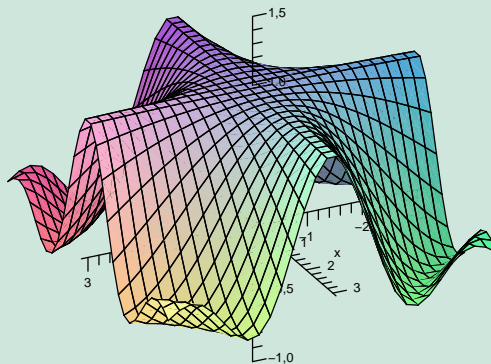


Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008



Parciální a směrové derivace

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 1 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

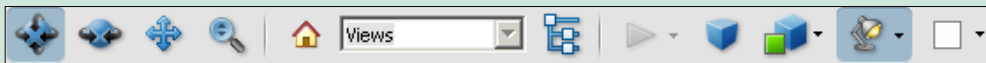
Konec

Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.

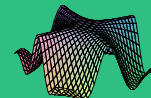
V řešených příkladech slouží k ovládní grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítka myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázky, může vypadat například¹ takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravouhlým promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá, ale to již čtenář jistě prozkoumá sám. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z a čtenář je na tento fakt upozorněn. U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (narozdí od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

¹Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



Parciální a směrové derivace

[Titulní strana](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Instrukce k testům](#)

[Strana 2 z 17](#)

[◀](#) [▶](#)

[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby **Start testu**. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Typy otázek v testech

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

správně špatně správně špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovníčka.*

$xy =$

4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko **Ans** ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovníčka.*

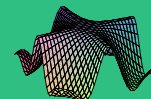
$1 + \frac{1}{2} =$ +

Počet správných odpovědí:

Správná odpověď:

Test ukončíte kliknutím na **Konec testu**. Stisknutím volby **Výsledky** se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko **Ans** (do té doby neviditelné).

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Parciální a směrové derivace

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 3 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka **Výsledky** vyznačeny symbolem ✓ a nesprávné symbolem ✗. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.

Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „**Správná odpověď:**“ po stisknutí tlačítka **Ans**. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

Bodové hodnocení

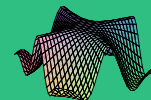
Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili 1.2 místo 1,2.
- Ludolfovo číslo π jako pi, Eulerovo číslo jako e.
- Znak dělení: Použijte lomítko /.
- Znak násobení: Symbol *, např. 4*x pro 4x.
- Mocnina: Symbol ^, např. 4*x^3 pro $4x^3$, 12*x^(-6) pro $12x^{-6}$.
- Odmocnina: \sqrt{x} zapište jako sqrt(x) nebo $x^{(1/2)}$. **Pozor!** výraz $x^{1/2}$ **není** \sqrt{x} .

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Parciální a směrové derivace

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 4 z 17

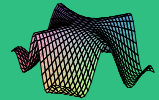


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



- Závorky: Je možno použít kulaté (), hranaté [] či složené { }. **Závorky je nutné uvádět**, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
Píše $\sin(x)$ raději než $\sin x$, $4*x*(x^2+1)^3$ pro $4x(x^2 + 1)^3$, $4^(2*x+1)$ pro 4^{2x+1} .
Nepište $\sin^2(x)$ pro $\sin^2(x)$, ale $(\sin(x))^2$.
- Funkce, které můžete použít:
 - Trigonometrické: \sin , \cos , \tan , \cot , \sec , \csc .
 - Inverzní trigonometrické: asin , acos , atan .
 - Logaritmus: \log či \ln (přirozený logaritmus), př. $\ln(x)$.
 - Exponenciála: e^x můžete zadat jako $\exp(x)$ nebo e^x .

Vyzkoušejte si zápis matematiky!

- 1, 5 =
2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$
3. $(x^2 - 1)(x^2 + 1) =$
4. $\ln \frac{x}{2} =$
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$
6. $e^{x^2} + 3y =$
7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$
8. $(\log a)^2 =$

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 5 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

3. Parciální a směrové derivace

Příklad 3.1. Vypočtete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné x považujeme proměnnou y za konstantu, tj.

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} 2x = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$z_{xx} = \frac{1(x^2 + y^2) - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_{xy} = x(-1) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} 2y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Analogicky:

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z_{yy} = \frac{1(x^2 + y^2) - y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Na obrázku 1 je zobrazena šedá rovina $y = konst.$, žlutě její průnik s grafem funkce. V modře vyznačeném bodě počítáme parciální derivaci podle x , což je tangens úhlu, který svírá tečna s rovinou xy (úhel mezi černými přímkami).



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 6 z 17

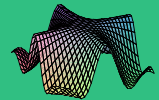


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Parciální a směrové derivace

[Titulní strana](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Instrukce k testům](#)

Strana 7 z 17



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

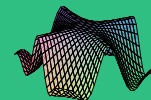
Obrázek 1: Graf funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, geometrický význam parciální derivace podle x v bodě.

Příklad 3.2. Vypočtete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \arctg(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $u = (1, 2)$.

Řešení. Přímým dosazením do definice a využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} f_{(1,2)}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg[(1+t)^2 + (-1+2t)^2] - \arctg 2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg(2 - 2t + 5t^2) - \arctg 2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 + 10t}{1 + (2 - 2t + 5t^2)^2} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Situace je zobrazena na obrázku 2. V modrém bodě $[1, -1]$ počítáme směrovou derivaci ve směru vektoru $u = (1, 2)$. Šedá rovina je určena modrým bodem, směrem u a směrem osy z . Žlutě je označen její průnik s grafem funkce. Tečna k průniku svírá s rovinou xy úhel, jehož tangens je roven námi počítané derivaci v bodě (v obrázku se jedná o úhel mezi černými přímkami).



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 8 z 17

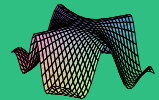


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Parciální a směrové derivace

[Titulní strana](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Instrukce k testům](#)

[Strana 9 z 17](#)



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y) = \arctg(x^2 + y^2)$, geometrický význam směrové derivace v bodě.

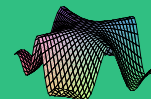
Příklad 3.3. Vypočtete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $u = (1, 0)$.

Řešení. Přímým dosazením do definice a následným využitím l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned} f_{(1,0)}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+t)^2 + 1^2} - \sqrt{1^2 + 1^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2t+t^2+1} - \sqrt{2}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+2t+t^2} - \sqrt{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2+2t+t^2}} (2t+2)}{1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

V tomto příkladu jsme počítali směrovou derivaci v bodě ve směru $(1, 0)$. Všimněme si, že obrázek 3 je obdobný jako obrázek 1. Jinými slovy:

Parciální derivace podle x je směrová derivace ve směru $(1, 0)$ a parciální derivace podle y je směrová derivace ve směru $(0, 1)$.



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 10 z 17

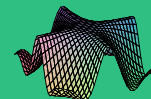


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 11 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Parciální derivace – test 1

1. Rozhodněte, zda platí:

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy} , která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá.

Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

- (a) ano, tvrzení platí (b) ne, tvrzení neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$.

$$z_x =$$

$$z_y =$$

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y) = \sin(x\sqrt{y})$ a vyhodnoťte je v bodě $[\frac{\pi}{3}, 4]$.

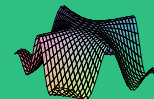
$$f_x = f_x\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) =$$

$$f_y = f_y\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) =$$

4. Odpovězte:

- (a) Kolik smíšených parciálních derivací třetího řádu může mít funkce dvou proměnných?
(b) Jestliže jsou všechny její smíšené derivace spojitě, kolik různých hodnot mohou mít v daném bodě?

5. Smíšená parciální derivace 2. řádu funkce $z = \frac{\cos x^2}{y}$ je .



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 12 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. Rozhodněte zda funkce $z = \frac{x+y}{x-y}$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

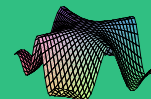
7. Rozhodněte zda funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

8. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z = x^2(1 + y^2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

Počet správných odpovědí:



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 13 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Parciální derivace – test 2

1. Rozhodněte, zda platí:

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ obě parciální derivace v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě spojitá.

(a) ano, věta platí (b) ne, věta neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = x \sin(x + 2y)$.

$$z_x =$$

$$z_y =$$

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ a vyhodnotte je v bodě $[-1, 1]$.

$$z_x =$$

$$z_x(-1, 1) =$$

$$z_y =$$

$$z_y(-1, 1) =$$

4. Zodpovězte:

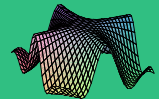
(a) Kolik parciálních derivací třetího řádu může mít funkce dvou proměnných?

(b) Jestliže jsou všechny tyto smíšené derivace spojitě, kolik různých hodnot mohou mít v daném bodě?

5. Rozhodněte zda funkce $w = x^2 + yz$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 2w$.

(a) vyhovuje

(b) nevyhovuje



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 14 z 17

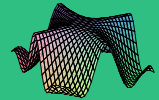


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Parciální a směrové derivace

6. Rozhodněte zda funkce $z = xe^y$ vyhovuje rovnici $x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(a) vyhovuje (b) nevyhovuje

7. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $w = x^3y^3z^3$.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \end{array}$$

8. Smíšená parciální derivace 2. řádu funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ je

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 15 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Parciální derivace – test 3

1. Rozhodněte, zda platí:

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy} . Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

- (a) ano, tvrzení platí (b) ne, tvrzení neplatí

2. Najděte parciální derivace 1. řádu funkce $z = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$.

$$z_x =$$

$$z_y =$$

3. Najděte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x, y) = \sqrt{y} \sin x$ a vyhodnotte je v bodě $[\frac{\pi}{3}, 4]$.

$$f_x =$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) =$$

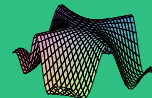
$$f_y =$$

$$f_y\left(\frac{\pi}{3}, 4\right) =$$

4. Nechť existují všechny parciální derivace třetího řádu funkce tří proměnných a jsou spojitě. Kolik různých hodnot mohou mít tyto derivace v daném bodě?

5. Vyhovuje funkce $w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ rovnici $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = -2w$?

- (a) vyhovuje (b) nevyhovuje



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 16 z 17



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. Rozhodněte zda funkce $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

(a) vyhovuje

(b) nevyhovuje

7. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $z = xe^y - ye^x$.

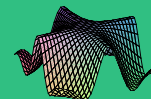
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

Počet správných odpovědí:

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Parciální a směrové derivace

[Titulní strana](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Instrukce k testům](#)

[Strana 17 z 17](#)



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)