Lokální a absolutní extrémy

Demonstrační příklady

Lokální a absolutní extrémy

Klíčovými pojmy v této kapitole jsou

- **(ostré) lokální minimum a maximum**,
- **stacionární bod**,
- **(ostré) absolutní extrémy**.

Zde připomeňme jen, že:

Hledáme-li lokální extrémy, pak zadanou funkci vyšetřujeme pouze lokálně (tj. v okolí nějakého bodu), hledáme-li absolutní extrémy, pak vyšetřujeme nejmenší a největší hodnotu dané funkce na předepsané množině M.

Příklad 1 – lokální extrémy

Příklad 1. Rozhodněte, zda má funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ v bodě $[0, 0]$ lokální minimum.

Příklad 1 – lokální extrémy

Příklad 1. Rozhodněte, zda má funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ v bodě $[0, 0]$ lokální minimum.

Řešení

Platí $f(0, 0) = 0$ a zároveň pro každé $[x, y] \neq [0, 0]$ je $f(x, y) > 0$.

Příklad 1 – lokální extrémy

Příklad 1. Rozhodněte, zda má funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ v bodě $[0,0]$ lokální minimum.

Řešení

Platí $f(0,0) = 0$ a zároveň pro každé $[x,y] \neq [0,0]$ je $f(x,y) > 0$.

Funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ má tedy v bodě $[x,y] = [0,0]$ lokální minimum, které je minimem ostrým.

Graf funkce, což je kuželová plocha, si můžete prohlédnout na obrázku 1.

Příklad 1 – lokální extrémy

Příklad 1. Rozhodněte, zda má funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ v bodě $[0,0]$ lokální minimum.

Řešení

Platí $f(0,0) = 0$ a zároveň pro každé $[x,y] \neq [0,0]$ je $f(x,y) > 0$.

Funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ má tedy v bodě $[x,y] = [0,0]$ lokální minimum, které je minimem ostrým.

Graf funkce, což je kuželová plocha, si můžete prohlédnout na obrázku 1.

Jestliže spočítáme parciální derivace funkce $f(x,y)$:

$$f_x = \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

zjistíme, že v bodě $[0,0]$ neexistuje ani jedna parciální derivace funkce $f(x,y)$!

Příklad 1 – lokální extrémy

Příklad 1. Rozhodněte, zda má funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ v bodě $[0,0]$ lokální minimum.

Řešení

Platí $f(0,0) = 0$ a zároveň pro každé $[x,y] \neq [0,0]$ je $f(x,y) > 0$.

Funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ má tedy v bodě $[x,y] = [0,0]$ lokální minimum, které je minimem ostrým.

Graf funkce, což je kuželová plocha, si můžete prohlédnout na obrázku 1.

Jestliže spočítáme parciální derivace funkce $f(x,y)$:

$$f_x = \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

zjistíme, že v bodě $[0,0]$ neexistuje ani jedna parciální derivace funkce $f(x,y)$!

Pro existenci lokálního extrému v nějakém bodě, nemusí mít funkce v tomto bodě parciální derivace (nemusí zde být dokonce ani spojitá).

Obrázek 1: Graf funkce $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$.

Hledání lokálních extrémů

Funkce f může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech, nebo v bodech, v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu.

Algoritmus pro nalezení lokálních extrémů

1. Spočítáme parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y)$ a položíme je rovny nule. Tím získáme systém rovnic. Dále nalezneme všechny body, v nichž neexistuje aspoň jedna první parciální derivace.

2. Určíme všechna řešení systému – stacionární body $[x_0, y_0]$. V nich může, ale nemusí být extrém.

3. Spočteme parciální derivace druhého řádu a dosadíme do vzorce
$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 .$$

4. Pro jednotlivé stacionární body určíme $D(x_0, y_0)$, případně $f_{xx}(x_0, y_0)$. Je-li:
   - $D(x_0, y_0) > 0$ a $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o ostré lokální minimum.
   - $D(x_0, y_0) > 0$ a $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o ostré lokální maximum.
   - $D(x_0, y_0) < 0$, pak ve stacionárním bodě lokální extrém nenastává.

5. Nelze-li rozhodnout podle výše uvedených kritérií nebo vyšetřujeme body v nichž neexistuje aspoň jedna parciální derivace prvního řádu, použijeme definici extrému.

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení

Funkce $z = xy(4 - x - y)$ je polynomem proměnných x, y $\rightarrow$ její parciální derivace jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení

Funkce $z = xy(4 - x - y)$ je polynomem proměnných x, y $\rightarrow$ její parciální derivace jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

1. Spočítáme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = y(4 - 2x - y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 0,\ y_2 = 4 - 2x$$
$$z_y = x(4 - x - y) - xy = x(4 - x - 2y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 4 - 2y$$

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení

Funkce $z = xy(4 - x - y)$ je polynomem proměnných x, y $\rightarrow$ její parciální derivace jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

1. Spočítáme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = y(4 - 2x - y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 0,\ y_2 = 4 - 2x$$
$$z_y = x(4 - x - y) - xy = x(4 - x - 2y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 4 - 2y$$

2. Dstáváme čtyři stacionární body:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = [4, 0], P_3 = [0, 4], P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení

Funkce $z = xy(4 - x - y)$ je polynomem proměnných x, y $\rightarrow$ její parciální derivace jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

1. Spočítáme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = y(4 - 2x - y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 0,\ y_2 = 4 - 2x$$
$$z_y = x(4 - x - y) - xy = x(4 - x - 2y) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 4 - 2y$$

2. Dstáváme čtyři stacionární body:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = [4, 0], P_3 = [0, 4], P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

3. Spočítáme parciální derivace druhého řádu.

$$z_{xx} = -2y, \quad z_{yy} = -2x, \quad z_{xy} = 4 - 2x - 2y$$

a dosadíme do vztahu

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -4x^2 - 4y^2 + 16x + 16y - 4xy - 16.$$

Příklad 2 – lokální extrémy

Příklad 2. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení

Funkce $z = xy(4 - x - y)$ je polynomem proměnných x, y $\rightarrow$ její parciální derivace jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech.

1. Spočítáme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = y(4 - 2x - y) = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1 = 0,\ y_2 = 4 - 2x$$
$$z_y = x(4 - x - y) - xy = x(4 - x - 2y) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 4 - 2y$$

2. Dstáváme čtyři stacionární body:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = [4, 0], P_3 = [0, 4], P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

3. Spočítáme parciální derivace druhého řádu.

$$z_{xx} = -2y, \quad z_{yy} = -2x, \quad z_{xy} = 4 - 2x - 2y$$

a dosadíme do vztahu

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -4x^2 - 4y^2 + 16x + 16y - 4xy - 16.$$

4. Prověříme jednotlivé stacionární body na existenci lokálního extrému, dosadíme jejich souřadnice $[x_0, y_0]$ do vzorce $D(x_0, y_0)$.

$$D(P_1) = -16, \quad D(P_2) = -16, \quad D(P_3) = -16, \quad D(P_4) = \frac{16}{3}.$$

4. Prověříme jednotlivé stacionární body na existenci lokálního extrému, dosadíme jejich souřadnice $[x_0, y_0]$ do vzorce $D(x_0, y_0)$.

$$D(P_1) = -16, \quad D(P_2) = -16, \quad D(P_3) = -16, \quad D(P_4) = \frac{16}{3}.$$

V bodech P_1, P_2, P_3 tedy lokální extrém nenastává.

V bodě $P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$ nastává ostré lokální maximum, neboť $z_{xx}(P_4) = -\frac{8}{3}$.

Situaci si můžete prohlédnout na obrázku 2.

Obrázek 2: Funkce $z = xy(4 - x - y)$ s modře vyznačeným bodem lokálního maxima.

(a) Graf funkce („jednotka“ na ose z ukazuje hodnotu 100). (b) Detail – okolí lokálního maxima.

Hledání absolutních extrémů

1. Nalezneme stacionární body zadané funkce f a z nich vybereme ty, které leží v množině M.

2. Vyšetříme hranici množiny M.

3. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech a určíme absolutní extrémy.

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \leq 1$.

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení

1. Nejprve najdeme stacionární body funkce $f(x, y)$, které leží uvnitř množiny M.

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení

1. Nejprve najdeme stacionární body funkce $f(x,y)$, které leží uvnitř množiny M. Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$f_x = 2x - 8 = 0, \quad f_y = 2y = 0$$

   Dostáváme stacionární bod $P = [4,0]$. Tento bod však neleží v množině M.

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \le 1$.

Řešení

1. Nejprve najdeme stacionární body funkce $f(x,y)$, které leží uvnitř množiny M. Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

   $$f_x = 2x - 8 = 0, \quad f_y = 2y = 0$$

   Dostáváme stacionární bod $P = [4,0]$. Tento bod však neleží v množině M.

2. Nyní vyšetříme funkci $f(x,y)$ na hranici množiny M, řešíme tedy soustavu rovnic.

   $$f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10 \tag{1}$$

   $$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení

1. Nejprve najdeme stacionární body funkce $f(x, y)$, které leží uvnitř množiny M. Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$f_x = 2x - 8 = 0, \quad f_y = 2y = 0$$

Dostáváme stacionární bod $P = [4, 0]$. Tento bod však neleží v množině M.

2. Nyní vyšetříme funkci $f(x, y)$ na hranici množiny M, řešíme tedy soustavu rovnic.

$$f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

Z předpisu pro množinu M (rovnice 2) vyjádříme y^2 a dosadíme do rovnice 1. Dostáváme tak novou funkci, kterou si označme např. u.

$$u = x^2 - 8x + (1 - x^2) + 10 = -8x + 11.$$

Příklad 3 – absolutní extrémy

Příklad 3. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M\colon x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení

1. Nejprve najdeme stacionární body funkce $f(x,y)$, které leží uvnitř množiny M. Vypočteme parciální derivace a položíme je rovny nule.

$$f_x = 2x - 8 = 0, \quad f_y = 2y = 0$$

Dostáváme stacionární bod $P = [4, 0]$. Tento bod však neleží v množině M.

2. Nyní vyšetříme funkci $f(x,y)$ na hranici množiny M, řešíme tedy soustavu rovnic.

$$f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

Z předpisu pro množinu M (rovnice 2) vyjádříme y^2 a dosadíme do rovnice 1. Dostáváme tak novou funkci, kterou si označme např. u.

$$u = x^2 - 8x + (1 - x^2) + 10 = -8x + 11.$$

Funkce $u(x)$ je funkce jedné proměnné, najdeme nyní její největší a nejmenší hodnotu. Těchto extrémních hodnot je dosaženo buď v lokálním extrému uvnitř intervalu $[-1, 1]$

nebo v některém z jeho krajních bodů $x = -1$, $x = 1$.

nebo v některém z jeho krajních bodů $x = -1$, $x = 1$.

$$u_x = -8 \quad \rightarrow \quad \text{funkce } z \text{ na intervalu } [-1, 1] \text{ klesá.}$$

nebo v některém z jeho krajních bodů $x = -1$, $x = 1$.

$$u_x = -8 \quad \rightarrow \quad \text{funkce } z \text{ na intervalu } [-1, 1] \text{ klesá.}$$

Když funkce $u(x)$ na celém intervalu $[-1, 1]$ klesá, pak v žádném vnitřním bodě intervalu $[-1, 1]$ nemá lokální extrém. Prověříme tedy krajní body:

$$u(-1) = 19, \quad u(1) = 3.$$

Celkem tedy dostáváme, že

$$f_{max} = 19, \text{pro } [x, y] = [-1, 0],$$
$$f_{min} = 3, \;\; \text{pro } [x, y] = [1, 0].$$

nebo v některém z jeho krajních bodů $x = -1$, $x = 1$.

$$u_x = -8 \quad \rightarrow \quad \text{funkce } z \text{ na intervalu } [-1, 1] \text{ klesá.}$$

Když funkce $u(x)$ na celém intervalu $[-1, 1]$ klesá, pak v žádném vnitřním bodě intervalu $[-1, 1]$ nemá lokální extrém. Prověříme tedy krajní body:

$$u(-1) = 19, \quad u(1) = 3.$$

Celkem tedy dostáváme, že

$$f_{max} = 19, \text{pro } [x, y] = [-1, 0],$$
$$f_{min} = 3, \ \text{pro } [x, y] = [1, 0].$$

Příklad 3 – geometrický význam

Množina $M: x^2 + y^2 \leq 1$ je v rovině xy kruhem o poloměru 1. V celém prostoru xyz pak hledáme extrémy na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy (určené tímto kruhem) s grafem zadané funkce.

Na obrázku 3 je průnik válcové plochy s grafem funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ vykreslen jako žlutá elipsa, body minima a maxima pak jako modré kuličky.

Obrázek 3: Minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině M.