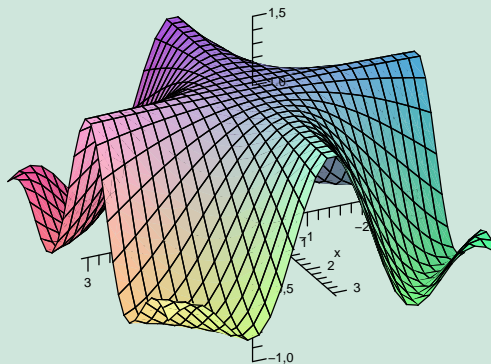


Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Silvie Kuráňová a Jan Vondra

Prosinec 2008



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 1 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

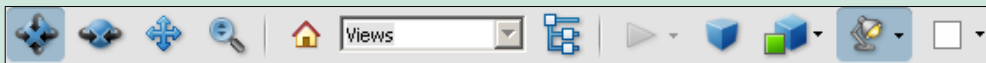
Konec

Instrukce k testům

Práce s 3D obrázky

Všechny grafy funkcí dvou proměnných jsou zobrazeny jako 3D obrázky, které je možné ovládat, tj. libovolně natáčet, posunovat, zvětšovat, měnit osvětlení apod.

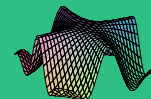
V řešených příkladech slouží k ovládní grafů funkcí panel, v testech pak pravé tlačítka myši. Panel zobrazíme či schováme kliknutím na modrý trojúhelníček v levém horním rohu obrázky, může vypadat například¹ takto:



Ovládání modelu naznačují jednotlivé ikony na panelu. Panel je rozdělen na tři části. První zleva obsahuje tlačítka pro otáčení kolem bodu, otáčení kolem přímky, posunutí a zvětšení či zmenšení objektu. V druhé části panelu nás bude zajímat především tlačítko se symbolem domečku – umožňuje návrat k výchozímu pohledu. Dále je například možné zobrazit z jakých částí je graf složen, popřípadě některé části skrýt. V poslední části najdeme tlačítko na přepínání mezi perspektivním a pravouhlým promítáním. Tlačítko pro režim vykreslení modelu, zde obzvláště doporučujeme vyzkoušet volby „Průhledné“ a „Drátový model“. Rovněž nabídka osvětlení je velmi bohatá, ale to již čtenář jistě prozkoumá sám. Poslední tlačítko umožňuje zvolit barvu pozadí, tedy například volbou žluté zvýšit kontrast při promítání ve výuce apod.

Všechny grafy funkcí v tomto textu mají cihlovou barvu, jsou opatřeny souřadnými osami a na každé z os je žlutě vyznačen jednotkový bod. Výjimečně je z technického hlediska volen jiný bod na ose z a čtenář je na tento fakt upozorněn. U složitějších modelů je vždy uveden popis modelu. Navíc všechny 3D modely (narozdí od 2D grafiky) mají bílé pozadí.

¹Vzhled panelu závisí na verzi a jazyku Acrobat Readeru. Následující obrázek i text se týkají verze 8.1 v češtině.



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 2 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Práce s testy

Motto: „Cvičení dělá mistra.“

Ověřit si znalost dané látky je možné prostřednictvím interaktivních testů umístěných v závěru každé kapitoly.

Začátek testu je nutno zahájit stisknutím volby **Start testu**. Test nebude možno ukončit dokud nezodpovíte všechny otázky.

Typy otázek v testech

1. Výběr z možností, právě jedna správná odpověď.

(a) špatně (b) špatně (c) správně (d) špatně

2. Výběr z možností, více správných odpovědí.

správně špatně správně špatně

3. Zápis vlastní odpovědi. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

$xy =$

4. Zápis vlastní odpovědi do skupiny polí, tj. tlačítko **Ans** ovládá postupně jednotlivá políčka. *Do pole запиšte výraz vlevo od rovnítka.*

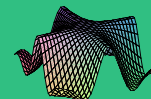
$1 + \frac{1}{2} =$ +

Počet správných odpovědí:

Správná odpověď:

Test ukončíte kliknutím na **Konec testu**. Stisknutím volby **Výsledky** se zobrazí správné odpovědi a u pole pro zápis vlastní odpovědi se objeví tlačítko **Ans** (do té doby neviditelné).

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 3 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Správné odpovědi

Pokud si práci s testem vyzkoušíte, zjistíte, že správné odpovědi jsou po skončení testu a po stisku tlačítka **Výsledky** vyznačeny symbolem ✓ a nesprávné symbolem ✗. V případě chybné odpovědi je správná varianta zvýrazněna symbolem ●.

Pokud bylo špatně zodpovězeno pole pro vlastní odpověď, objeví se kolem něj červený rámeček a správnou variantu si můžete prohlédnout v poli za textem „**Správná odpověď:**“ po stisknutí tlačítka **Ans**. Toto pole je v rámci testu „Typy otázek v testech“ umístěno na jeho konci a také v pravém panelu obrazovky (viz. str. 3). V testech na konci kapitol je toto pole zobrazováno pouze v pravém panelu obrazovky.

Bodové hodnocení

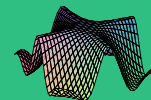
Získané body se zobrazí po ukončení testu červeně vedle každé otázky (případně podotázky). Standardní bodové ohodnocení je 1 bod za správnou odpověď (u otázek typu 1, 3 a 4) a záporné body za výběr chybné varianty u otázky druhého typu.

Zápis matematiky v testech

K zápisu odpovědí do matematického pole používáme následující notaci:

- Desetinná čísla: Desetinou čárku pište jako tečku, čili 1.2 místo 1,2.
- Ludolfovo číslo π jako pi, Eulerovo číslo jako e.
- Znak dělení: Použijte lomítko /.
- Znak násobení: Symbol *, např. 4*x pro 4x.
- Mocnina: Symbol ^, např. 4*x^3 pro 4x³, 12*x^(-6) pro 12x⁻⁶.
- Odmocnina: \sqrt{x} zapište jako sqrt(x) nebo x^(1/2). **Pozor!** výraz x^(1/2) **není** \sqrt{x} .

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 4 z 25

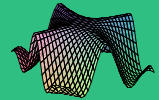


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Pojem funkce více proměnných

- Závorky: Je možno použít kulaté (), hranaté [] či složené { }. **Závorky je nutné uvádět**, vymezují argumenty funkcí, definují pořadí operací.
Píše $\sin(x)$ raději než $\sin x$, $4*x*(x^2+1)^3$ pro $4x(x^2 + 1)^3$, $4^(2*x+1)$ pro 4^{2x+1} .
Nepište $\sin^2(x)$ pro $\sin^2(x)$, ale $(\sin(x))^2$.
- Funkce, které můžete použít:
 - Trigonometrické: \sin , \cos , \tan , \cot , \sec , \csc .
 - Inverzní trigonometrické: asin , acos , atan .
 - Logaritmus: \log či \ln (přirozený logaritmus), př. $\ln(x)$.
 - Exponenciála: e^x můžete zadat jako $\exp(x)$ nebo e^x .

Vyzkoušejte si zápis matematiky!

1. $1,5 =$
2. $\sin(2x)^3 =$ není totéž jako $\sin^3 2x =$
3. $(x^2 - 1)(x^2 + 1) =$
4. $\ln \frac{x}{2} =$
5. $\frac{y}{1+x^2y^2} =$
6. $e^{x^2} + 3y =$
7. $-2x^4 + x^2y + y^2x + 1 =$
8. $(\log a)^2 =$

Počet správných odpovědí:

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 5 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

1. Pojem funkce více proměnných

Příklad 1.1. Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}.$$

Řešení. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tj. musí být splněna podmínka

$$8 - 4x^2 - 8x - y^2 \geq 0$$

$$2 - x^2 - 2x - \frac{y^2}{4} \geq 0$$

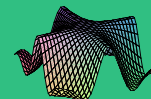
$$-x^2 - 2x - \frac{y^2}{4} \geq -2$$

$$x^2 + 2x + \frac{y^2}{4} \leq 2$$

$$(x + 1)^2 + 1 + \frac{y^2}{4} \leq 2$$

$$(x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

Rovnice $(x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ je rovnicí elipsy se středem $S[-1, 0]$ a poloosami $a = 1, b = 2$, viz. obrázek 1.



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 6 z 25

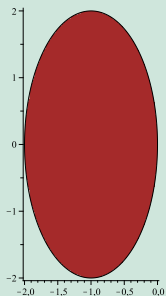


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Obrázek 1: Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}$ je dán nerovností $(x + 1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

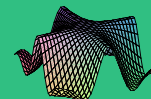
Příklad 1.2. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$ zobrazte graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}}.$$

Řešení. Vyšetřeme vrstevnice funkce na úrovni $c > 0$.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}} \\ c &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \\ c^2 &= \frac{x^2 + y^2}{4} \\ (2c)^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

což jsou kružnice se středem na ose z a poloměrem $2c$ (obrázek 2).



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 7 z 25

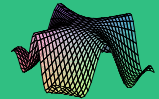


Zpět

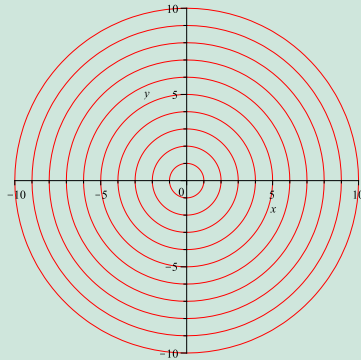
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



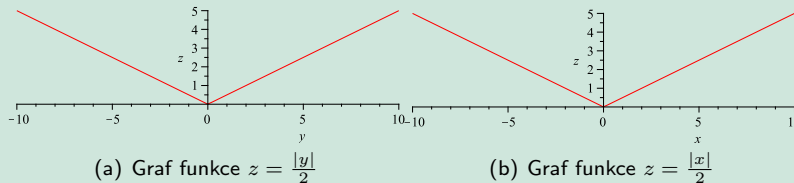
Pojem funkce více proměnných



Obrázek 2: Vrstevnice funkce $f(x, y) = \sqrt{8 - 4x^2 - 8x - y^2}$, tj. soustředné kružnice $x^2 + y^2 = (2c)^2$.

Na obrázku 3 vidíme řezy rovinou ϱ_{yz} , tj. $x = 0, z = \sqrt{\frac{y^2}{4}} = \frac{|y|}{2}$, a rovinou ϱ_{xz} , tj. $y = 0, z = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{|x|}{2}$.

Obrázek 3: Řezy rovinami yz a xz .



(a) Graf funkce $z = \frac{|y|}{2}$

(b) Graf funkce $z = \frac{|x|}{2}$

Grafem funkce $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}}$ je rotační kužel s vrcholem v počátku a osou z , nacházející se v poloprostoru $z \geq 0$, viz. obrázek 4.

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 8 z 25

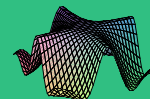
◀ ▶

Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Pojem funkce více proměnných

[Titulní strana](#)

[Testy ke kapitole](#)

[Instrukce k testům](#)

[Strana 9 z 25](#)



[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Obrázek 4: Graf funkce $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}$.

Pojem funkce – test 1

1. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$.

$$x^2 + y^2 \neq 9$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 < 9$$

$$x^2 + y^2 > 9$$

$$x \neq 0$$

$$x = 0$$

2. Rozhodněte, který z následujících předpisů je funkce proměnných x, y .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x^2 y^2 z = 10$$

$$x^2 y z^2 = 10$$

3. Přiřadte správné funkční hodnoty funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} + \cos \frac{\pi}{y}$.

(a) $f(1, 1)$

(b) $f(\sqrt{3}, 2)$

(c) $f(2, 4)$

(d) $f(3\sqrt{2}, 6)$

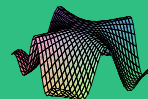
(e) $f(t, t)$

4. K funkci $f(x, y) = \sin^2(x) + \frac{y^2}{4}$ přiřadte její graf.

(a)

(b)

(c)



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 10 z 25



Zpět

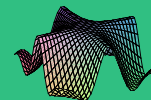
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

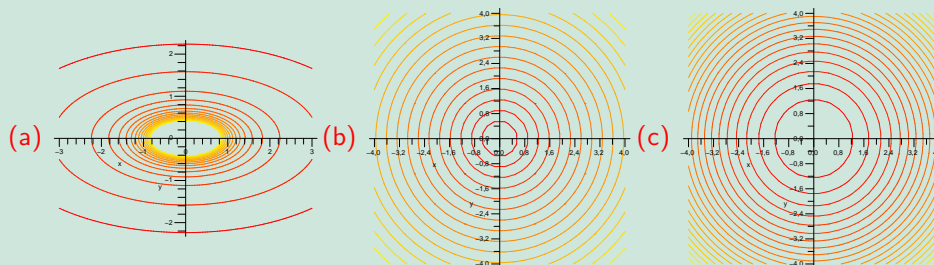
Konec

5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 11 z 25

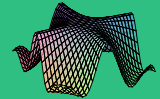


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Pojem funkce více proměnných

6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x, y)$, $g(x, y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$ (c) $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$

(d) $g(x, y) = -f(x, y)$ (e) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$ (f) $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$

Graf funkce $f(x, y)$.

Graf funkce $g(x, y)$.

7. Určete funkci $f(u, v)$, jestliže $f(x + y, x - y) = x^2 - 2xy - y^2$.

$f(u, v) =$

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 12 z 25



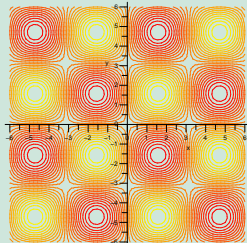
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.

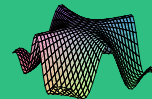


(a)

(b)

(c)

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 13 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

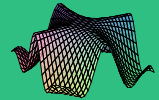
9. K danému grafu vyberte funkční předpis.

(a) $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

(b) $z = 3\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right)$

(c) $z = \frac{x^2+y^2}{2y}$

Počet správných odpovědí:



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 14 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Pojem funkce – test 2

1. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{1}{|y|-|x|}$.

$$y \neq 0$$

$$y = 0$$

$$\frac{x}{y} < -1$$

$$\frac{x}{y} < 1$$

$$\frac{x}{y} = \pm 1$$

$$\frac{x}{y} > 1$$

$$\frac{x}{y} > -1$$

2. Rozhodněte, který z následujících předpisů není funkce proměnných x, y .

$$x^2 - y^2 = z^2$$

$$\cos(xy) - z = \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$$

3. Přiřaďte správné funkční hodnoty funkce $f(x, y) = xe^y$.

(a) $f(3, 2)$

(b) $f(2, -1)$

(c) $f(e, 3)$

(d) $f(1, \ln(e))$

(e) $f(r, t)$

4. K funkci $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ přiřaďte její graf.

(a)

(b)

(c)



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 15 z 25



Zpět

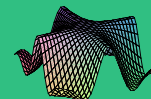
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

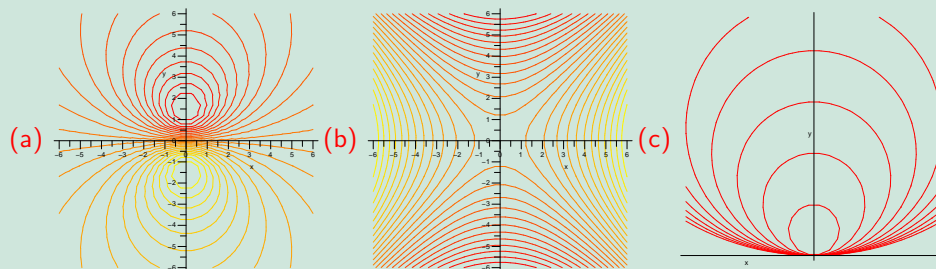
Konec

5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 16 z 25

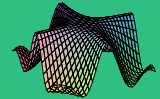


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 17 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x, y)$, $g(x, y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$ (c) $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$

(d) $g(x, y) = -f(x, y)$ (e) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$ (f) $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$

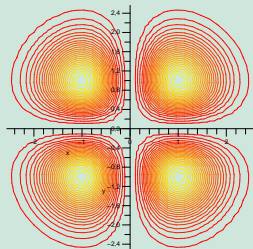
Graf funkce $f(x, y)$.

Graf funkce $g(x, y)$.

7. Určete funkci $f(u, v)$, jestliže $f(x - y, \frac{x}{y}) = x^3 - y^3, y \neq 0$.

$f(u, v) =$

8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.

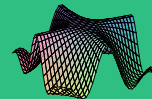


(a)

(b)

(c)

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 18 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

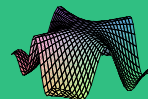
9. K danému grafu vyberte funkční předpis.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

(b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$

Počet správných odpovědí:



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 19 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Pojem funkce – test 3

1. Rozhodněte, zda předpis $e^{xyz} = 4$ je funkce proměnných x, y .

(a) ano

(b) ne

2. Určete, které podmínky musí splňovat definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$.

$$y = x$$

$$y > x$$

$$y = x + 1$$

$$y < x + 1 \wedge x < 0$$

$$y > x + 1 \wedge x < 0$$

$$y < x$$

3. Přiřadte správné funkční hodnoty funkce $f(x, y) = y^x + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$.

(a) $f(e, 1)$

(b) $f(1, \sqrt{3})$

(c) $f(-1, 2)$

(d) $f(-e, e)$

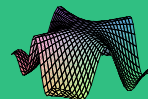
(e) $f(-1, \frac{1}{e})$

4. K funkci $f(x, y) = |x| + |y|$ přiřadte její graf.

(a)

(b)

(c)



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 20 z 25



Zpět

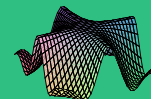
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

5. Na základě grafu funkce vyberte graf jejích vrstevnic.

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 21 z 25

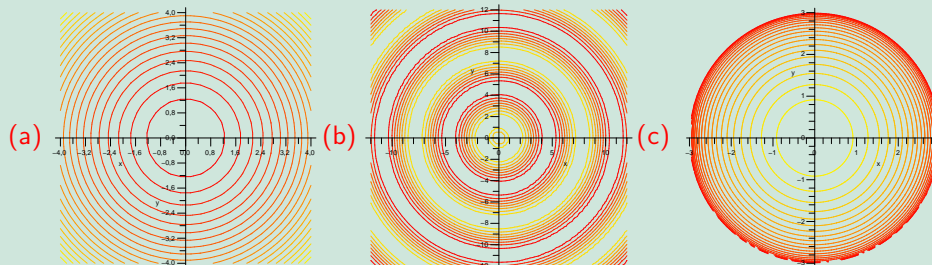


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



6. Prohlédněte si grafy funkcí $f(x, y)$, $g(x, y)$ a rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$ (c) $g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$

(d) $g(x, y) = -f(x, y)$ (e) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$ (f) $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$

Graf funkce $f(x, y)$.

Graf funkce $g(x, y)$.



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 22 z 25



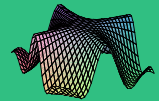
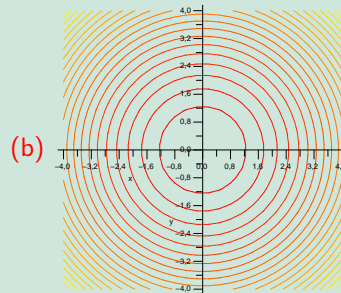
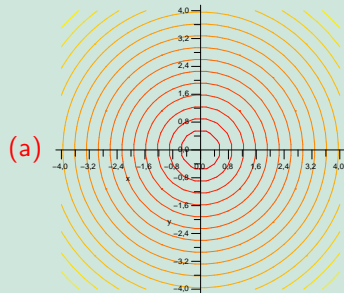
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

7. Na následujících dvou obrázcích jsou grafy vrstevnic, které se liší o stejnou konstantu (ekvidistantní vrstevnice). Jeden z nich je pro kužel, druhý pro rotační paraboloid. Rozhodněte, který z grafů zobrazuje vrstevnice kužele.



Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 23 z 25



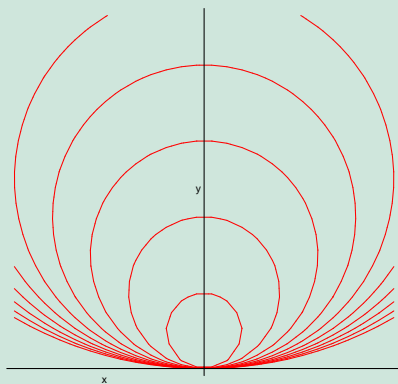
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

8. Na základě grafu vrstevnic vyberte graf funkce.

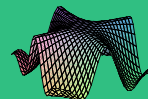


(a)

(b)

(c)

Diferenciální počet
funkcí více proměnných
S. Kuráňová, J. Vondra



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 24 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

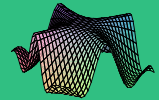
9. K danému grafu vyberte funkční předpis.

(a) $z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$

(b) $z = \sin^2(x) + \frac{y^2}{4}$

(c) $z = x^2 - y^2$

Počet správných odpovědí:



Pojem funkce více proměnných

Titulní strana

Testy ke kapitole

Instrukce k testům

Strana 25 z 25



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec