Plošný integrál

Několik pojmů

- Při našich úvahách budeme často využívat skalární součin dvou vektorů. Platí
$$\vec{F} \cdot \vec{n} = |\vec{F}||\vec{n}| \cos \alpha,$$
kde α je úhel, který svírají vektory $\vec{F}$ a $\vec{n}$. Vidíme, že pokud je tento úhel ostrý, pak je skalární součin kladný. Pokud je úhel dvou vektorů tupý, pak je skalární součin záporný.
Známe-li souřadnice vektorů $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ a $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, pak
$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3.$$
- V našich úvahách budeme vždy předpokládat, že plocha S je grafem funkce $z = f(x, y)$ na uzavřené oblasti D.
- Připomeňme, že tečná rovina k ploše S v bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$
Protože víme, že rovina $\varrho : ax + by + cz + d = 0$ má normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$, vidíme, že tečná rovina má normálový vektor $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$ nebo $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$. Pro velikost tohoto vektoru platí $|\vec{n}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$.
- V případě plošných integrálů 2. druhu budeme hovořit o orientaci plochy S. Ta je určena volbou směru vektoru normály $\vec{n}$. Jesliže vektor $\vec{n}$ svírá ostrý úhel s kladným směrem osy z (tedy s vektorem $(0, 0, 1)$, říkáme "míří vzhůru", pak $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$. Svírá-li $\vec{n}$ tupý úhel s kladným směrem osy z, tedy "míří dolů", pak $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$. Konečně pokud vektor $\vec{n}$ je kolmý na osu z, pak $\vec{n} = (f_x, f_y, 0)$.
- Velikost obsahu plochy S budeme značit $m(S)$ a vypočteme ji ze vztahu
$$m(S) = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy.$$
Příklad 1: Vypočtěte obsah plochy S, která je grafem funkce $z = xy$, pro $D : x^2 + y^2 \leq r^2$ (část hyperbolického paraboloidu ležícího uvnitř válcové plochy).
Platí
$$f_x = y, \qquad f_y = x, \qquad \text{pro} \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2.$$
Po zavedení polárních souřadnic dostáváme
$$m(S) = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sqrt{1 + \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = |1 + \varrho^2 = t| =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_1^{\sqrt{1+r^2}} t^2\, dt = 2\pi \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{1+r^2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{(1 + r^2)^3} - 1\right).$$

Plošný integrál 1. druhu

- Jedná se o integrál ze skalární funkce přes plochu S.
- Výpočet plošného integrálu 1. druhu převádíme na výpočet dvojného integrálu. Je-li plocha S grafem funkce $z = f(x, y)$ na uzavřené oblasti D, platí
$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \iint_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

- Příkladem aplikace je určení hmotnosti M plochy S, jestliže známe hustotu $\varrho(x,y,z)$ v libovolném bodě (x,y,z) plochy. Protože platí

$$\varrho = \frac{m}{m(S)} \qquad \text{tedy} \qquad m = \varrho\, m(S),$$

dostáváme

$$M = \iint_S \varrho(x,y,z)\, dS = \iint_D \varrho\left(x,y,f(x,y)\right)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy.$$

- **Příklad 2:** Vypočtěte hmotnost kuželové plochy $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$, je-li hustota plochy ϱ konstantní.

Platí

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

tedy

$$M = \iint_S \varrho(x,y,z)\, dS = \iint_D \varrho\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\, dxdy = \sqrt{2}\varrho \iint_D dxdy = 4\sqrt{2}\pi\varrho.$$

Při výpočtu jsme užili skutečnosti, že poslední integrál vyjadřuje obsah oblasti D, tedy kruhu o poloměru 2.

Plošný integrál 1. druhu — řešené příklady na procvičení

1. Vypočtěte integrál $\int_S xyz\, dS$, kde S je část roviny $x+y+z=1$ v 1. oktantu (tedy pro $x \ge 0$, $y \ge 0$ a $z \ge 0$).

Plochu S vyjádříme takto: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $z = f(x,y) = 1-x-y$. Platí

$$f_x(x,y) = -1, \qquad f_y(x,y) = -1, \qquad dS = \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\, dxdy = \sqrt{3}\, dxdy.$$

Dostáváme

$$\int_S xyz\, dS = \sqrt{3}\iint_D xy\,(1-x-y)\; dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\,(1-x-y)\; dy =$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}-\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{x}{6}\,(1-x)^3\; dx = \dots = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

2. Vypočtěte integrál $\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde S je část plochy $z=xy$ vyťaté válcem $x^2+y^2=1$.

Plochu S vyjádříme takto: $z=f(x,y)=xy$ pro body oblasti D, kterou je kruh $x^2+y^2=1$. Platí

$$f_x(x,y) = y, \qquad f_y(x,y) = x, \qquad dS = \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy.$$

Plošný integrál převedeme na dvojný integrál

$$\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_D \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy.$$

Dvojný integrál transformujeme do polárních souřadnic. Oblast D je popsána nerovnicemi $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\varphi$.

$$\iint_D \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+\varrho^2}\varrho}{\varrho}\, d\varrho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\varrho\sqrt{1+\varrho^2}+\ln\left(\varrho+\sqrt{1+\varrho^2}\right)\right]_0^1 d\varphi =$$
$$= \pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Přitom integrál $\int\sqrt{1+\varrho^2}\, d\varrho$ řešíme metodou per partes, kde volíme $u=\sqrt{1+\varrho^2}$ a $v'=1$.

3. Vypočtěte integrál $\int_S x\,dS$, kde S je horní polovina kulové plochy $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

   Plochu S vyjádříme takto: $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ pro body oblasti D, kterou je kruh $x^2+y^2 = 1$. Platí

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad dS = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy.$$

   Plošný integrál převedeme na dvojný integrál a využijeme polárních souřadnic $x = \varrho\cos\varphi$, $x = \varrho\sin\varphi$, kde $0 \le \varrho \le 1$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$. Platí

$$\int_S x\,dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho\cos\varphi\sqrt{\frac{1}{1-\varrho^2}}\,\varrho\,d\varrho = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}\,d\varrho.$$

   Tento integrál je roven nule, protože $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$.

4. Pomocí plošného integrálu 1. druhu vypočtěte obsah povrchu parabolické plochy $z = x^2+y^2$, kde $0 \le z \le 9$.

   Obsah plochy S je dán integrálem $\int_S dS$. Máme

$$z = f(x,y) = x^2+y^2, \qquad f_x(x,y) = 2x, \qquad f_y(x,y) = 2y, \qquad dS = \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

   Použijeme polárních souřadnic

$$\int_S dS = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^3 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}\,d\varrho = |1+4\varrho^2 = t| = 2\pi\frac{1}{8}\int_1^{37}\sqrt{t}\,dt =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[2\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{37^3}-1\right).$$

Plošný integrál 1. druhu — další příklady k procvičení

1. Vypočtěte integrál $\int_S \left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)dS$, kde S je část roviny $6x+4y+3z = 12$ v 1. oktantu. Výsledek $4\sqrt{61}$.
2. Vypočtěte integrál $\int_S y\,dS$, kde S je část roviny $3x+4y+3z = 12$ v 1. oktantu. Výsledek $2\sqrt{34}$.
3. Vypočtěte obsah části plochy $z = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2+y^2 = 1$ Výsledek $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$.

Plošný integrál 2. druhu

Protože nejdůležitější aplikací plošného integrálu 2. druhu je výpočet toku vektorového pole orientovanou plochou, provedeme výklad tohoto integrálu na výpočtu této veličiny.

Přitom si představíme, že část prostoru je vyplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost každé částice je určena jen její polohou a nezávisí na čase. Pole rychlosti tohoto proudění je popsáno vektorovou funkcí $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Ve zkoumané části prostoru se nachází orientovaná plocha S. Chceme zjistit, jaké množství tekutiny proteče plochou za jednotku času ve směru její orientace, tj. na tu stranu plochy, kam směřují její normálové vektory určující orientaci. I v tomto případě budeme uvažovat plochu, která je grafem funkce $z = f(x,y)$ na nějaké oblasti D.

Je-li plocha S orientovaná tak, že normálové vektory "směřují nahoru", tj. svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel, pak

$$\iint_S \vec{F}(x,y,y)\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{n}(x,y,z)\,dS,$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S

$$\vec{n} = \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

Máme tedy

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \iint_S (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\cdot\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) dS =$$

$$= \iint_D (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y)))\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint_D (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y)))\cdot(-f_x,-f_y,1)\;dxdy.$$

Tedy

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \iint_D [-P(x,y,f(x,y))f_x(x,y) - Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y) + R(x,y,f(x,y))]\;dxdy.$$

V případě, že je plocha S orientovaná tak, že normálové vektory "směřují dolů", tj. svírají s kladným směrem osy z tupý úhel, pak normálový vektor plochy S vezmeme

$$\vec{n} = \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)$$

Ve výsledném vzorci tedy dostaneme opačné znaménko, ale tvar zůstává nezměněn.

Speciální případy plošného integrálu 2. druhu jsou:

- a) Vektorové pole $\vec{F} = (0,0,R(x,y))$ a $S: z = f(x,y)$, pro $(x,y)\in D$.

  Pro tok T platí

  $$T = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \pm\iint_D (0,0,R(x,y,f(x,y))\cdot(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1)\,dxdy.$$

  Tedy

  $$T = \iint_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy,$$

  jestliže normála plochy "míří nahoru" (svírá ostrý úhel s kladným směrem osy z), nebo

  $$T = -\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy,$$

  jestliže normála plochy "míří dolů" (svírá tupý úhel s kladným směrem osy z).

- b) Vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 0)$ a $z =$ konst.

  V tomto případě $\vec{n} = (0,0,\pm 1)$ a

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iint_D (P(x,y,z), Q(x,y,z), 0) \cdot (0,0,\pm 1)\, dxdy = 0.$$

Poznámka:
Ve většině textů se pro plošný integrál 2. druhu používá následující symbolika

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iint_S P(x,y,z)\, dydy + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy.$$

Příklad 3: Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2)$ plochou S, která je orientovaná tak, že normálové vektory svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel nebo pravý úhel.

- **a)** $S:\ z = 2 - y$, kde $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$ a $z \ge 0$.

  Platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0,1,1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (0,0,2) \cdot (0,1,1)\, dxdy = 2 \iint_D dxdy = 16.$$

  Výsledek dvojného integrálu jsme získali úvahou, protože se jedná o obsah plochy D, kterou je obdélník o stranách 4 a 2 délkové jednotky. Tok plochou je tedy 16 jednotek toku.

- **b)** $S:\ z = \sqrt{4 - y^2}$, $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

  I zde svírají normálové vektory plochy ostrý úhel s kladným směrem osy z a platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, \frac{y}{4-y^2}, 1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (0,0,2) \cdot (0, \frac{y}{4-y^2}, 1)\, dxdy = 2 \iint_D dxdy = 16.$$

  Také tady je oblast D stejný obdélník jako v části a). Tok plochou je tedy opět 16 jednotek toku.

- **c)** S je válcová plocha $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$.

  V tomto případě jsou normálové vektory kolmé na kladný směr osy z, a tedy také na vektor $\vec{F} = (0,0,2)$ V každém bodě válcové plochy platí

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0.$$

  Tok vektorového pole plochou je tedy v tomto případě roven nule.

  Příklad 4: Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (2,-1,1)$ kuželovou plochou $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 4$, která je orientovaná tak, že její normálové vektory svírají s kladným směrem osy z tupý úhel.

  Platí

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

  tedy

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right).$$

  Pro tok T pak dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (2,-1,1) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \right) dxdy = \iint_D \frac{4x - 2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy - \iint_D dxdy.$$

Získaný dvojný integrál jsme rozdělili na dva integrály pouze z důvodu výpočtu. První integrál vypočteme transformací do polárních souřadnic, ve kterých je oblast D určena nerovnicemi $0 \leq \varrho \leq 2$ a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dostáváme

$$\iint_D \frac{4x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy = \int_0^2 d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{4\varrho\cos\varphi - 2\varrho\sin\varphi}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi}}\varrho\, d\varphi = \int_0^2 \varrho\, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} (4\cos\varphi - 2\sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^2 [4\sin\varphi + 2\cos\varphi]_0^{2\pi} = 0.$$

Druhý integrál, pokud neuvažujeme znaménko, vyjadřuje obsah kruhu, jehož poloměr je 2. Máme tedy

$$-\iint_D dxdy = -4\pi.$$

Celkový tok T přes plochu S je roven -4π jednotek toku.

Integrální věta Gaussova-Ostrogradského

Nechť $\vec{F} = (P, Q, R)$ je vektorová funkce definovaná na oblasti $\Omega \subset \Re^3$ a $G \subset \Omega$ je uzavřená ohraničená oblast, jejíž hranicí je uzavřená plocha S orientovaná podle vnějších normál. Nechť P, Q, R, P_x, Q_y a R_z jsou na Ω spojité. Pak platí

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \iiint_G (P_x + Q_y + R_z)\, dxdydz.$$

Výpočet toku vektoru přes uzavřenou plochu tedy převádíme na trojný integrál přes vnitřek této plochy.

Interpretujeme-li plošný integrál jako tok T vektorového pole uzavřenou plochou, pak $T = T_1 - T_2$, kde T_1 je množství tekutiny, které z G vyteče za jednotku času, a T_2 je množství tekutiny, které do G za stejný čas přiteče.

Je-li $T = 0$, pak z oblasti vytéká právě tolik tekutiny, kolik do ní vtéká.

Je-li $T > 0$, pak z oblasti vytéká za jednotku času více tekutiny, než kolik do ní vtéká. Dá se to vysvětlit tak, že uvnitř oblasti G se nacházejí tzv. *zřídla*, tj. body, ve kterých nějakým způsobem přibývá tekutiny.

Když $T < 0$, pak z oblasti vytéká méně tekutiny, než kolik do ní vtéká. To se dá vysvětlit tím, že v oblasti se nachází tzv. *nory*, ve kterých se tekutina ztrácí.

Příklad 5: Vypočtete tok $T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F}(P, Q, R) = (y^2, z^2, x^2)$, přes povrch krychle $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ a $-1 \leq z \leq 1$ orientovaný tak, že normála míří zvnitřku ven.

Jsou splněny předpoklady Gaussovy-Ostrogradského věty. Přitom

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 0.$$

Platí tedy

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = 0.$$