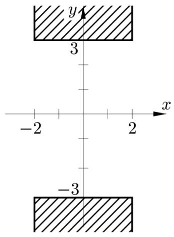
1. Definiční obor funkce dvou proměnných

Vyšetřete a v kartézském souřadném systému (O, x, y) zakreslete definiční obory následujících funkcí dvou proměnných:

Příklad 1.1. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$.

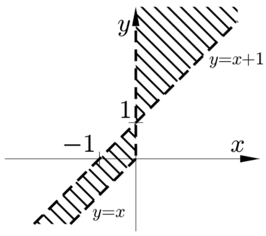
Řešení. $(4 - x^2 \geq 0) \wedge (y^2 - 9 \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 \leq 4) \wedge (y^2 \geq 9) \Leftrightarrow (|x| \leq 2) \wedge (|y| \geq 3) \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty)$. Tedy $Df = \langle -2, 2\rangle \times \big((-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty)\big)$. Viz Obr. 1.1.



Obr. 1.1: Df pro $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$

Příklad 1.2. $f(x, y) = \ln\big(x \ln(y - x)\big)$.

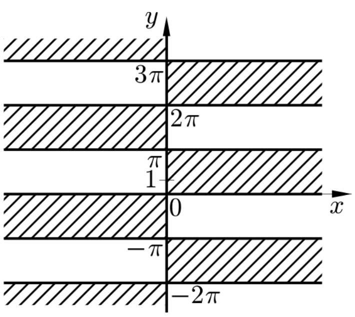
Řešení. $x \ln(y - x) > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge \ln(y - x) > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln(y - x) < 0) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y - x > 1) \vee$
$\vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1)$.
Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (x < 0 \wedge y < x + 1 \wedge y > x)\}$. Viz Obr. 1.2.



Obr. 1.2: Df pro $f(x, y) = \ln\big(x \ln(y - x)\big)$

Příklad 1.3. $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$.

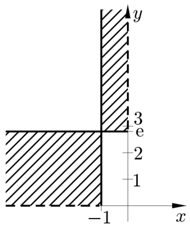
Řešení. $x \sin y \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge \sin y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \sin y \leq 0)$.
Tedy $Df = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x \geq 0 \wedge y \in \cup_{k=0}^{\infty} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle) \vee (x \leq 0 \wedge y \in \cup_{k=0}^{-\infty} \langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle)\}$. Viz Obr. 1.3.



Obr. 1.3: Df pro $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$

Příklad 1.4. $f(x,y)=\sqrt{(1-\ln y)\ln(-x)}$.

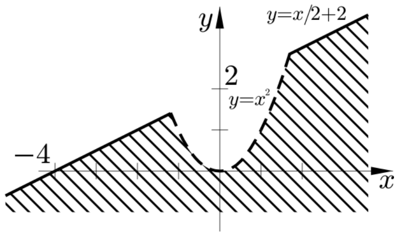
Řešení. $(1-\ln y)\ln(-x)\geq 0 \Leftrightarrow (1-\ln y\geq 0 \wedge \ln(-x)\geq 0)\vee(1-\ln y\leq 0\wedge \ln(-x)\leq 0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\ln y\leq 1\wedge x\leq -1)\vee(\ln y\geq 1\wedge 0>x\geq -1)$.
Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:(0<y\leq \mathrm{e}\wedge x\leq -1)\vee(y\geq \mathrm{e}\wedge -1\leq x<0)\}$. Viz Obr. 1.4.



Obr. 1.4: Df pro $f(x,y)=\sqrt{(1-\ln y)\ln(-x)}$

Příklad 1.5. $f(x,y)=\ln(x^2-y)+\sqrt{x-2y+4}$.

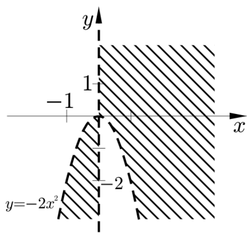
Řešení. $x^2-y>0\wedge x-2y+4\geq 0\Leftrightarrow y<x^2\wedge y\leq \frac{1}{2}x+2$.
Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:y<x^2\wedge y\leq\frac{1}{2}x+2\}$. Viz Obr. 1.5.



Obr. 1.5: Df pro $f(x,y)=\ln(x^2-y)+\sqrt{x-2y+4}$

Příklad 1.6. $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$.

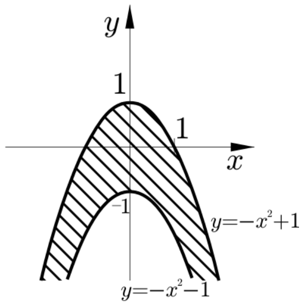
Řešení. $x+\frac{y}{2x}>0\Leftrightarrow\frac{2x^2+y}{2x}>0\Leftrightarrow(2x^2+y>0\wedge 2x>0)\vee(2x^2+y<0\wedge 2x<0)$. Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:(x>0\wedge y>-2x^2)\vee(x<0\wedge y<-2x^2)\}$. Viz Obr. 1.6.



Obr. 1.6: Df pro $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$

Příklad 1.7. $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

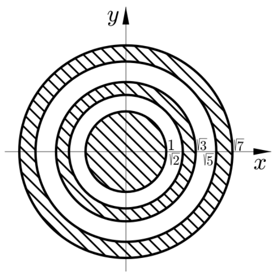
Řešení. $1-(x^2+y)^2\geq 0\Leftrightarrow(x^2+y)^2\leq 1\Leftrightarrow|x^2+y|\leq 1\Leftrightarrow(x^2+y\leq 0\wedge -x^2-y\leq 1)\vee(x^2+y\geq 0\wedge$
$\wedge\, x^2+y\leq 1)\Leftrightarrow 0\leq x^2+y\leq 1\vee -1\leq x^2+y\leq 0\Leftrightarrow -1-x^2\leq y\leq 1-x^2$.
Tedy $Df=\{[x,y]\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:-1-x^2\leq y\leq 1-x^2\}$. Viz Obr. 1.7.



Obr. 1.7: Df pro $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$

Příklad 1.8. $f(x,y) = \sqrt{\sin\big(\pi(x^2+y^2)\big)}$.

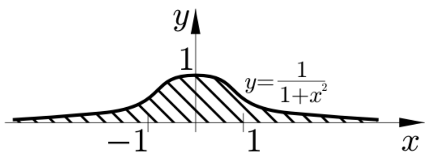
Řešení. $\sin\pi(x^2+y^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq \pi(x^2+y^2) \leq (2k+1)\pi, k \in Z \Leftrightarrow 2k \leq x^2+y^2 \leq 2k+1$, kde $k \in Z$.
Tedy $Df = \cup_{k=0}^{\infty}\{[x,y] \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : 2k \leq x^2+y^2 \leq 2k+1\}$. Viz Obr. 1.8.



Obr. 1.8: Df pro $f(x,y) = \sqrt{\sin\big(\pi(x^2+y^2)\big)}$

Příklad 1.9. $f(x,y) = \arcsin\big(2y(1+x^2)-1\big)$.

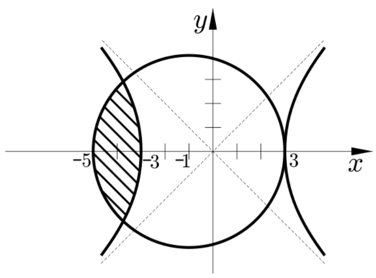
Řešení. $-1 \leq 2y(1+x^2)-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2y(1+x^2) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$.
Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$. Po vyšetření průběhu funkce $\frac{1}{1+x^2}$ již snadno nakreslíme definiční obor. Viz Obr. 1.9.



Obr. 1.9: Df pro $f(x,y) = \arcsin\big(2y(1+x^2)-1\big)$

Příklad 1.10. $f(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2-y^2-9}) + \operatorname{arctg}\sqrt{15-x^2-y^2-2x}$.

Řešení. $1+\sqrt{x^2-y^2-9} > 0 \wedge 15-x^2-y^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow x^2-y^2-9 \geq 0 \wedge x^2+y^2+2x \leq 15$.
Tedy $Df = \{[x,y] \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : x^2-y^2 \geq 9 \wedge (x+1)^2+y^2 \leq 16\}$. Viz Obr. 1.10.



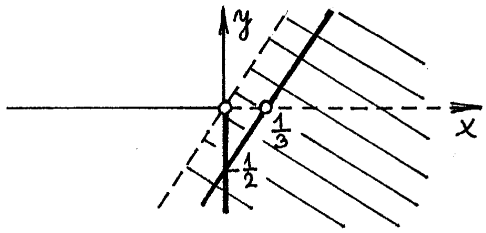
Obr. 1.10: Df pro $f(x,y) = \ln(1+\sqrt{x^2-y^2-9}) + \operatorname{arctg}\sqrt{15-x^2-y^2-2x}$

2. Grafy funkce dvou proměnných (metoda řezů)

Vyšetřete a nakreslete řezy následujících funkcí:

Příklad 2.1. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y)$ rovinou $z=0$.

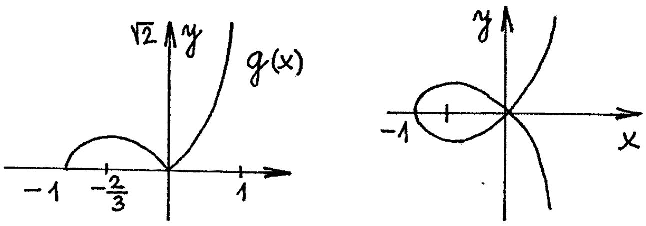
Řešení. Předně vyšetříme definiční obor. Platí $[x,y] \in Df \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge 3x-2y>0 \Leftrightarrow y \neq 0 \wedge y < \frac{3}{2}x$. Odtud plyne, že $Df = \{[x,y]; y < \frac{3}{2}x \wedge y \neq 0\}$. Viz Obrázek 2.1. Najít řez rovinou $z=0$ znamená řešit rovnici $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0$. Platí $\frac{x}{y} \cdot \ln(3x-2y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x-2y = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Odtud a z předchozího plyne, že řezem je otevřená polopřímka a přímka s výjimkou jednoho bodu. Viz Obrázek 2.1.



Obr. 2.1:

Příklad 2.2. $f(x,y) = x^3+x^2-y^2$ rovinou $z=0$.

Řešení. Definiční obor funkce $f(x,y) = x^3+x^2-y^2$ je celá rovina $\mathbf{R}^2$. Najít řez rovinou $z=0$ znamená vyřešit rovnici $x^3+x^2-y^2=0$. Platí $y^2 = x^3+x^2$ a odtud $y = \pm\sqrt{x^3+x^2}$. Odtud plyne, že hledaný řez je symetrický podle osy x. Vyšetříme průběh funkce $g(x) = \pm\sqrt{x^3+x^2}$. Předně $x \in Dg \Leftrightarrow x^2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Tedy $Dg = \langle -1, \infty)$. Určíme první derivaci $g'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{1}{2}\frac{x(3x+2)}{\sqrt{x^3+x^2}}$. Definiční obor derivace g' je $Dg' = (-1,\infty) - \{0\}$. Jediný nulový bod je $x = -\frac{2}{3}$. Dosazením vhodných bodů zjistíme signum g' na příslušných intervalech. Na $(-1,-\frac{2}{3})$ je g' kladná, na $(-\frac{2}{3},0)$ záporná a na $(0,\infty)$ kladná. Odtud plyne, že funkce g je na $(-1,-\frac{2}{3})$ rostoucí, na $(-\frac{2}{3},0)$ klesající a na $(0,\infty)$ rostoucí. V bodě $x = -\frac{2}{3}$ je maximum $g(-\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.38$ a v bodě $x=0$ je minimum $g(0)=0$. Druhá derivace po úpravě vychází $g''(x) = \frac{1}{4}\frac{x(3x+4)}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)}}$. Odtud plyne, že na intervalu $(-1,0)$ je funkce g konkávní a na $(0,\infty)$ konvexní. Bod $x=0$ není inflexní bod. Asymptoty funkce g nemá. Z těchto informací lze již nakreslit graf funkce g a tím i obrázek celého řezu. Viz Obrázek 2.2.

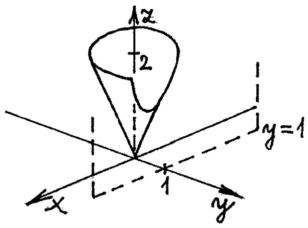


Obr. 2.2:

Pomocí metody řezů nakreslete grafy následujících funkcí dvou proměnných.

Příklad 2.3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

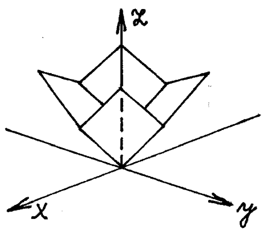
Řešení. Definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je celá rovina R^2 a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ kružnice $x^2 + y^2 = c^2$, pro $z = 0$ bod $[0, 0]$ a pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \sqrt{x^2 + c^2}$. Po umocnění dostáváme $z^2 - x^2 = c^2, z \geq 0$. Tedy řezy jsou pro $c \neq 0$ ramena rovnoosých hyperbol a pro $c = 0$ je řez $z = |x|$. Grafem funkce f je horní část kuželové plochy. Viz Obrázek 2.3. V grafu jsou znázorněny řezy rovinami $z = 2$ a $y = 1$.



Obr. 2.3:

Příklad 2.4. $f(x, y) = |x| + |y|$.

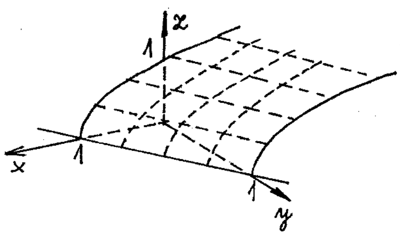
Řešení. Pro $f(x, y) = |x| + |y|$ platí, že $Df = R^2$ a $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny čtyřmi úsečkami $y = \pm x \pm c$, které tvoří hranici čtverce. Pro $z = 0$ je řez bod $[0, 0]$ a pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = |x| + c$. Viz Obrázek 2.4.



Obr. 2.4:

Příklad 2.5. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)}$.

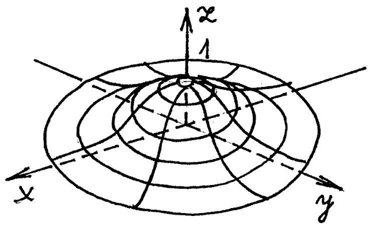
Řešení. Pro $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)}$ platí, že $[x, y] \in Df \Leftrightarrow 1 - (x + y) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$. Tedy $Df = \{[x, y], y \leq 1 - x\}$. Zřejmě $Hf = \langle 0, \infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z \geq 0$ přímky $y = 1 - x - c^2$. Pro $c < 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $x = 1 - z^2 - c$, $z \geq 0$. Tyto řezy jsou poloviny parabol. Graf funkce f je na Obrázku 2.5.



Obr. 2.5:

Příklad 2.6. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

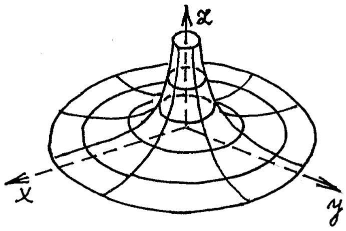
Řešení. Pro $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je $Df = R^2$ a $Hf = \langle 0,1\rangle$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny kružnicemi $x^2 + y^2 = \ln \frac{1}{c}$. Pro $z = 1$ je řez bod $[0,0]$ a pro $c \le 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \mathrm{e}^{-x^2-c^2}$. Jedná se o křivky, jejichž průběh je třeba vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ okolo osy z. Viz Obrázek 2.6.



Obr. 2.6:

Příklad 2.7. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení. Pro $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je $Df = R^2 - \{[0,0]\}$ a $Hf = (0,\infty)$. Řezy rovinami $z = c$ jsou pro $z > 0$ tvořeny kružnicemi $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$. Pro $c \le 0$ jsou řezy prázdné množiny. Řezy rovinami $y = c$ jsou tvaru $z = \frac{1}{x^2+c^2}$. Průběh těchto křivek je zapotřebí vyšetřit zvlášť. Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $y = \frac{1}{x^2}$ okolo osy z. Viz Obrázek 2.7.

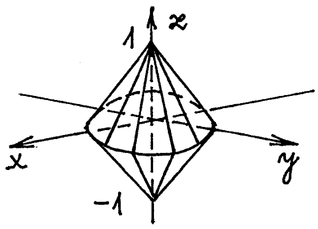


Obr. 2.7:

Vyšetřete a v kartézském souřadnicovém systému (O,x,y,z) zakreslete definiční obory následujících funkcí tří proměnných.

Příklad 2.8. $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$

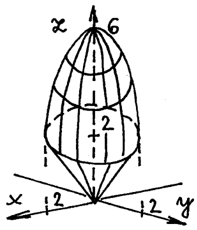
Řešení. Pro $f(x,y,z) = \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}-z} + \sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}+z}$ platí $[x,y,z] \in Df \Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2+y^2}-z \ge 0 \wedge 1-\sqrt{x^2+y^2}+z \ge 0 \Leftrightarrow z \le 1-\sqrt{x^2+y^2} \wedge z \ge \sqrt{x^2+y^2}-1$. $Df = \{[x,y,z] : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}-1 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$. Definiční obor je těleso ohraničené dvěma kuželovými plochami. Viz Obrázek 2.8.



Obr. 2.8:

Příklad 2.9. $f(x,y,z)=\sqrt{z-\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$.

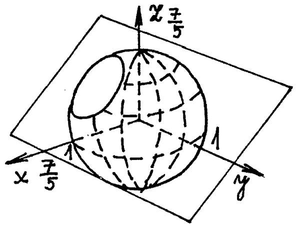
Řešení. Pro $f(x,y,z)=\sqrt{z-\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{6-(x^2+y^2+z)}$ platí $[x,y,z]\in Df \Leftrightarrow z-\sqrt{x^2+y^2}\geq 0\wedge 6-(x^2+y^2+z)\geq 0 \Leftrightarrow z\leq\sqrt{x^2+y^2}\wedge z\leq 6-(x^2+y^2)$. $Df=\{[x,y,z],-2\leq x\leq 2,-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2},\sqrt{x^2+y^2}\leq z\ \leq 6-(x^2+y^2)\}$. Definiční obor je těleso ohraničené shora paraboloidem a zdola kuželovou plochou. Průnik paraboloidu a kuželové plochy je kružnice $x^2+y^2=4$. Viz Obrázek 2.9.



Obr. 2.9:

Příklad 2.10. $f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}+\sqrt{7/5-(x+z)}$.

Řešení. Pro $f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}+\sqrt{7/5-(x+z)}$ platí $[x,y,z]\in Df \Leftrightarrow 1-(x^2+y^2+z^2)\geq 0\wedge\frac{7}{5}-(x+z)\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1\wedge z\leq\frac{7}{5}-x$. Definiční obor je koule o poloměru 1 se středem v počátku, ze které je rovinou odříznuta její část. Viz Obrázek 2.10.



Obr. 2.10: