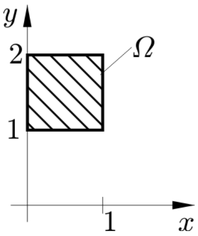
8. Dvojný integrál - Fubiniho věta

Příklad 8.1. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$.

Řešení. Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$. Viz Obrázek 8.1. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y,x).



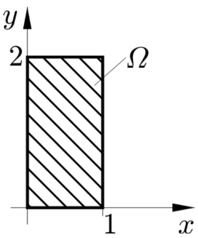
Obr. 8.1: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 (\int\limits_0^1 x^y \mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y+1|\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x,y), narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\mathrm{d}x$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

Příklad 8.2. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} x^2 y \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

Řešení. Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x,y).



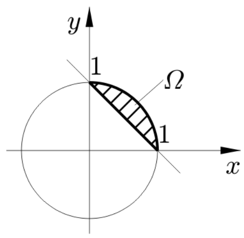
Obr. 8.2: $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x^2 y, & u'_y = x^2 \\ v'_y = \mathrm{e}^{xy}, & v = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy}\end{array}\right| = \int\limits_0^1 \left(\Big[xy\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 - x\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big[(xy-1)\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \,\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} - x\Big]_0^1 = 2.$$

Příklad 8.3. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2+y^2-1 \le 0, x+y-1 \ge 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 8.3. Oblast Ω je typu (x,y) i (y,x). Zvolme typ (x,y). Platí $\Omega = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.



Obr. 8.3: $\Omega : x^2+y^2-1 \le 0, x+y-1 \ge 0$

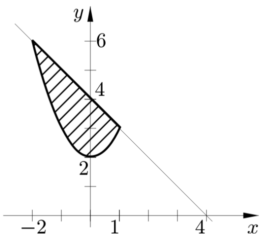
$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\tfrac{1}{3} xy^3 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \tfrac{x}{3} \left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{20}.$$

Zvolíme-li typ (y,x), pak $\Omega = \{[x,y]; 0 \le y \le 1, 1-y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint\limits_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (y^3 - y^4) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{20}.$$

Příklad 8.4. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 8.4. Popišme obor Ω jako oblast typu (x,y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x,y]; -2 \le x \le$ $\le 1, x^2 + 2 \le y \le 4 - x\}$.

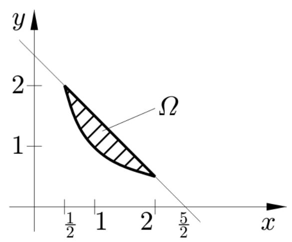


Obr. 8.4: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint\limits_{\Omega} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{1} \tfrac{1}{2} \left((4-x)^2 - (x^2+2)^2 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{81}{5}.$$

Příklad 8.5. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 8.5. Popišme obor Ω jako oblast typu (x,y). Krajní meze x-ové souřadnice oblasti získáme jako x-ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x\left(\frac{5}{2} - x\right) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Platí $\Omega = \left\{[x,y]; \frac{1}{2} \le x \le \le 2, \frac{1}{x} \le y \le \frac{5}{2} - x\right\}$.

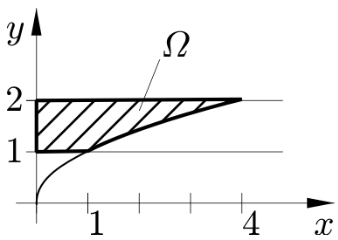


Obr. 8.5: $\Omega : xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$

$$\iint\limits_{\Omega} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\tfrac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x(\tfrac{5}{2} - x) - \tfrac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = \tfrac{165}{128} - \ln 2.$$

Příklad 8.6. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 8.6. Popišme obor Ω jako oblast typu (y,x). Platí $\Omega = \{[x,y]; 1 \le y \le 2, 0 \le y \le y^2\}$.

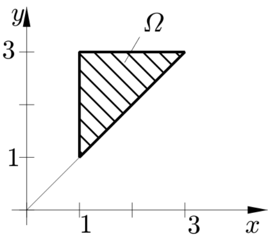


Obr. 8.6: $\Omega : x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \Big[y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \Big]_0^{y^2} \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 (y\mathrm{e}^y - y)\,\mathrm{d}y = \Big[y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \tfrac{1}{2}y^2 \Big]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \tfrac{3}{2}.$$

Příklad 8.7. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $1 \le x \le y \le 3$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen třemi přímkami. Viz Obrázek 8.7. Popišme obor Ω jako oblast obou typů. Pro typ (x, y) platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 3, x \le y \le 3\}$ a pro typ (y, x) platí $\Omega =$ $= \{[x, y]; 1 \le y \le 3, 1 \le x \le y\}$. Výpočet provedeme pro oba typy.



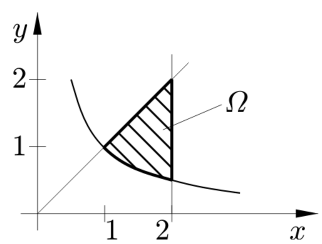
Obr. 8.7: $\Omega : 1 \le x \le y \le 3$

$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_x^3 \tfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \Big[-\tfrac{x}{y} \Big]_x^3 \mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(1 - \tfrac{x}{3}\right) \mathrm{d}x = \Big[x - \tfrac{x^2}{6} \Big]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_1^y \tfrac{x}{y^2}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \Big[\tfrac{x^2}{2y^2} \Big]_1^y \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \int\limits_1^3 \left(1 - \tfrac{1}{y^2}\right) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \Big[y + \tfrac{1}{y} \Big]_1^3 = \tfrac{2}{3}.$$

Příklad 8.8. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \dfrac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x = 2, y = x, xy = 1$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a hyperbolou. Viz Obrázek 8.8. Popišme obor Ω jako oblast typu (x, y). Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$.

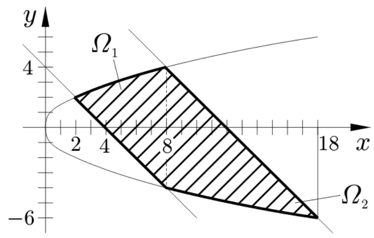


Obr. 8.8: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

$$\iint\limits_{\Omega} \tfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^x \tfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \Big[-\tfrac{x^2}{y} \Big]_{\frac{1}{x}}^x \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 \Big]_1^2 = \tfrac{9}{4}.$$

Příklad 8.9. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 8.9. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y). Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

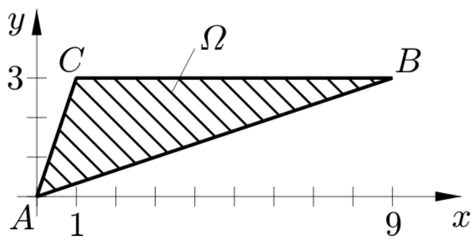


Obr. 8.9: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

$$\iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^8 \left(\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} \left(\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + x - 4)\mathrm{d}x + \int\limits_8^{18} (\sqrt{2x} -$$
$$- x + 12)\mathrm{d}x = \tfrac{74}{3} + \tfrac{122}{3} = 62.$$

Příklad 8.10. Spočtěte $\iint\limits_{\Omega} \sin y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení. Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 8.10. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x). Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integálu $\int \sin y^2 \, \mathrm{d}y$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.



Obr. 8.10: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\iint\limits_{\Omega} \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{\frac{y}{3}}^{3y} \cos y^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \Big[x \cos y^2 \Big]_{\frac{y}{3}}^{3y} \mathrm{d}y = \tfrac{4}{3} \int\limits_0^3 2y \cos y^2 \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} t = y^2 \\ 0 \to 0, 3 \to 9 \end{array} \right| =$$
$$= \tfrac{4}{3} \int\limits_0^9 \cos t dt = \tfrac{4}{3} \Big[\sin t \Big]_0^9 = \tfrac{4}{3} \sin 9.$$