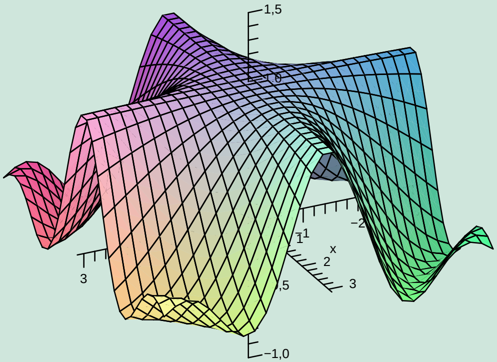
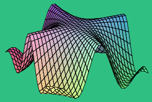
Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008

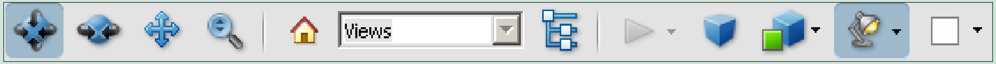




Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

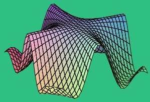
Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.
V řešených příkladech slouží k ovládání grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítko myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázku, může vypadat například[1] takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravoúhlým promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá, ale to již čtenář jistě prozkoumá sám. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z a čtenář je na tento fakt upozorněn. U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (narozdíl od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

[1] Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



Lokální a absolutní extrémy
Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 2 z 18
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby Start testu. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Start testu **Typy otázek v testech**

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

☐ správně ☐ špatně ☐ správně ☐ špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

$xy =$ ☐

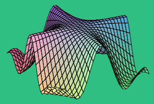
4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko Ans ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole zapište výraz vlevo od rovnítka.*

$1 + \frac{1}{2} =$ ☐ $+$ ☐

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí: ☐

Správná odpověď: ☐

Test ukončíte kliknutím na Konec testu. Stisknutím volby Výsledky se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko Ans (do té doby neviditelné).



Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka Výsledky vyznačeny symbolem ✔ a nesprávné symbolem ✘. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.
Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „Správná odpověď:“ po stisknutí tlačítka Ans. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

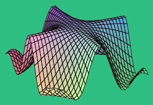
Bodové hodnocení

Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili `1.2` místo `1,2`.
- Ludolfovo číslo π jako `pi`, Eulerovo číslo jako `e`.
- Znak dělení: Použijte lomítko `/`.
- Znak násobení: Symbol `*`, např. `4*x` pro $4x$.
- Mocnina: Symbol `^`, např. `4*x^3` pro $4x^3$, `12*x^(-6)` pro $12x^{-6}$.
- Odmocnina: $\sqrt{x}$ zapište jako `sqrt(x)` nebo `x^(1/2)`. Pozor! výraz `x^1/2` není $\sqrt{x}$.



- Závorky: Je možno použít kulaté `( )`, hranaté `[ ]` či složené `{ }`. Závorky je nutné! uvádět, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
  Pište `sin(x)` raději než `sin x`, `4*x*(x^2+1)^3` pro $4x(x^2+1)^3$, `4^(2*x+1)` pro 4^{2x+1}.
  Nepište `sin^2(x)` pro $\sin^2(x)$, ale `(sin(x))^2`.
- Funkce, které můžete použít:
  - Trigonometrické: `sin, cos, tan, cot, sec, csc`.
  - Inverzní trigonometrické: `asin, acos, atan`.
  - Logaritmus: $\log$ či $\ln$ (přirozený logaritmus), př. `ln(x)`.
  - Exponenciála: e^x můžete zadat jako `exp(x)` nebo `e^x`.

Start testu **Vyzkoušejte si zápis matematiky!**

1. $1,5 =$

2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$

3. $(x^2-1)(x^2+1) =$

4. $\ln \frac{x}{2} =$

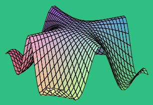
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$

6. $\mathrm{e}^{x^2} + 3y =$

7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$

8. $(\log a)^2 =$

Konec testu Výsledky Počet správných odpovědí:



6. Lokální a absolutní extrémy

Příklad 6.1. Najděte lokální extrémy funkce $z = xy(4 - x - y)$.

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic.

$$z_x = y(4 - x - y) - xy = 0, \;\; z_y = x(4 - x - y) - xy.$$

Z první rovnice plyne $y_1 = 0$, $y_2 = 4 - 2x$. Z druhé rovnice plyne $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2y$. Celkově tedy dostáváme čtyři stacionární body:

$$P_1 = [0, 0], P_2 = [4, 0], P_3 = [0, 4], P_4 = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Prověříme jednotlivé body na existenci lokálního extrému. Dále platí $z_{xx} = -2y$, $z_{yy} = -2x$, $z_{xy} = 4 - 2x - 2y$. Dosazením do vzorce

$$D(x_0, y_0) = z_{xx}(x_0, y_0) z_{yy}(x_0, y_0) - [z_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

dostáváme

$$D(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 16x + 16y - 4xy - 16.$$

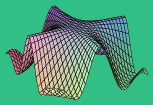
Dosadíme souřadnice stacionárních bodů. Dostáváme:

$$D(P_1) = -16, \; D(P_2) = -16, \; D(P_3) = -16, \; D(P_4) = \frac{16}{3}.$$

V bodech P_1, P_2, P_3 tedy lokální extrém nenastává. V bodě P_4 nastává ostré lokální maximum, neboť $z_{xx}(P_4) = -\frac{8}{3}$.

Obrázek 1: Funkce $z = xy(4 - x - y)$ s modře vyznačeným bodem lokálního maxima.

(a) Graf funkce („jednotka“ na ose z ukazuje hodnotu 100). (b) Detail – okolí lokálního maxima.



Příklad 6.2. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině $M: x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení. Nejprve určíme stacionární body ležící uvnitř množiny M (množina M je kruhem o poloměru 1). Vypočteme parciální derivace

$$f_x = 2x - 8,\ f_y = 2y$$

a položíme je rovny nule

$$f_x = 2x - 8 = 0,\ f_y = 2y = 0.$$

Dostáváme $P = [4, 0]$. Tento bod však neleží v množině M.
Nyní vyšetříme funkci f na hranici množiny M. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

I. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $u = f(x, \sqrt{1 - x^2}) = -8x + 11$.

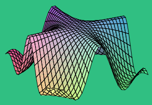
   Najdeme největší a nejmenší hodnotu funkce u na intervalu $[-1, 1]$. Těchto extrémních hodnot je dosaženo buď v lokálním extrému uvnitř intervalu $[-1, 1]$ nebo v některém z krajních bodů $x = -1$, $x = 1$. Platí $u' = -8$. Z toho plyne, že v žádném vnitřním bodě intervalu $[-1, 1]$ nemá funkce u lokální extrém. Prověříme krajní body $u(-1) = 19$, $u(1) = 3$.

II. $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $u = f(x, -\sqrt{1 - x^2}) = -8x + 11$.

   Zde je situace zcela stejná jako v případě I, neboť $f(x, -y) = f(x, y)$.

Celkem tedy dostáváme, že

$$f_{max} = 19, \text{pro } [x, y] = [-1, 0],$$
$$f_{min} = 3, \text{ pro } [x, y] = [1, 0].$$



Obrázek 2: Minimum a maximum funkce $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 10$ na množině M.

Start testu **Extrémy funkce – test 1**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

☐ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
☐ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
☐ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = xy(4 - x - y)$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];. . . $\boxed{}$

3. Vypočtěte Hessovu matici funkce $f(x, y) = y + \frac{1}{y} - 2\ln^2 x$ v bodě $[1, 1]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b)

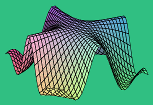
$$H_{f(x,y)}(1, 1) = \begin{vmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{vmatrix} = \boxed{}$$

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x^y - x$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.

(b) Bod B je lokální maximum funkce f.

(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.

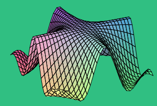


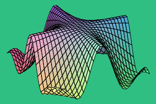
5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x,y) = x^3 + xy$ pro $x \in (-1,1)$ a $y \in (-1,1)$.

Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum nastává v bodě [☐ , ☐] a funkční hodnota v něm je rovna ☐.

(b) Minimum nastává v bodě [☐ , ☐] a funkční hodnota v něm je rovna ☐.





6. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ v bodě $[0,0]$,

$$H_{f(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je tento bod

(a) lokální minimum
(b) lokální maximum
(c) sedlový bod
(d) nelze rozhodnout

7. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2$ na množině $[x,y]\colon x^2 + y^2 \le 1, y \ge |x| - 1$.
Jestliže extrémy neexistují, vyplňte do polí znak $-$.

Funkce $f(x,y)$ má na dané množině

(a) maximum v bodě [____ , ____] a funkční hodnota v něm je rovna ____ .

(b) minimum v bodě [____ , ____] a funkční hodnota v něm je rovna ____ .

8. Do elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ vepište obdelník největšího obsahu.
Výsledný obdélník má kratší stranu délky ____ a delší stranu délky ____ .

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: ____

Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 12 z 18
◀ ▶
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Start testu **Extrémy funkce – test 2**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

☐ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$	☐ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
☐ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
☐ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$	☐ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];. . .

3. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x, y) = 9x - 9y - x^2 - y^2$ v bodě $[-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}]$,

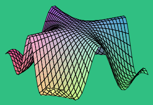
$$H_{f(x,y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je tento bod

(a) lokální minimum
(b) lokální maximum
(c) sedlový bod
(d) nelze rozhodnout

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.
(b) Bod B je lokální maximum funkce f.
(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.



5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x, y)$ pro $x \in (0, 1)$ a $y \in (0, 1)$.

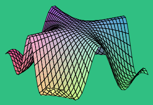
Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum nastává v bodě [____ , ____].

(b) Minimum funkce nastává v bodech splňující následující podmínky (*pokud neexistují omezující podmínky pro x či y, vyplňte* $-$):

$x =$ ____ pro ____ $\leq y \leq$ ____

a $y =$ ____ pro ____ $\leq x \leq$ ____



6. Vypočtěte Hessián funkce $f(x,y) = 9xy + \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ v bodě $[\frac{1}{3}, 1]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \end{pmatrix}$$

(b)

$$H_{f(x,y)(1,1)} = \begin{vmatrix} \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \end{vmatrix} = \boxed{\quad}$$

7. Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$ na množině $[x,y]\colon x^2 + y^2 \leq 1$.
Jestliže extrémy neexistují, vyplňte do polí znak $-$.

Funkce $f(x,y)$ má na dané množině

(a) minimum v bodě [$\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$], funkční hodnota v něm je $\boxed{\quad}$.

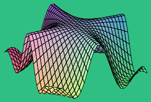
(b) maximum v bodě [$\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$], funkční hodnota v něm je $\boxed{\quad}$.

8. Určete rozměry vodní nádrže tvaru kvádru o objemu $32\,\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší obsah.

Dno: $\boxed{\quad}$ m $\times$ $\boxed{\quad}$ m   Výška kvádru: $\boxed{\quad}$ m

Konec testu | Výsledky

Počet správných odpovědí: $\boxed{\quad}$



Titulní strana
Testy ke kapitole
Instrukce k testům
Strana 15 z 18
Zpět
Vpřed
Přepnout režim obrazovky
Konec

Start testu **Extrémy funkce – test 3**

1. Nechť $H_f(x_0, y_0)$ je Hessova matice funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$. Jestliže $[x_0, y_0]$ je sedlový bod funkce $f(x, y)$, pak musí platit (vyberte vhodnou kombinaci):

$\square$ $\det H_f(x_0, y_0) < 0$	$\square$ $\det H_f(x_0, y_0) = 0$	$\square$ $\det H_f(x_0, y_0) > 0$
$\square$ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	$\square$ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	$\square$ $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$
$\square$ $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$	$\square$ $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$	$\square$ $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$

2. Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 30$ a zapište je ve tvaru [A,B]; [C,D]; [E,F];. . . $\square$

3. Vypočtěte Hessián funkce $f(x, y) = \ln(x - y) - x^2 - y$ v bodě $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

(a)

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

(b)

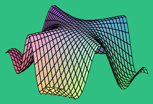
$$H_{f(x,y)(1,1)} = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

4. Zjistěte, zda má funkce $f(x, y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ v bodě $B = [1, 1]$ lokální extrém.

(a) Bod B je lokální minimum funkce f.

(b) Bod B je lokální maximum funkce f.

(c) Funkce f nemá v bodě B lokální extrém.



5. Model zobrazuje část grafu funkce $f(x,y) = 3xy^3$ pro $x \in (-1,0)$ a $y \in (0,1)$.

Určete lokální extrémy funkce.

(a) Maximum funkce nastává v bodech splňující následující podmínky (*pokud neexistují omezující podmínky pro x či y, vyplňte $-$*):

$x = \boxed{}$ pro $\boxed{} \le y \le \boxed{}$

a $y = \boxed{}$ pro $\boxed{} \le x \le \boxed{}$

(b) Minimum nastává v bodě [$\boxed{}$, $\boxed{}$] a funkční hodnota v něm je rovna $\boxed{}$.

6. Znáte-li Hessovu matici funkce $f(x,y) = x^4 + y^4$,

$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

rozhodněte, zda je bod $B = [0,0]$ lokálním extrémem funkce $f(x,y)$.

(a) Ano, bod B je lokální minimum.
(b) Ano, bod B je lokální maximum.
(c) Ne, bod B je sedlový bod.
(d) Nelze rozhodnout.

7. Nechť je dána funkce $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ a množina $0 \geq x, y \leq \pi$. Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y)$ na dané množině.

(a) maximum v bodě [,] a funkční hodnota v něm je rovna .

(b) minimum v bodě [,] a funkční hodnota v něm je rovna .

8. Do elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$ vepište kvádr největšího obsahu.

Hrany výsledného kvádru (řazeny od velikostně nejmenší) mají tyto rozměry:
, ,

Konec testu Výsledky

Počet správných odpovědí: