Příklad na neh. dif. rovnici 2. řádu

Speciální pravou stranu uvažujme pouze ve tvaru: $e^{\alpha x} \cdot A_n(x)$

Řešení pak bude tvaru: $e^{\alpha x} x^r \cdot P_n(x)$

Pozn.: Jedná se v podstatě o "speciální typ pravé strany", pro které $\beta = 0$

Příklad: $y'' - 16y' + 64y = 3x e^{8x}$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici: $y'' - 16y' + 64y = 0$

char. rovnice: $\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$

$$(\lambda - 8)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 8$$

$$y_0 = c_1 e^{8x} + c_2 x e^{8x}$$

$\alpha = 8, \beta = 0 \Rightarrow r = 2$, $A_n(x) = 3x \to P_n(x) = Ax + B$

Partikulární řešení tedy bude tvaru $y_p = (Ax+B)x^2 e^{8x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{8x}$

Potom $y_p' = (3Ax^2 + 2Bx) \cdot e^{8x} + 8(Ax^3 + Bx^2)e^{8x}$

$$y_p'' = (6Ax + 2B)e^{8x} + 8(3Ax^2 + 2Bx)e^{8x} + 8(3Ax^2 + 2Bx)e^{8x} + 64(Ax^3 + Bx^2)e^{8x}$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme:

$$e^{8x}(64Ax^3 + 48Ax^2 + 6Ax + 64Bx^2 + 32Bx + 2B) - 16e^{8x}(8Ax^3 + 3Ax^2 + 8Bx^2 + 2Bx) +$$
$$+ 64e^{8x}(Ax^3 + Bx^2) = 3xe^{8x}$$

Nyní porovnáme koeficienty u polynomů na obou stranách rovnice

x^3: $0 = 0$

x^2: $0 = 0$

x: $6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

x^0: $2B = 0 \Rightarrow B = 0$

$$y_p = \frac{1}{2} x^3 e^{8x}$$

Obecné řešení rovnice: $y = y_0 + y_p$

$$y = c_1 e^{8x} + c_2 x e^{8x} + \frac{1}{2} x^3 e^{8x}$$

Řešení minulé DÚ

Zadání: $(2x+1)y' + y = x$

Řešení: $y' + \frac{y}{2x+1} = \frac{x}{2x+1}$ $\quad p(x) = \frac{1}{2x+1}$, $P(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

$$\left(y e^{\frac{1}{2}\ln(2x+1)}\right)' = \frac{x}{2x+1} e^{\frac{1}{2}\ln(2x+1)}$$

$$\left(y\sqrt{2x+1}\right)' = \frac{x}{2x+1}\sqrt{2x+1}$$

$$y\sqrt{2x+1} = \int \frac{x}{2x+1}\sqrt{2x+1}\,dx \;\left|\begin{array}{l} 2x+1 = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2} \\ 2dx = 2t\,dt \\ dx = t\,dt \end{array}\right| = \int \frac{t^2-1}{2\cancel{t^2}}\,\cancel{t}\,t\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{2}\,dt = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2} + c = \frac{(2x+1)^{3/2}}{6} - \frac{(2x+1)^{1/2}}{2} + c$$

$$y = \frac{2x+1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{c}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{c}{\sqrt{2x+1}}$$

$$y = \frac{x-1}{3} + \frac{c}{\sqrt{2x+1}}$$

Poslední příklad z minulé hodiny, který jste si nejspíše nestihli opsat

Zadání: $y'' + y' + 2y = 0$

Řešení: char. rovnice: $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$$\Delta = 1 - 4.2 = -7 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} \quad \begin{array}{l} -1/2 + i\sqrt{7}/2 \\ -1/2 - i\sqrt{7}/2 \end{array}$$

Potom $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right]$