Nehomogenní LDR druhého řádu
Odhad partikulárního řešení
Interaktivní kvízy

Robert Mařík

3. dubna 2009

Vyzkoušejte dva, tři nebo dvacet dalších mých kvízů a potom mi prosím vyplňte anketu na webu. Děkuji!

Pro vytvoření vlastího testu podle tohoto vzoru budete potřebovat volně šiřitelný AcroTEXeDucation bundle, zdrojový soubor pro TEX a přečíst si návod na domovské stránce.

1. Teorie

Definice 1 *Buďte p, q reálná čísla a f funkce definovaná a spojitá na intervalu I. Diferenciální rovnice*

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice (zkráceně LDR) druhého řádu s konstantními koeficienty.

Definice 2 *Nahradíme-li v nehomogenní LDR (1) pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici*

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

Tato rovnice se nazývá homogenní rovnice příslušná (asociovaná) k rovnici (1).

Věta 1 *Je-li $y_p(x)$ partikulárním řešením rovnice (1) a tvoří-li funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ fundamentální systém řešení asociované homogenní LDR (2), je funkce*

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x), \qquad A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R} \tag{3}$$

obecným řešením rovnice (1).

2. Test

Na následujících stranách máte řešit nehomogenní LDR druhého řádu metodou odhadu partikulárního řešení s použitím neurčitých koeficientů.

- Je zadána rovnice a tvar partikulárního řešení y_p. Máte určit hodnotu konstanty (konstant) které v y_p vystupují, aby se po dosazení skutečně jednalo o řešení rovnice.
- Po nalezení partikulárního řešení máte sestrojit i řešení rovnice obecné (přičtením k obecnému řešení asociované homogení rovnice).
- Obecné řešení musí obsahovat dvě konstanty A a B a být lineární vzhledem k těmto konstantám. Jinak, přesně jak bychom očekávali, odpovědi $y = 1 + A\sin(x) + B\cos(x)$, $y = 1 + \sin(x) + A\cos(x) + 3B\sin(x)$ nebo $y = 1 + A\sin(x) - B(\cos(x) - \sin(x))$ jsou brány jako ekvivalentní, protože jde o jiný zápis téhož.

Kvíz. 1. Řešte $y'' + 3y' - 4y = 2$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = a$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice: ?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 4 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 2. Řešte $y'' + 2y' + y = 5$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = a$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ ______ ?

$y_p'' =$ ______ ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

______ ?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$ ______ ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ ______ ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ ______ ?

Kvíz. 3. Řešte $y'' + 2y' + y = 5e^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ae^x$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 6 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 4. Řešte $y'' - 2y' + y = 5e^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^2e^x$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ ______ ?

$y_p'' =$ ______ ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

______ ?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$ ______ ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ ______ ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ ______ ?

Kvíz. 5. Řešte $y'' + 4y = 5e^{3x}$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ae^{3x}$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 8 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 6. Řešte $y'' - y = 3e^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = axe^x$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ [ ] ?

$y_p'' =$ [ ] ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

[ ] ?

3. Určete hodnotu konstanty $a =$ [ ] ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ [ ] ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ [ ] ?

Kvíz. 7. Řešte $y'' + 2y' + y = x + 1$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax + b$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$

$y_p'' =$

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 :

x^2 :

$\Longrightarrow$ $a =$, $b =$

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 10 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 8. Řešte $y'' + y = x - 3$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax + b$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : ?

x^2 : ?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 9. Řešte $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^2 + bx + c$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^2 : ? $a =$?

x^1 : ? $\Longrightarrow$ $b =$?

x^0 : ? $c =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 10. Řešte $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax + b$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : ?

x^2 : ?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 13 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 11. Řešte $y'' - y' - 2y = 4x + 5$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax + b$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ ______ ?

$y_p'' =$ ______ ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

______ ?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : ______ ?
x^0 : ______ ?
$\Longrightarrow$ $a =$ ______ ? $b =$ ______ ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ ______ ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ ______ ?

Kvíz. 12. Řešte $y'' + 2y' + y = 5x$.

Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax + b$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

$x^1 :$?

$x^0 :$?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 13. Řešte $y'' - y = xe^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = e^x(ax^2 + bx)$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ [ ] ?

$y_p'' =$ [ ] ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

[ ] ?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : [ ] ?

x^0 : [ ] ?

$\Longrightarrow$ $a =$ [ ] ? $b =$ [ ] ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ [ ] ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ [ ] ?

Kvíz. 14. Řešte $y'' - y = 3xe^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = (ax^2 + bx)e^x$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : ?

x^0 : ?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 15. Řešte $y'' - y = (3x - 2)e^x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = (ax^2 + bx)e^x$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^1 : ?

x^0 : ?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 16. Řešte $y'' + 2y' + y = 2x^2 + 1$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^2 + bx + c$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^2 : ? $\qquad a =$?

x^1 : ? $\qquad \Longrightarrow \quad b =$?

x^0 : ? $\qquad c =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 17. Řešte $y'' + 4y = x^2$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^2 + bx + c$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^2 : ?
x^1 : ?
x^0 : ?

$\Longrightarrow$ $a =$? $b =$? $c =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Kvíz. 18. Řešte $y'' + 2y' - 3y = 6x^3 + 2x + 1$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^3 : ?
x^2 : ?
x^1 : ?
x^0 : ?

$\Longrightarrow$

$a =$?
$b =$?
$c =$?
$d =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 21 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 19. Řešte $y'' + 2y' + y = x^3$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Pokud v předchozí rovnici vystupuje exponenciální výraz tak jím vydělte a porovnejte koeficienty u odpovídajících si mocnin. Tím sestavíte soustavu lienárních rovnic kterou vyřešíte a najdete potřebné neurčité koeficienty

x^3 : ? $\qquad$ $a =$?

x^2 : ? $\qquad$ $b =$?

x^1 : ? $\quad \Longrightarrow \quad$ $c =$?

x^0 : ? $\qquad$ $d =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 22 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 20. Řešte $y'' - 4y = \sin x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = b\sin(x) + c\cos(x)$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$ ______ ?

$y_p'' =$ ______ ?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

______ ?

3. Porovnejte koeficienty u odpovídajících si goniometrických funkcí a vyřešte soustavu rovnic pro hledané koeficienty

$\sin(x):$ ______ ? $\quad\Longrightarrow\quad b =$ ______ ?

$\cos(x):$ ______ ? $\quad\quad c =$ ______ ?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$ ______ ?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$ ______ ?

Robert Mařík

Teorie
Test
Úvodní strana
Print
Titulní strana
Strana 23 z 24
Zpět
Full Screen
Zavřít
Konec

Kvíz. 21. Řešte $y'' - 4y' + 4y = \sin x$.
Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = b\sin(x) + c\cos(x)$.

1. Zderivujte partikulární řešení (i s neurčitými konstantami)

$y_p' =$?

$y_p'' =$?

2. Dosaďte partikulární řešení a jeho derivace do zadané rovnice:

?

3. Porovnejte koeficienty u odpovídajících si goniometrických funkcí a vyřešte soustavu rovnic pro hledané koeficienty

$\sin(x)$: ?

$\cos(x)$: ?

$\Longrightarrow$ $b =$? $c =$?

4. Napište partikulární řešení:

$y_p =$?

5. Napište obecné řešení s konstantami A a B:

$y =$?