5. Základy teorie ODR

A. Analytické metody řešení

Příklad 5.1. Řešte diferenciální rovnici
$$y' = \frac{y^2 - y}{x}.$$

Řešení. Přepišme danou rovnici na tvar
$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y),$$
což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Za předpokladu $x \neq 0$, $y^2 - y \neq 0$ (tj. $y \neq 0$ a $y \neq 1$) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}(y^2 - y) \\ \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x}. \end{aligned}$$

Integrand na levé straně rozložíme na parciální zlomky: odtud
$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}.$$

Po vynásobení faktorem $y^2 - y$ máme
$$1 = A(y-1) + By, \quad \text{tj. } A = -1, B = 1.$$

Odtud dosazením a integrací dostáváme
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} = -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$
(integrační konstantu neuvádíme). Tedy po integraci obou stran
$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$
přičemž integrační konstantu z důvodu úpravy posledního vztahu píšeme v poněkud neobvyklém tvaru $\ln|C|$. Odlogaritmováním dostáváme
$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$
tj.
$$\frac{y-1}{y} = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$
(odstranění absolutních hodnot je proveditelné na jednotlivých oblastech vymezených vztahy $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq 1$). Odtud vyjádříme explicitně neznámou funkci y ve tvaru
$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zbývá posoudit případ $y^2 - y = 0$ (tj. $y = 0$ nebo $y = 1$). Dosazením těchto konstantních funkcí do dané rovnice zjistíme, že se jedná o řešení. Všimněme si, že řešení $y = 1$ lze zahrnout do obecného řešení volbou

$C = 0$, avšak řešení $y = 0$ nelze v tomto tvaru získat žádnou volbou C. Všechna řešení uvažované rovnice jsou tedy tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y = 0.$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou (proveďte).

Příklad 5.2. Řešte počáteční problém $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y(0) = 1$.

Řešení. Danou rovnici lze přepsat (za předpokladu $\cos x \neq 0$) na tvar

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

což je z důvodu linearity vzhledem k y rovnice lineární. Tuto rovnici řešíme ve dvou krocích metodou variace konstanty.

I. Určíme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Separací proměnných dostáváme pro $y \neq 0$ a $\cos x \neq 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně určíme (bez uvedení integrační konstanty) jako

$$-\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \ln |\cos x|,$$

tj.

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + \ln |C| = \ln |C \cos x|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po provedení odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot máme

$$y_h = C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R},$$

kde volba parametru $C = 0$ zahrnuje i nulové řešení $y = 0$, které jsme vzhledem k předpokladu $y \neq 0$ dosud neuvažovali. Zdůrazněme, že získaný vztah je pouze řešením homogenní rovnice, proto volíme označení y_h.

II. Provedeme variaci konstanty a obecné řešení původní nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cos x, \qquad C(x) = ?$$

Neznámou funkci $C(x)$ určíme dosazením tohoto vztahu do řešené nehomogenní rovnice:

$$C'(x) \cos(x) + C(x)(-\sin x) + C(x) \cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

tj. po úpravě

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad C(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,.$$

Dosazením takto vypočteného $C(x)$ pak máme obecné řešení ve tvaru

$$y = (\operatorname{tg} x + C) \cos x = C \cos x + \sin x.$$

Nyní hledané partikulární řešení určíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení:

$$1 = C \cos 0 + \sin 0 = C.$$

Partikulární řešení daného počátečního problému je tedy funkce

$$y = \cos x + \sin x.$$

Příklad 5.3. Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\,.$$

Řešení. Přepíšeme-li tuto rovnici na tvar

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y},$$

pak vidíme, že ji můžeme řešit jednak substitucí $u = y/x$, kde také jako rovnici Bernoulliovu (kde $r = -1 \rightarrow$ tedy substitucí $u = y^2$). Užijeme oba postupy:

a) Rovnici zapíšeme jako

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right).$$

Položíme proto $u = y/x$, tedy $y' = u'x + u$, a daná rovnice se transformuje na tvar

$$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

nebo-li za uvedeného předpokladu $x \neq 0$

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{u^2+1}{2u}\,.$$

Po převedení této rovnice na diferenciální tvar dostáváme

$$\frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

a dále

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud integrací

$$\ln(u^2+1) = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,.$$

Po odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$u^2 = \frac{C}{x} - 1, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,.$$

Zpětným dosazením substituce lze snadno určit obecné řešení zadané rovnice ve tvaru

$$x^2 + y^2 = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,.$$

Obecné řešení tedy zahrnuje všechna řešení dané rovnice a tvoří jednoparametrickou soustavou kružnic se středem v bodě $(C/2, 0)$ a poloměrem $C/2$.

b) Rovnici upravme na tvar

$$y' = \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1}$$

a budeme ji řešit jako Bernoulliovu rovnici substitucí $u = y^{1-r} = y^2$. Při dosazování substituce budeme postupovat tak, že rovnici nejprve vydělíme faktorem $y^r = y^{-1}$ (tedy vynásobíme y) a poté do ní dosadíme $u = y^2$, resp. $u' = 2yy'$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y'y &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{x} - x\right), \\ u' &= \frac{u}{x} - x. \end{aligned}$$

Tuto lineární rovnici vyřešíme metodou variace konstanty.

I. Přidruženou homogenní rovnici

$$u' = \frac{u}{x}$$

lze řešit separací proměnných, nebo další substitucí $v = u/x$. Oběma způsoby snadno zjistíme, že

$$u_h = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. Dále nechť

$$u = C(x)x, \qquad C(x) =?$$

Dosazením do řešené lineární rovnice máme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{C(x)x}{x} - x, \qquad \text{tj.} \qquad C'(x) = -1.$$

Odtud $C(x) = -x + C$, a obecné řešení lineární rovnice je tedy tvaru

$$u = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením substituce pak dostáváme

$$y^2 = Cx - x^2, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Příklad 5.4. Řešte počáteční problém $xy' = -y\,, y(4) = -3$.

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, a po přepsání rovnice na tvar $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ snadno zjistíme, že rovnice je také exaktní. Skutečně, $P'_y = 0 = Q'_x$, tj. podmínka exaktnosti je splněna. Hledejme kmenovou funkci (potenciál) Φ. Protože platí $P = \Phi'_x, Q = \Phi'_y$, kmenovou funkci lze určit jako:

$$\Phi = \int P\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)\,.$$

Zbývá určit funkci $\varphi(y)$. Derivujme proto vzniklou rovnost podle opačné proměnné, než jsme integrovali, tj. podle y:

$$\Phi'_y = \varphi'(y) = Q = y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + K$$

Zahrneme-li konstantu do pravé strany rovnice $\Phi(x, y) = C$, potom

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C\,.$$

Vynásobením dvěma a položením $C := 2C$ lze výsledek zapsat v jednodušším tvaru $x^2 + y^2 = C$, nebo explicitně $y = \pm\sqrt{C - x^2}$. Vidíme, že obecné řešení tvoří soustředné kružnice se středem v počátku. Abychom získali partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce, dosaďme bod $[4, -3]$ do rovnice $x^2+y^2 = C$. Odtud $4^2 + (-3)^2 = C$, tj $C = 25$. Protože bod $[4, -3]$ leží pod osou x, vezmeme spodní část kružnice, tj. daný počáteční problém řeší funkce

$$y(x) = -\sqrt{25 - x^2}\,, \quad x \in (-5, 5)\,.$$

Pozor! Krajní body $x = \pm 5$ do definičního oboru nepatří, protože v těchto bodech je derivace nekonečná, tudíž ji nelze dosadit do rovnice.

Příklad 5.5. Řešte diferenciální rovnici $y' + y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x$.

Řešení. Tato rovnice je rovnicí lineární, ale také rovnicí se separovanými proměnnými, neboť

$$y' = 2 \operatorname{tg} x - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(2 - y).$$

V těchto případech bývá obvykle výhodnější řešit danou rovnici metodou separace proměnných. Za předpokladu $y \neq 2$ tedy rovnici přepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{2 - y} = \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$$

a odtud integrací

$$\begin{aligned} -\ln|2-y| &= -\ln|\cos x| + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0, \quad \text{tj.} \\ \ln|2-y| &= \ln|\cos x| + \ln|C| = \ln|C\cos x|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

(v souvislosti s provedenou úpravou připomeňme, že obecná konstanta vynásobená libovolným nenulovým reálným číslem zůstává obecnou konstantou - v našem případě není tedy nutno měnit její znaménko). Po provedení odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot, a diskuze případu $y = 2$ dostáváme obecné řešení

$$y = 2 - C\cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.6. Řešte diferenciální rovnici
$$y' = -\frac{y}{x+y}\,.$$

Řešení. Za předpokladu $x \neq 0$ dělíme čitatel i jmenovatel faktorem x, čímž dostáváme

$$y' = -\frac{y/x}{1+y/x}.$$

Zavedeme tedy substituci $u = y/x$ a po jejím dosazení a úpravě máme

$$u' = -\frac{1}{x}\frac{2u+u^2}{1+u}\,.$$

Za předpokladu $2u + u^2 \neq 0$ (tj. $u \neq 0$, $u \neq -2$) rovnici přepíšeme na diferenciální tvar

$$\frac{1+u}{2u+u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

a odtud integrací

$$\frac{1}{2}\ln|2u+u^2| = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Po odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot a zahrnutí případu $2u + u^2 = 0$ dostáváme

$$2u + u^2 = \frac{C}{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětné dosazení substituce pak vede k nalezení obecného řešení

$$y^2 + 2xy = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.7. Řešte diferenciální rovnici $y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení. Daná rovnice je lineární, a řešíme ji proto metodou variace konstanty.

I. $y' + 2xy = 0$, $\mathrm{d}y/y = -2x\,\mathrm{d}x$ a odtud integrací

$$\ln|y| = -x^2 + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Zapíšeme-li funkci $-x^2$ pomocí logaritmu jako $\ln \mathrm{e}^{-x^2}$, dostáváme

$$\ln|y| = \ln|C\,\mathrm{e}^{-x^2}|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0$$

a po provedení obvyklých kroků

$$y_h = C\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. $\quad y = C(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad C(x) = ?$
Dosazením do dané nehomogenní rovnice máme

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} + C(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = x\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

tj.

$$C'(x) = x, \qquad C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Odtud máme obecné řešení

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.8. Řešte diferenciální rovnici $y' = \mathrm{e}^{x+y}$.

Řešení. Protože $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$, rovnici řešíme separací proměnných:

$$\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,,$$

a po integraci

$$-\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x + C, \quad \text{tj.} \quad y = -\ln(C - \mathrm{e}^x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.9. Řešte diferenciální rovnici $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 1 - x\,\mathrm{tg}\,x$.

Řešení. Rovnice je lineární, postupujeme opět pomocí metody variace konstanty.

I. $\quad y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0, \quad \mathrm{d}y/y = \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$ a odtud integrací

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,, \\ y_h &= \frac{C}{\cos x}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. Řešení hledejme ve tvaru

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}, \qquad C(x) = ?$$

Po dosazení a úpravě máme

$$C'(x) = \cos x - x\sin x,$$

a odtud integrací (druhý člen integrujeme per partes) $C(x) = x\cos x + C$. Obecné řešení:

$$y = \frac{x\cos x + C}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} + x.$$

Příklad 5.10. Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{xy^2 + x}{x^2y - y}\,.$$

Řešení. Rovnici upravíme jako

$$y' = \frac{x(y^2+1)}{y(x^2-1)} = \frac{x}{x^2-1}\,\frac{y^2+1}{y}$$

a řešíme ji separací proměnných:

$$\frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$$

tj. po integraci

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0\,.$$

Odtud po obvyklých úpravách

$$y^2+1 = C(x^2-1), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 5.11. Řešte diferenciální rovnici $y' = y - y^2$.

Řešení. Jde o rovnici se separovanými proměnnými, ale také o rovnici Bernoulliovu. Zvolíme řešení pomocí Bernoulliovy substituce: rovnici dělíme y^2 a obdržíme

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} - 1$$

za předpokladu $y \neq 0$. Položme $u = 1/y$, tj. $u' = -y'/y^2$ a dostáváme

$$-u' = u - 1, \qquad \text{tedy} \qquad u' = 1 - u.$$

Vzniklá rovnice je (musí být) lineární, ale v našem případě je rovněž rovnicí se separovanými proměnnými. Tedy pro $u \neq 1$ máme

$$\frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \mathrm{d}x,$$

a po integraci

$$-\ln|1-u| = x + \ln|C|, \quad \text{tj.} \quad \ln|1-u| = \ln|C\,\mathrm{e}^{-x}|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Obvyklým postupem obdržíme

$$u = 1 - C\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

tj. všechna řešení jsou (po zahrnutí vyloučeného případu $y = 0$) tvaru

$$y = \frac{1}{1 - C\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - C}, \qquad C \in \mathbb{R}, \qquad y = 0.$$

Příklad 5.12. Řešte počáteční problém

$$xy' + y = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Řešení. Daná rovnice je lineární, neboť za předpokladu $x \neq 0$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{1+x^2}.$$

I. Separací proměnných řešíme příslušnou homogenní rovnici:

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud snadno

$$y_h = C/x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

II. Řešení nehomogenní rovnice hledejme ve tvaru

$$y = C(x)/x, \qquad C(x) = ?$$

Dosazením a po úpravě máme

$$C'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$$

Integrací per partes ($\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$) dostáváme

$$C(x) = x \operatorname{arctg} x + C.$$

Odtud obecné řešení:

$$y = \frac{x \operatorname{arctg} x + C}{x} = \frac{C}{x} + \operatorname{arctg} x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky máte $\frac{\pi}{4} = C + \operatorname{arctg} 1$, tedy $C = 0$. Hledané partikulární řešení je proto tvaru

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad x > 0.$$

Příklad 5.13. Řešte počáteční problém $xy' = y(\ln y - \ln x), \qquad y(1) = 1.$

Řešení. Rovnici přepíšeme na tvar

$$y' = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

a řešíme substitucí $u = u/x$. Odtud

$$u' = \frac{1}{x} u(\ln u - 1),$$

tedy separací proměnných (za předpokladu $u(\ln u - 1) \neq 0$, tj. $u \neq 0$, $u \neq \mathrm{e}$) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Následnou integrací (integrál na levé straně řešíme buď substitucí $t = \ln u$, nebo přímo užitím vzorce pro $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$) dostáváme

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Odtud obvyklými úpravami

$$\ln u = 1 + Cx, \qquad \text{tj.} \qquad u = \mathrm{e}^{1+Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětným dosazením substituce dostáváme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$y = x \, \mathrm{e}^{1+Cx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení počáteční podmínky platí $1 = \mathrm{e}^{1+C}$, tj. $C = -1$. Hledané partikulární řešení je proto funkce

$$y = x \, \mathrm{e}^{1-x}, \qquad x > 0.$$

B. Aplikace ODR1

Příklad 5.14. (Problém rozpadu radioaktivní látky). Rychlost rozpadu radia je přímo úměrná množství dosud nerozpadlého radia. Určete funkci $R : t \to R(t)$, která popisuje závislost množství nerozpadlého radia na čase t. Kolik procent původního množství R_0 radia se rozpadne za 200 let, jestliže isotop radia ^{226}Ra má poločas rozpadu 1602 let?

Řešení. Rychlost rozpadu radia lze označit jako okamžitou změnu množství nerozpadlého radia. Uvažujeme tedy rovnice

$$\dot{R}(t) = -kR(t),$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti.

Obecné řešení této diferenciální rovnice 1. řádu získáme pomocí separace proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(t) = -kR(t),$$
$$\int \frac{\mathrm{d}R}{R(t)} = -\int k\,\mathrm{d}t,$$
$$R(t) = C\mathrm{e}^{-kt}.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá procentuální podíl radia, které se rozpadne za danou dobu, uvažujeme počáteční podmínku $R(0) = 100$, ze které lze určit parametr C. Tedy máme $100 = C\mathrm{e}^0$, a odtud $C = 100$. Dále určíme parametr k ze skutečnosti, že poločas rozpadu radioaktivní látky je doba, za kterou se rozpadne polovina původního množství látky. Máme tedy $R(1602) = 50 = 100\mathrm{e}^{-1602k}$. Logaritmováním potom dostáváme $\ln(1/2) = -1602k$, a tedy $k = 4.327 \cdot 10^{-4}$.

Nakonec určíme procentuální podíl nerozpadlého isotopu radia po 200 letech:

$$R(200) = 100 \cdot \mathrm{e}^{-4.327 \cdot 10^{-4} \cdot 200} \doteq 91.710\,\%.$$

Příklad 5.15. (Volný pád). Hmotný bod padá z výšky $h_0 > 0$ s nulovou počáteční rychlostí. Najděme jeho výšku $h(t)$ nad zemí v čase t, předpokládáme-li, že odpor vzduchu je úměrný čtverci rychlosti.

Řešení. Zavedeme vertikální osu x orientovanou směrem dolů a nechť $x(t)$ vyjadřuje závislost délky x uražené dráhy na čase t. Po určení $x(t)$ požadovanou výšku $h(t)$ snadno stanovíme pomocí vztahu

$$h(t) = h_0 - x(t)\,. \tag{5.1}$$

Přistoupíme tedy k určení $x(t)$. Na hmotný bod působí dvě síly: gravitační síla ($= mg$) a odpor vzduchu ($= kv^2 = k(\dot{x})^2$, kde $k > 0$ je koeficient úměrnosti). Obě síly mají vzájemně opačný smysl, a budou se tedy odečítat. Vzhledem k orientaci osy x je výsledná vnější síla působící na hmotný bod tvaru $F = mg - k(\dot{x})^2$. Podle druhého Newtonova zákona pak platí

$$m\ddot{x} = mg - k(\dot{x})^2.$$

Tato rovnice je ODR2 a přísluší jí dvě počáteční podmínky tvaru

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0\,. \tag{5.2}$$

Protože však síla F (tedy pravá strana dané diferenciální rovnice) závisí pouze na rychlosti bodu $\dot{x}$ a nikoliv na jeho poloze x, lze tuto ODR2 snadno převést substitucí $v = \dot{x}$ na tvar

$$m\dot{v} = mg - kv^2$$

nebo-li

$$\dot{v} = g - \alpha^2 v^2 \qquad (\alpha^2 = \frac{k}{m} > 0)\,, \tag{5.3}$$

což je ODR1 se separovanými proměnnými. Separací proměnných tedy dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \alpha^2 v^2} = \mathrm{d}t\,.$$

Poznamenejme, že zřejmě $\dot{v} > 0$, a proto $g - \alpha^2 v^2 > 0$ (opačný případ nemá fyzikální smysl). Rozložíme na parciální zlomky a integrujeme:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g} - \alpha v} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{g} + \alpha v} = \int \mathrm{d}t\,,$$

tedy

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{g}} \ln(\sqrt{g} - \alpha v) + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{g}} \ln(\sqrt{g} + \alpha v) = t + C\,.$$

Z důvodu snadnějších úprav určíme konstantu C již nyní, a to dosazením podmínky $v(0) = \dot{x}(0) = 0$ (viz (5.2)) do tohoto implicitního tvaru. Dostáváme $C = 0$, a odtud úpravou

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{g}+\alpha v}{\sqrt{g}-\alpha v} &= t,\\ \frac{\sqrt{g}+\alpha v}{\sqrt{g}-\alpha v} &= \mathrm{e}^{2\alpha\sqrt{g}t},\\ v &= \frac{\sqrt{g}}{\alpha}\frac{\mathrm{e}^{2\alpha\sqrt{g}t}-1}{\mathrm{e}^{2\alpha\sqrt{g}t}+1}.\end{aligned}$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele zlomku výrazem $\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{g}t}$ lze vyjádření pro rychlost v upravit na přehledný tvar

$$v(t) = \frac{\sqrt{g}}{\alpha}\,\mathrm{tgh}\,(\alpha\sqrt{g}t)\,.$$

Obdrželi jsme tedy vyjádření závislosti rychlosti hmotného bodu na čase t. Zpětným dosazením do vztahu $\dot{x} = v$ dostáváme

$$x(t) = \frac{\sqrt{g}}{\alpha}\int \mathrm{tgh}\,(\alpha\sqrt{g}t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2}\ln\cosh(\alpha\sqrt{g}t) + C_1\,.$$

Dosazením podmínky $x(0) = 0$ (viz (5.2)) máme $C_1 = 0$. Dosadíme-li dále za α (viz (5.3)), platí

$$x(t) = \frac{m}{k}\ln\cosh\sqrt{\frac{kg}{m}}t\,.$$

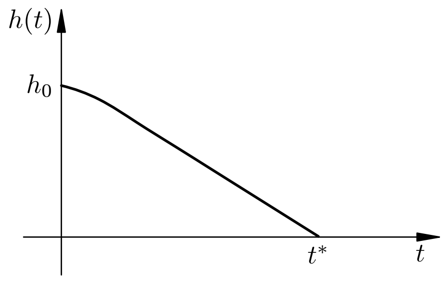
K úplnému rozřešení dané úlohy zbývá určit okamžik t^*, kdy hmotný bod dopadne na zemský povrch (a pohyb bodu tedy již nepokračuje). Hledáme tedy $t^* > 0$ takové, aby $x(t^*) = h_0$. Z tohoto vztahu máme po úpravě

$$t^* = \sqrt{\frac{m}{kg}}\,\mathrm{argcosh}\,\mathrm{e}^{h_0k/m}\,. \tag{5.4}$$

Podle (5.1) je tedy výška h daného bodu na zemí dána vztahem

$$h(t) = h_0 - \frac{m}{k}\ln\cosh\sqrt{\frac{kg}{m}}t, \qquad t \in \langle 0, t^*\rangle\,,$$

kde okamžik t^* je dán výrazem (5.4) (viz Obr. 1).



Obr. 5.1: Závislost výšky hmotného bodu na čase

Příklad 5.16. (Newtonův zákon ochlazování). Podle tohoto zákona je rychlost ochlazování daného tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty T tělesa a teploty T_v vzduchu. Řešme tuto úlohu: Je-li teplota vzduchu $T_v = 20^0$ C a těleso se za 20 minut ochladilo z počáteční teploty $T_0 = 100^0$ C na 60^0 C, za jak dlouho se ochladí na 30^0 C ?

Řešení. Označíme-li $k > 0$ koeficient úměrnosti, pak teplota $T(t)$ tělesa v čase t je řešením počátečního problému

$$\dot{T} = -k(T - T_v), \qquad T(0) = T_0\,.$$

Chápeme-li T_v obecně jako funkci času t, je daná rovnice LODR1. Je-li však speciálně T_v konstantní (jako v našem případě), je to také rovnice se V takovém případě bývá obvykle výhodnější řešit rovnici metodou separace proměnných.

Řešíme tedy počáteční problém

$$\dot{T} = -k(T-20), \qquad T(0) = 100\,,$$

kde konstanta $k > 0$ zůstává prozatím nespecifikována. Za předpokladu $T \neq 20$ (který je v našem případě zřejmě splněn) napíšeme rovnici v diferenciálním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-20} = -k\mathrm{d}t\,.$$

Odtud integrací a obvyklými úpravami

$$\begin{aligned} \textstyle\int \frac{\mathrm{d}T}{T-20} &= -k \textstyle\int \mathrm{d}t, \\ \ln|T-20| &= -kt + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ T &= C\mathrm{e}^{-kt} + 20, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

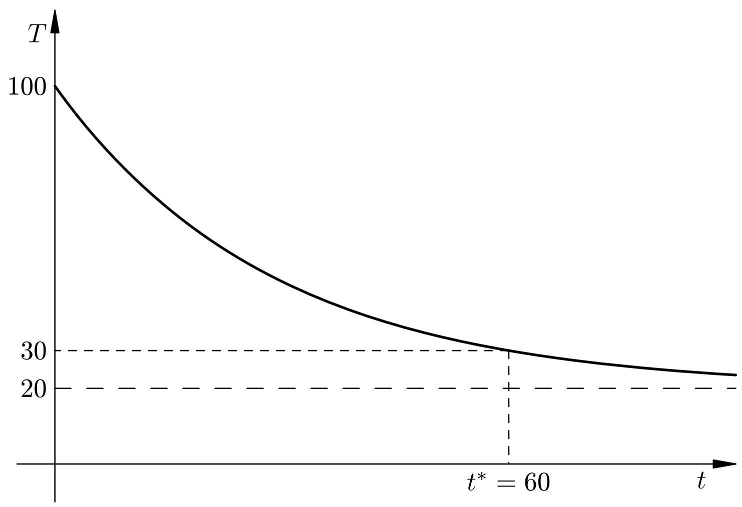
Poznamenejme současně, že v řešené úloze má fyzikální smysl pouze volba $C > 0$. Obecné řešení tedy obsahuje dvě nespecifikované konstanty C, k. K jejich určení máme k dispozici kromě počáteční podmínky $T(0) = 100$ také vztah $T(20) = 60$. Dosazením těchto podmínek do obecného řešení obdržíme

$$C = 80, \qquad k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Závislost teploty T na čase t je tedy vyjádřena vztahem

$$T(t) = 80\mathrm{e}^{(-t\ln 2)/20} + 20 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20} + 20\,, \tag{5.5}$$

který je znázorněn na Obr. 5.2.



Obr. 5.2: Závislost teploty na čase

Hledaný časový okamžik t^*, v němž se teplota tělesa ochladí na 30^0 C, je řešením rovnice $T(t^*) = 30$. Odtud podle (5.5) snadno určíme $t^* = 60$. Vzhledem ke zvoleným jednotkám proto dostáváme, že požadované ochlazení nastane za jednu hodinu.

Příklad 5.17. (Logistická rovnice). Problém populačního růstu je popsán tzv. logistickou rovnicí

$$\dot{y} = ky - ay^2\,, \tag{5.6}$$

kde $k, a > 0$ jsou reálné konstanty (k má význam faktoru přírůstku, a je faktor úmrtnosti).

Řešení. Tato rovnice je ODR1 se separovanými proměnnými, ale také Bernoulliovou rovnicí (kde $r = 2$). Za předpokladu $y \neq 0$ proto zavedeme substituci $u = 1/y$, tj. $\dot{u} = -\dot{y}/y^2$.

Dělíme rovnici (5.6) výrazem y^2 a dostáváme

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = k\frac{1}{y} - a\,,$$

tedy

$$\dot{u} = -ku + a\,. \tag{5.7}$$

Lineární rovnici (5.7) vyřešíme opět ve dvou krocích:

a) Separací proměnných v příslušné homogenní rovnici

$$\dot{u} = -ku$$

dostáváme za předpokladu $u \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -k\,\mathrm{d}t\,.$$

Odtud po integraci máme

$$\ln|u| = -kt + \ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Užitím obvyklých úprav pak dostáváme obecné řešení dané homogenní rovnice ve tvaru

$$u_h = C\mathrm{e}^{-kt}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

b) Nechť

$$u = C(t)\mathrm{e}^{-kt}, \qquad C(t) = ?$$

Dosadíme do (5.7):

$$\dot{C}(t)\mathrm{e}^{-kt} - kC(t)\mathrm{e}^{-kt} = -kC(t)\mathrm{e}^{-kt} + a, \qquad \text{tj.} \qquad \dot{C}(t) = a\mathrm{e}^{kt}\,.$$

Odtud integrací $C(t) = \frac{a}{k}\mathrm{e}^{kt} + C$, tj.

$$u = \frac{a}{k} + C\mathrm{e}^{-kt}.$$

Každé nenulové řešení logistické rovnice tedy lze psát ve tvaru

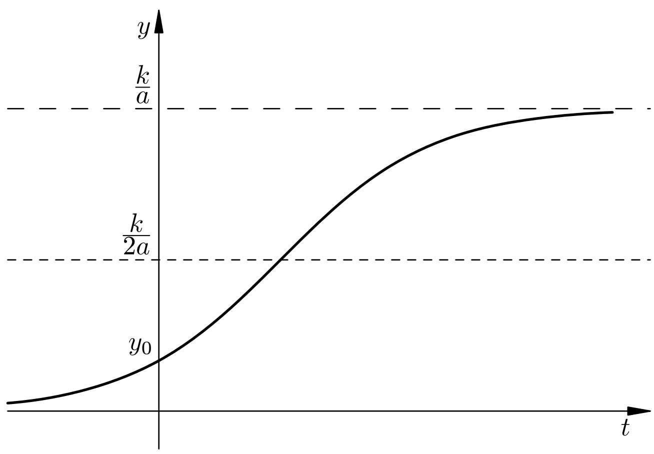
$$y(t) = \frac{1}{a/k + C\mathrm{e}^{-kt}} = \frac{k}{a + Ck\mathrm{e}^{-kt}}, \qquad C \in \mathbb{R}\,. \tag{5.8}$$

Uvažujeme-li navíc počáteční podmínku

$$y(0) = y_0 \neq 0\,, \tag{5.9}$$

pak lze specifikovat $C = (k - ay_0)/(ky_0)$. Dosazením této hodnoty do (5.8) a následnou úpravou lze řešení počátečního problému (5.6), (5.9) zapsat v přehlednější formě

$$y(t) = \frac{k}{2a} + \frac{k}{2a}\mathrm{tgh}\,\frac{k}{2}(t - \tau), \qquad \tau = \frac{1}{k}\ln\frac{k - ay_0}{ay_0}.$$



Obr. 5.3: Demografická křivka

Na obr. 5.3 je znázorněna tato tzv. *demografická křivka (logistika)* popisující zákon vzrůstu a mající tvar hyperbolické tangenty. Křivka je souměrná podle inflexního bodu a probíhá v pásu mezi asymptotami $y = 0$, $y = k/a$.

Příklad 5.18. Průhyb y převodového řemene ve stavu klidu je dán rovnicí $H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, kde H, p jsou dané konstanty. Nalezněte vyjádření pro průhyb řemene.

Řešení. Zavedeme-li substituci $u = y'$ dostáváme rovnici

$$Hu' = p\sqrt{1+u^2}\,,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Můžeme tedy psát

$$\frac{\mathrm{d}xu}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{p}{H}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|C| + \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \frac{p}{H}x$$

Platí $\ln(t+\sqrt{1+t^2}) = \operatorname{argsinh} t$. Odtud

$$\operatorname{argsinh} u = \frac{p}{H}x + C \quad\Longrightarrow\quad u = \sinh\left(\frac{p}{H}x + C\right),$$

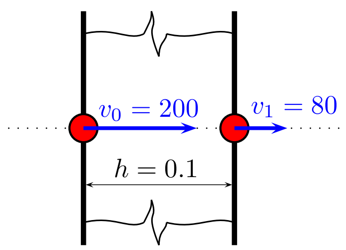
$$y = \int \sinh\left(\frac{p}{H}x + C\right)\,\mathrm{d}x = \frac{H}{p}\cosh\left(\frac{p}{H}x + C\right) + K\,.$$

Příklad 5.19. Střela vnikla do dřevěné desky rychlostí $v_0 = 200\,\mathrm{ms}^{-1}$ a vylétla z ní rychlostí $v_1 = 80\,\mathrm{ms}^{-1}$. Deska, jejíž tloušťka je $h = 0,1\,\mathrm{m}$, klade pronikající střele odpor, který je přímoúměrný druhé mocnině rychlosti střely. Určete čas t_1, za který střela proletí deskou.

Řešení. Situace je znázorněna na obr. 5.4. Na kulku působí proti jejímu pohybu odporová síla $F(t) = kv^2(t)$ (k je konstanta úměrnosti). Podle druhého Newtonova zákona platí

$$-kv^2 = mv' \quad\Longrightarrow\quad -Kv^2 = v'\,,\ \text{kde } K = \frac{k}{m}\,.$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, můžeme tedy psát



Obr. 5.4: Kulka prolétávající dřevěnou stěnou

$$-K\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{v^2}\,.$$

Po integraci dostaneme

$$-C - Kt = -\frac{1}{v} \quad\Longrightarrow\quad v = \frac{1}{C+Kt}\,,$$

kde C je integrační konstanta. Z počáteční podmínky $v(0) = 200$ plyne

$$200 = \frac{1}{C + K \cdot 0} \implies C = \frac{1}{200} = 0,005\,.$$

Z podmínky $v(t_1) = 80$ máme

$$80 = \frac{1}{0,005 + Kt_1} \implies K = \frac{0,0075}{t_1}\,.$$

Pro dráhu v čase t_1 platí $s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t$. Protože deska je silná $0,1$ m, dostáváme

$$0,1 = \int_0^{t_1} \frac{1}{0,005 + \frac{0,0075}{t_1}t}\,\mathrm{d}t = \frac{t_1}{0,0075}\left[\ln\left(0,005 + \frac{0,0075}{t_1}t\right)\right]_0^{t_1} = \frac{t_1}{0,0075}[\ln(0,0125) - \ln(0,005)]$$

$$0,1 = \frac{t_1}{0,0075}\ln 2,5 \implies t_1 = 0,0008185\,.$$

Příklad 5.20. (Ortogonální trajektorie). Uvažujme jednoparametrickou soustavu křivek v rovině tvaru

$$F(x, y, C) = 0, \tag{5.10}$$

kde C je parametr. *Ortogonální trajektorií* soustavy (5.10) nazveme každou křivku, která všechny křivky soustavy (5.10), které protíná, protíná pod pravým úhlem.

Určeme ortogonální trajektorie soustavy křivek

$$y = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R}\,. \tag{5.11}$$

Řešení. Soustavu (5.11) tvoří paraboly a osa x. Bodem (x_0, y_0), kde $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ prochází parabola $y = \big(y_0/(x_0)^2\big)x^2$. Tečna k této parabole sestrojená v bodě (x_0, y_0) má směrnici $2y_0/x_0$. Křivka $y = \varphi(x)$ procházející bodem (x_0, y_0) (tj. $y_0 = \varphi(x_0)$) protíná v tomto bodě uvažovanou parabolu pod pravým úhlem právě tehdy, když platí

$$2\frac{y_0}{x_0}\varphi'(x_0) = -1, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{2\varphi(x_0)\varphi'(x_0)}{x_0} = -1\,.$$

Má-li tedy křivka $y = \varphi(x)$ v každém svém bodě (x_0, y_0), kde $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, protínat parabolu soustavy (5.11), která tímto bodem prochází, pod pravým úhlem, musí být funkce φ řešením diferenciální rovnice

$$\frac{2yy'}{x} = -1, \qquad \text{tedy} \qquad y' = -\frac{x}{2y}\,.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, ale lze ji řešit i substitucí $u = y/x$. Oběma způsoby se snadno přesvědčíme, že obecné řešení této rovnice je dáno vztahem

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C^2, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^2}{2C^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1, \quad C \neq 0\,.$$

Soustavou ortogonálních trajektorií k dané soustavě (5.11) je tedy jednoparametrický systém elips, kde poměr velikosti hlavní a vedlejší poloosy činí $\sqrt{2}$ (viz obr. 5.5).

Výpočty jsme prováděli za předpokladu $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$; lze však snadno ověřit, že každá z uvažovaných elips protíná pod pravým úhlem také osu x. Ortogonální trajektorií soustavy (5.11) je také přímka $x = 0$, tj. osa y.

Podobnými úvahami (i když poněkud obecnějšími) lze ukázat, že při hledání ortogonálních trajektorií soustavy křivek (5.10) lze zvolit tento

Praktický postup:

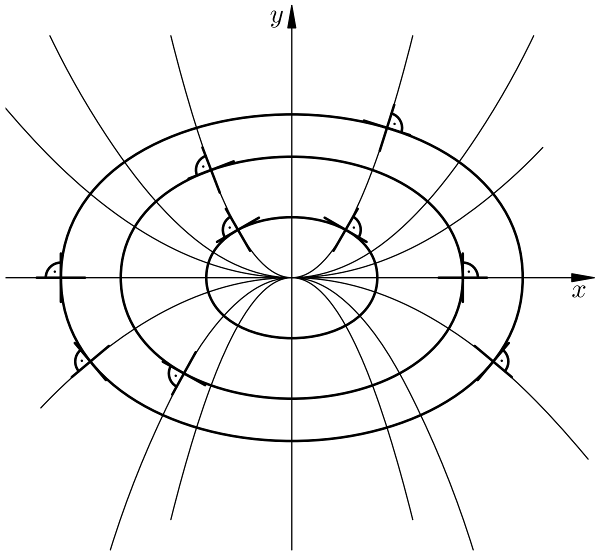
a) Vztah (5.10) zderivujeme podle x (proměnnou y zde chápeme jako funkci proměnné x) a z obou rovnic vyloučíme parametr C. Tím sestavíme ODR1 ve tvaru

$$y' = f(x, y),$$

jejímž obecným řešením je (5.10).

b) Soustavu ortogonálních trajektorií soustavy (5.10) pak tvoří obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}\,.$$



Obr. 5.5: Ortogonální trajektorie

C. Numerické metody řešení

Příklad 5.21. Je dán počáteční problém

$$y' = xy^2, \qquad y(0) = 1\,.$$

Řešení. Pomocí explicitní Eulerovy metody určete přibližně hodnotu $y(1/2)$.

Řešení: Z teoretického hlediska je třeba nejprve ukázat, že řešení úlohy na intervalu $\langle 0, 1/2\rangle$ vskutku existuje, a je určeno jednoznačně. K tomuto účelu lze užít Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení počátečního problému. Formulace tohoto tvrzení obvykle zahrnuje i odhad velikosti intervalu, na němž je (jednoznačně určené) řešení definováno. Bez bližšího odvození poznamenejme, že podle tohoto odhadu je hledané řešení definované alespoň v intervalu $\langle -1/2, 1/2\rangle$, což je pro náš účel dostačující.

Nyní přistoupíme k numerickému řešení. Zvolme nejprve $n = 5$, tj. $h = 0,1$ a

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,1, \quad x_2 = 0,2, \quad x_3 = 0,3, \quad x_4 = 0,4, \quad x_5 = 0,5.$$

Z počáteční podmínky máme $Y_0 = 1$ a dále počítáme

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_0 + hf(x_0, Y_0) = Y_0 + hx_0(Y_0)^2 = 1,\\
Y_2 &= Y_1 + hf(x_1, Y_1) = Y_1 + hx_1(Y_1)^2 = 1,0100,\\
Y_3 &= Y_2 + hf(x_2, Y_2) = Y_2 + hx_2(Y_2)^2 = 1,0304,\\
Y_4 &= Y_3 + hf(x_3, Y_3) = Y_3 + hx_3(Y_3)^2 = 1,0623,\\
Y_5 &= Y_4 + hf(x_4, Y_4) = Y_4 + hx_4(Y_4)^2 = 1,1074.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy $y(0,5) \approx 1,1074$.

Pro $n = 10$ je $h = 0,05$, a odtud analogickým postupem $y(0,5) \approx Y_{10} = 1,1243$. Přesným řešením daného počátečního problému je funkce $y = 2/(2 - x^2)$, a tudíž přesná hodnota $y(1/2) = 1,1429$. Při volbě kroku

$h = 0,1$ je absolutní chyba pro $x = 1/2$ rovna 0,0355 a relativní chyba je $3,1\%$. Při $h = 0,05$ se absolutní i relativní chyba zmenšily přibližně na polovinu, což odpovídá tomu, že explicitní Eulerova metoda je řádu 1.

Příklad 5.22. Je dán opět počáteční problém

$$y' = xy^2, \qquad y(0) = 1\,.$$

Pomocí metody prediktor - korektor, kde

$$\begin{aligned}&\text{P: } Y_{i+1}^* = Y_i + hf(x_i, Y_i),\\ &\text{K: } Y_{i+1} = Y_i + hf(x_{i+1}, Y_{i+1}^*)\end{aligned}$$

určeme přibližně hodnotu $y(1/2)$.

Řešení. Především si všimněme, že prediktor je explicitní Eulerova metoda a korektor implicitní Eulerova metoda. Zvolíme $h = 0,1$ a při obvyklém označení dostáváme:

$$\begin{aligned}
Y_1^* &= Y_0 + hx_0(Y_0^2) = 1, & Y_1 &= Y_0 + hx_1(Y_1^*)^2 = 1,0100,\\
Y_2^* &= Y_1 + hx_1(Y_1^2) = 1,0202, & Y_2 &= Y_1 + hx_2(Y_2^*)^2 = 1,0308,\\
Y_3^* &= Y_2 + hx_2(Y_2)^2 = 1,0521, & Y_3 &= Y_2 + hx_3(Y_3^*)^2 = 1,0640,\\
Y_4^* &= Y_3 + hx_3(Y_3)^2 = 1,0980, & Y_4 &= Y_3 + hx_4(Y_4^*)^2 = 1,1122,\\
Y_5^* &= Y_4 + hx_4(Y_4)^2 = 1,1617, & Y_5 &= Y_4 + hx_5(Y_5^*)^2 = 1,1797\,.
\end{aligned}$$