převedeme na dvojný integrál a využijeme polárních souřadnic $x = \varrho\cos\varphi$, $x = \varrho\sin\varphi$, kde $0 \le \varrho \le 1$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$. Platí

   $$\int_S x\,dS = \iint_M \varrho\cos\varphi\sqrt{\frac{1}{1-\varrho^2}}\,\varrho\,d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi.\int_0^1 \frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

   Tento integrál je roven nule, protože $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$.

4. Pomocí plošného integrálu 1. druhu vypočtěte povrch parabolické plochy $z = x^2+y^2$, kde $0 \le z \le 9$.

   Obsah plochy S je dán integrálem $\int_S dS$. Máme

   $$z = f(x,y) = x^2+y^2, \qquad f_x(x,y) = 2x, \qquad f_y(x,y) = 2y, \qquad dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

   Použijeme polárních souřadnic

   $$\int_S dS = \iint_M \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi.\int_0^3 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,d\varrho = |1+4\varrho^2 = t| = 2\pi\frac{1}{8}\int_1^{37}\sqrt{t}\,dt =$$
   $$= \frac{\pi}{4}\left[2\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{37^2}-1\right).$$

Plošný integrál — příklady k procvičení

1. Vypočtěte integrál $\int_S \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS$, kde S je část roviny $6x+4y+3z = 12$ v 1. oktantu. Výsledek $4\sqrt{61}$.
2. Vypočtěte integrál $\int_S y\,dS$, kde S je část roviny $3x+4y+3z = 12$ v 1. oktantu. Výsledek $2\sqrt{34}$.
3. Vypočtěte obsah části plochy $z = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2+y^2 = 1$ Výsledek $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$.

Plošný integrál 2. druhu

Vypočtěte $\iint_S x^2z\,dS$, kde S je část plochy $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2+y^2 = 1$. Plocha S je orientovaná tak, že normála míří vzhůru.

Parametrické rovnice plochy S jsou

$$x = u\cos v$$
$$y = u\sin v$$
$$z = \sqrt{1-u^2}, \qquad u \in [0,1], \qquad v \in [0,2\pi].$$