6. Lokální extrémy

Vyšetřete lokální extrémy následujících funkcí více proměnných:

Příklad 6.1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x + 2y$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 2x + 2y + 5 = 0,$$
$$f'_y = 2x + 6y + 2 = 0.$$

Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbf{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je lineární, můžeme tedy použít metod lineární algebry.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right).$$

Nalezli jsme stacionární bod $a = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 2, f''_{yy} = 6.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium (viz učební text).
Platí $D_1(a) = 2 > 0$ a $D_2(a) = 8 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = \left[-\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right]$ lokální minimum funkce f.

Příklad 6.2. $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + x + y$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 2y - 6x + 1 = 0,$$
$$f'_y = 2x - 4y + 1 = 0.$$

Parciální derivace existují pro každé $[x, y] \in \mathbf{R}^2$ a proto jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava má jediné řešení $a =$
$= \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matici $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = -6, f''_{xy} = 2, f''_{yy} = \, = -4.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice $f''(a)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a) = -6 < 0$ a $D_2(a) = 20 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right]$ lokální maximum funkce f.

Příklad 6.3. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 6x^2 + y^2 + 10x = 0,$$

$$f'_y = 2xy + 2y = 0.$$

Jedinými kandidáty na lokální extrémy jsou stacionární body, které nalezneme vyřešením vzniklé soustavy rovnic. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $2y(x+1) = 0$. Odtud $x = -1 \vee y = 0$. Dosazením $x = -1$ do první rovnice dostáváme $6 + y^2 - 10 = 0$, odkud $y = \pm 2$. Dále dosazením $y = 0$ dostáváme $6x^2 + 10x = 0$, odkud $x = 0 \vee x = -\frac{5}{3}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1 = [0, 0], a_2 = [-\frac{5}{3}, 0], a_3 = [-1, 2], a_4 = [-1, -2]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i = 1, 2, 3, 4$. Platí

$$f''_{xx} = 12x + 10, f''_{xy} = 2y, f''_{yy} = 2x + 2.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad f''(a_3) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(a_4) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 10 > 0$, $D_2(a_1) = 20 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f.
Dále $D_1(a_2) = -10 < 0$, $D_2(a_2) = \frac{40}{3} > 0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f.
Dále platí $D_1(a_3) = -2 < 0$, $D_2(a_3) = -16 < 0$ a $D_1(a_4) = -2 < 0$, $D_2(a_4) = -12 < 0$.
Podle kritéria nenastává v bodě a_3 ani v bodě a_4 lokální extrém funkce f.

Příklad 6.4. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 3x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0,$$
$$f'_y = 2xy - 2x = 0.$$

Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Ze druhé rovnice plyne $x(y-1) = 0$. Odtud $x = 0 \vee y = 1$. Dosazením $x = 0$ do první rovnice dostáváme $y^2 - 2y - 5 = 0$, odkud $y = 1 \pm \sqrt{6}$. Dále dosazením $y = 1$ dostáváme $3x^2 - 6 = 0$, odkud $x = \pm\sqrt{2}$. Soustava má čtyři řešení. Nalezli jsme čtyři stacionární body $a_1 = [\sqrt{2}, 1], a_2 = [-\sqrt{2}, 1], a_3 = [0, 1 + \sqrt{6}], a_4 = [0, 1 - \sqrt{6}]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_i), i = 1, 2, 3, 4$. Platí

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = 2y - 2, f''_{yy} = 2x.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 2y - 2 \\ 2y - 2 & 2x \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad f''(a_2) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$
$$f''(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f''(a_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic $f''(a_i)$ a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 6\sqrt{2} > 0$, $D_2(a_1) = 24 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a_1 lokální minimum funkce f.
Dále $D_1(a_2) = -6\sqrt{2} < 0$, $D_2(a_2) = 24 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální maximum funkce f.
Dále platí $D_1(a_3) = 0$, $D_2(a_3) = -24 < 0$ a $D_1(a_4) = 0$, $D_2(a_4) = -24 < 0$.
Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodech a_3, a_4 dochází k lokálním extrémům funkce f.

Vyšetříme nejprve podrobně okolí bodu a_3. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y = 1 + \sqrt{6}$. Zřejmě platí $f\left(x, 1 + \sqrt{6}\right) = x^3 + \left(1 + \sqrt{6}\right)^2 x - 2x\left(1 + \sqrt{6}\right) - 5x = x^3$. Je-li $x > 0$, pak $f\left(x, 1 + \sqrt{6}\right) > 0$, Je-li $x < 0$, pak $f\left(x, 1 + \sqrt{6}\right) < 0$. Odtud plyne, že v bodě a_3 není lokální extrém. Podobně postupujeme v případě bodu a_4. Volme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $y = 1 - \sqrt{6}$. Zřejmě platí $f\left(x, 1 - \sqrt{6}\right) = x^3 + \left(1 - \sqrt{6}\right)^2 x - 2x\left(1 - \sqrt{6}\right) - 5x = x^3$. Je-li $x > 0$, pak $f\left(x, 1 - \sqrt{6}\right) > 0$, Je-li $x < 0$, pak $f\left(x, 1 - \sqrt{6}\right) < 0$. Odtud plyne, že ani v bodě a_4 není lokální extrém.

Příklad 6.5. $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1.$

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$f'_x = 6x^2 - 3y = 0,$$
$$f'_y = -3x + 6y^2 = 0.$$

Nalezneme stacionární body. Soustava je nelineární. Z první rovnice plyne $y = 2x^2$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $6(2x^2)^2 - 3x = 0$, odkud $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$. Soustava má dvě řešení. Nalezli jsme dva stacionární body $a_1 = [0,0], a_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 12x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 12y.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -9$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává extrém funkce f.
Dále $D_1(a_2) = 6 > 0$, $D_2(a_2) = 27 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s osou x, tj. přímkou $y = 0$. Zřejmě platí $f(x,0) = 2x^3 + 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x,0) > 1 = f(a_1)$. Je-li $x < 0$, pak $f(x,0) < 1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_2 není lokální extrém.

Příklad 6.6. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z.$

Řešení. Sestavíme soustavu rovnic

$$f'_x = 3x^2 - 3z = 0,$$
$$f'_y = 2y - 2 = 0,$$
$$f'_z = z - 3x + 2 = 0.$$

Ze druhé rovnice plyne $y = 1$. Ze třetí plyne $z = 3x - 2$. Dosazením do první rovnice dostáváme $3x^2 - 3(3x - 2) = 0$, odkud $x = 1 \vee x = 2$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [1,1,1], a_2 = [2,1,4]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 1, f''_{xy} = 0, f''_{xz} = -3, f''_{yz} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 6 > 0$, $D_2(a_1) = 12 > 0$, $D_3(a_1) = -6 < 0$. Podle kritéria nenastává v bodě a_1 lokální extrém funkce f.
Dále $D_1(a_2) = 12 > 0$, $D_2(a_2) = 24 > 0$, $D_3(a_2) = 6 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

Příklad 6.7. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Řešení. Spočteme parciální derivace a položíme je rovny nule. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 12y = 0, \\ f'_y &= 2y + 12x = 0, \\ f'_z &= 2z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Z třetí rovnice plyne $z = -1$. Ze druhé plyne $y = -6x$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x^2 - 24x = 0$, odkud $x = 0 \vee x = 24$. Soustava má dvě řešení $a_1 = [0, 0, -1], a_2 = [24, -144, -1]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice $f''(a_1)$ a $f''(a_2)$. Platí

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{zz} = 2, \quad f''_{xy} = 12, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení souřadnic stacionárních bodů dostáváme

$$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(a_2) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic a použijeme Sylvestrovo kritérium.
Platí $D_1(a_1) = 0$, $D_2(a_1) = -144 < 0$, $D_3(a_1) = -288 < 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout, zda v bodě a_1 nastává lokální extrém funkce f.
Dále $D_1(a_2) = 144 > 0$, $D_2(a_2) = 288 > 0$, $D_3(a_2) = 288 > 0$. V bodě a_2 nastává lokální minimum funkce f.

Nyní vyšetříme podrobně okolí bodu a_1. Zvolme podokolí, které je průnikem libovolného okolí s přímkou $x = x, y = 0, z = -1$. Zřejmě platí $f(x, 0, -1) = x^3 - 1$. Je-li $x > 0$, pak $f(x, 0, -1) > -1 = f(a_1)$, Je-li $x < 0$, pak $f(x, 0, -1) < -1 = f(a_1)$. Odtud plyne, že v bodě a_1 není lokální extrém.

Příklad 6.8. $f(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2\right)$.

Řešení. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$\begin{aligned} f'_x &= \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2} \left(x + y^2\right) + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2} + \frac{y^2}{2} + 1\right) = 0, \\ f'_y &= 2y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = 0$. Dosazením do první rovnice dostáváme $\frac{x}{2} + 1 = 0$. Odtud $x = -2$. Soustava má jediné řešení $a = [-2, 0]$.

Spočteme druhé parciální derivace a sestavíme matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2 + 4\right), f''_{xy} = y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, f''_{yy} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(x + y^2 + 4\right) & y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \\ y\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice.

Platí $D_1(a) = \frac{1}{2\mathrm{e}} > 0$, $D_2(a) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.

Příklad 6.9. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$f'_x = \frac{2x(1-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} = 0,$$
$$f'_y = \frac{2y(1-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} = 0.$$

Nalezneme stacionární body. Z první rovnice plyne $x = 0 \vee x^2+y^2 = 1$ a ze druhé rovnice plyne $y = 0 \vee x^2+y^2 = 1$. Nalezli jsme stacionární bod $a = [0,0]$ a body b na kružnici $x^2+y^2 = 1$.

Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}},$$
$$f''_{xy} = \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}},$$
$$f''_{yy} = \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2x^2)-4x^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} & \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} \\ \frac{-4xy(2-x^2-y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} & \frac{2(1-x^2-y^2)(1-2y^2)-4y^2}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} \end{pmatrix},$$
$$f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f''(b) = \begin{pmatrix} -\frac{4x^2}{\mathrm{e}} & -\frac{4xy}{\mathrm{e}} \\ -\frac{4xy}{\mathrm{e}} & -\frac{4y^2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matic.
Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 4 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.
$D_1(b) = -\frac{4x^2}{\mathrm{e}} > 0$, $D_2(b) = 0$. Podle kritéria nelze rozhodnout. Platí však $f(b) = \frac{1}{\mathrm{e}} \geq \frac{c}{\mathrm{e}^c}$ pro libovolné $c \geq 0$. Odtud plyne, že na $x^2+y^2 = 1$ nastává neostré maximum f.

Příklad 6.10. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$.

Řešení. Spočteme parciální derivace. Vznikne soustava

$$f'_x = \mathrm{e}^{2x}(2y^2+2x+4y+1) = 0,$$
$$f'_y = 2\mathrm{e}^{2x}(y+1) = 0.$$

Nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = -1$. Dosazením do první rovnice dostáváme $x = \frac{1}{2}$. Soustava má jediné řešení $a = \left[\frac{1}{2}, -1\right]$. Spočteme druhé parciální derivace a matice f'' a $f''(a)$. Platí

$$f''_{xx} = 4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1), f''_{xy} = 4\mathrm{e}^{2x}(y+1), f''_{yy} = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Odtud plyne, že

$$f'' = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1) & 4\mathrm{e}^{2x}(y+1) \\ 4\mathrm{e}^{2x}(y+1) & 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory matice.
Platí $D_1(a) = 2\mathrm{e} > 0$, $D_2(a) = 4\mathrm{e}^2 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě a lokální minimum funkce f.