PŘÍKLADY K MATEMATICE 3

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Křivkové integrály

1.1. Křivkový integrál prvního druhu.

Příklad 1.1. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je úsečka* AB*,* $A=(0,-2)$*,* $B=(4,0)$*.*

Řešení: Úsečka AB je hladká křivka. Funkce

$$\boldsymbol{\psi}(t)=(4t,-2+2t),\quad t\in\langle 0,1\rangle,$$

je parametrizace křivky C. Protože

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

je potom

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\mathrm{d}s}{x-y} &= \int_0^1 \frac{1}{4t-(-2+2t)}\sqrt{4^2+2^2}\,\mathrm{d}t=\\ &= \sqrt{5}\int_0^1\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{5}\,[\ln|t+1|]_0^1=\sqrt{5}\ln 2.\end{aligned}$$

Příklad 1.2. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je obvod trojúhelníku* ABC*,* $A=(0,1)$*,* $B=(2,1)$*,* $C=(0,3)$*.*

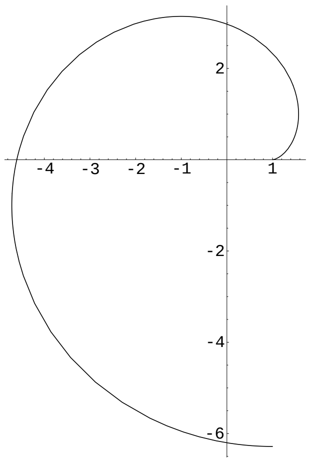
Řešení: C není hladká křivka, ale vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek C_1,C_2,C_3 (stran trojúhelníku ABC), kde

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad x=0+2t,\quad y=1+0\cdot t,\quad t\in\langle 0,1\rangle,\\ C_2 &: \quad x=2-2t,\quad y=1+2t,\quad t\in\langle 0,1\rangle,\\ C_3 &: \quad x=0+0\cdot t,\quad y=1+2t,\quad t\in\langle 0,1\rangle.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1(2t+1)2\,\mathrm{d}t+\int_0^1((2-2t)+(1+2t))\sqrt{8}\,\mathrm{d}t+\\ &+\int_0^1(2t+1)2\,\mathrm{d}t=8+3\sqrt{8}.\end{aligned}$$

Příklad 1.3. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$*, kde* C *je graf funkce* $f(x)=\ln x$*,* $x\in\langle 1,2\rangle$*.*



Obr. 1

Řešení: Položíme-li $x = t$, potom $y = \ln t$ je $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, \ln t)$, $t \in \langle 1, 2\rangle$ parametrizace křivky C. Potom

$$\int_C x^2 \, \mathrm{d}s = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \, \mathrm{d}t = \int\limits_1^2 t\sqrt{t^2+1} \, \mathrm{d}t.$$

Označíme-li $u = t^2 + 1$ a dále $\mathrm{d}u = 2t \, \mathrm{d}t$ dostaneme

$$\int_1^2 t\sqrt{t^2+1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Příklad 1.4. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x^2+y^2) \, \mathrm{d}s$, *kde* C *je křivka (Obr.1 pro* $a = 1$*) s parametrizací*

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t)), \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad (a > 0).$$

Řešení: Předně je

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = (at\cos t, at\sin t) \ \text{ a } \ \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(at)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = at.$$

Potom

$$\int_C (x^2+y^2) \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2 \left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right) at \, \mathrm{d}t = 2a^3\pi^2(1+2\pi^2).$$

Příklad 1.5. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C \left(2\sqrt{x^2+y^2} - z\right) \mathrm{d}s$, *kde* C *je křivka (jeden „závit“ kuželové šroubovice) s parametrizací*

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t\cos t, t\sin t, t), \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Řešení: Opět nejříve vypočítáme

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1) \ \text{ a } \ \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{2+t^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\int_C \left(2\sqrt{x^2+y^2}-z\right) \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}-t\right)\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+4\pi^2)^3}-2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

V příkladech 1.6 – 1.15 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C.

Příklad 1.6. $\int_C \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, *kde C je úsečka s krajními body* $(1,-1)$, $(4,0)$.
Výsledek: $\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)$.

Příklad 1.7. $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, *kde C je obvod obdélníku určeného přímkami* $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=2$. ***Výsledek:*** 24

Příklad 1.8. $\int_C \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}s$, *kde C je část paraboly* $y^2=2x$, $y\in\langle\sqrt{2},2\rangle$.
Výsledek: $(25\sqrt{5}-6\sqrt{3})/30$

Příklad 1.9. $\int_C x^2y\,\mathrm{d}s$, *kde C je oblouk kružnice* $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ *s koncovými body* $(a,0)$, $(0,a)$. ***Výsledek:*** $a^4/3$

Příklad 1.10. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, *kde C je kružnice* $x^2+y^2-ax=0$ $(a>0)$.
Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.11. $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, *kde C je lemniskáta* $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.
Výsledek: $2a^2(2-\sqrt{2})$

Příklad 1.12. $\int_C \sqrt{2y}\,\mathrm{d}s$, *kde C část cykloidy s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ $(a>0)$. ***Výsledek:*** $4\pi a^{3/2}$

Příklad 1.13. $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, *kde C je šroubovice* $\boldsymbol{\psi}(t)=(\cos t,\sin t,t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$.
Výsledek: $8\pi^3\sqrt{2}/3$

Příklad 1.14. $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, *kde C je průniková křivka ploch* $x^2+y^2+z^2=1$, $x-z=0$. ***Výsledek:*** $\pi/2$

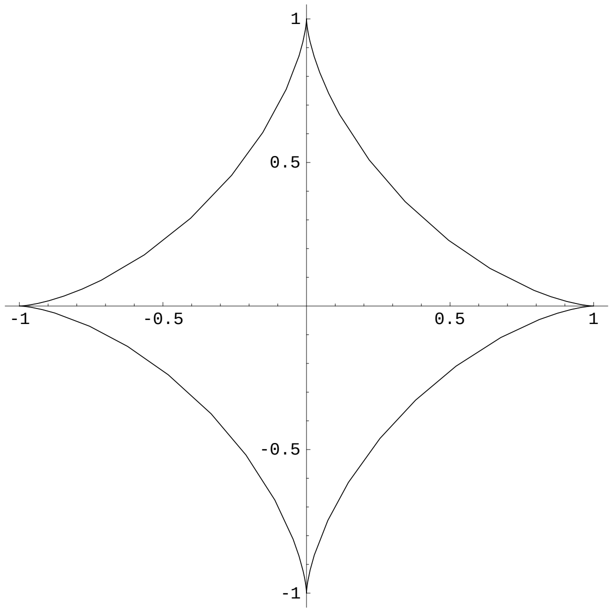
Příklad 1.15. $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, *kde C je část kružnice* $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$ $(a>0)$, *ležící v prvním oktantu.* ***Výsledek:*** $\sqrt{2}a^2$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

Geometrické aplikace

(I) Nechť C je jednoduchá křivka. Potom délka této křivky je dána vztahem

$$\int_C \mathrm{d}s. \tag{1}$$



Obr. 2

(II) Nechť C je jednoduchá rovinná křivka (v rovině xy), f je spojitá funkce dvou proměnných nezáporná v bodech křivky C a

$$\kappa = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}$$

je válcová plocha (určená řídicí křivkou C s přímkami rovnoběžnými s osou z, zdola omezená křivkou C a shora průnikem grafu funkce $z = f(x, y)$ a plochy κ). Potom pro obsah S válcové plochy κ platí

$$S = \int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

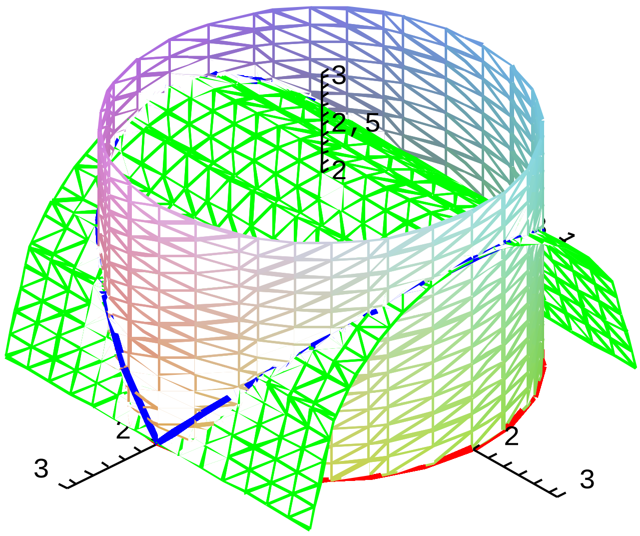
Příklad 1.16. *Vypočítejme délku asteroidy C jejíž parametrizace je* $\boldsymbol{\psi}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení: Asteroida není hladká křivka, neboť v bodech $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$, $(0, -a)$ k ní neexistuje tečný vektor. Platí totiž

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = (-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t),$$

a např. pro $t = 0$ je $\boldsymbol{\psi}(0) = (a, 0)$ a $\boldsymbol{\psi}'(0) = (0, 0)$, tj. v bodě $(a, 0)$ neexistuje tečný vektor. Analogicky je tomu i v ostatních uvedených bodech. V těchto bodech jsou na křivce body vratu (Obr. 2 pro $a = 1$).

Křivku C tedy budeme uvažovat jako spojení čtyř jednoduchých křivek, které na sebe navazují. Protože funkce $F(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2}$ je sudá v proměnné x i v proměnné y, je zřejmé, že křivka C je souměrná podle osy y i podle osy x a k výpočtu její délky stačí vypočítat pouze délku její části C_1 ležící v první kvadrantu a její délku pak násobit čtyřmi.



Obr. 3

Nejdříve určíme

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \cos t \sin t.$$

Odtud

$$\int_C \mathrm{d}s = 4\int_{C_1} \mathrm{d}s = 4\int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t \,\mathrm{d}t = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

Příklad 1.17. *Vypočítejme obsah válcové plochy (Obr.3)*

$$\kappa = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

Řešení:

Podle (2) je obsah válcové plochy roven číslu

$$\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s,$$

kde C je její řídicí křivka a plocha je zdola omezena rovinou $z = 0$ a shora grafem funkce $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$.

Křivka C (kružnice) je parametrizována funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom $\boldsymbol{\psi}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ a odtud

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 4\cos^2 t}\, 2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + 4\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t)\,\mathrm{d}t = 4\left([-\cos t]_0^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{2\pi}\right) = 16.\end{aligned}$$

Příklad 1.18. *Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, jejímiž krajními body jsou $(0,0,0)$, $(3,3,2)$.* ***Výsledek:*** 5

Příklad 1.19. *Vypočítejte délku křivky C s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.* ***Výsledek:*** $\sqrt{3}(\mathrm{e}-1)$

V příkladech 1.20 – 1.27 vypočítejte obsahy daných válcových ploch.

Příklad 1.20. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \wedge 0 \le z \le \sqrt{\frac{9x^2}{4} + \frac{4y^2}{9}}\right\}$.
Výsledek: 13π

Příklad 1.21. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \wedge 0 \le z \le \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}}\right\}$.
Výsledek: 5π

Příklad 1.22. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{2}x^2 \wedge 0 \le z \le x + \sqrt{2y} \wedge x \in \langle 0,1\rangle\right\}$.
Výsledek: $2(2\sqrt{2}-1)/3$

Příklad 1.23. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{3}x^3 \wedge 0 \le z \le x^3 + 3y \wedge x \in \langle 0,1\rangle\right\}$.
Výsledek: $(2\sqrt{2}-1)/3$

Příklad 1.24. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2\sqrt{x} \wedge 0 \le z \le \frac{y}{x+1} \wedge x \in \langle 0,3\rangle\right\}$.
Výsledek: 4

Příklad 1.25. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{2y} \wedge 0 \le z \le \frac{x}{2y+1} \wedge y \in \langle 0,4\rangle\right\}$.
Výsledek: 2

Příklad 1.26. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \ln x \wedge 0 \le z \le \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \wedge x \in \langle 1,\mathrm{e}\rangle\right\}$.
Výsledek: $1/2$

Příklad 1.27. $\kappa = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sin x \wedge 0 \le z \le \frac{y\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+1}} \wedge x \in \langle 0,\pi/2\rangle\right\}$.
Výsledek: $1/2$

Fyzikální aplikace

Nechť C je jednoduchá hmotná křivka, jejíž hustota v každém jejím bodě (x,y,z) je $h(x,y,z)$.

(I) Hmotnost m této křivky je

$$m = \int_C h(x,y,z)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

(II) Statický moment této křivky vzhledem k rovině xy, resp. vzhledem k rovině xz, resp. vzhledem k rovině yz je

$$S_{xy} = \int_C zh(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ S_{xz} = \int_C yh(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ S_{yz} = \int_C xh(x,y,z)\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

(III) Souřadnice těžiště této křivky (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

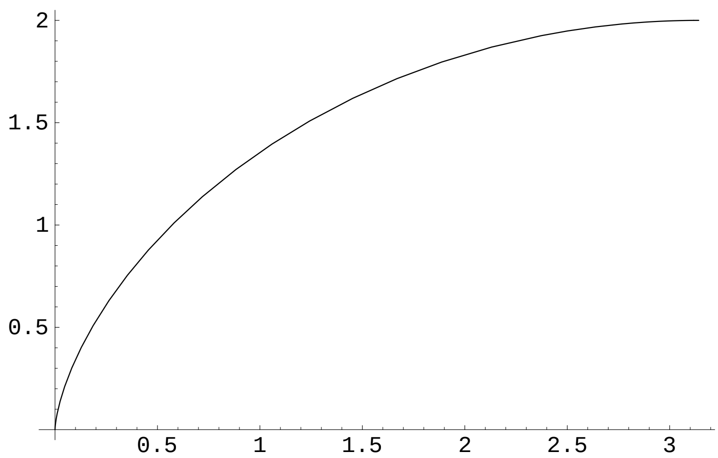
$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad z_T = \frac{S_{xy}}{m}. \tag{5}$$

(IV) Moment setrvačnosti této křivky vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y, resp. vzhledem k ose z je

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) h(x,y,z)\,\mathrm{d}s\ ,$$
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) h(x,y,z)\,\mathrm{d}s\ ,$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) h(x,y,z)\,\mathrm{d}s\ . \tag{6}$$

V případě rovinné křivky platí všechny uvedené vztahy s tím, že $z = 0$.

Příklad 1.28. *Vypočítejme souřadnice těžiště homogenní křivky, jejíž parametrizace je $\boldsymbol{\psi}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ (část cykloidy, Obr.4).*



Obr. 4

Řešení: Podobně jako u ploch a těles budeme i u homogenních křivek předpokládat, že hustota v každém bodě křivky je 1. Souřadnice těžiště jsou na této konstantě nezávislé.

Je

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \ \text{ a } \ \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2\sin\frac{t}{2}.$$

Potom

$$m = \int_C \mathrm{d}s = \int_0^\pi 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4.$$

Dále

$$\begin{aligned} S_x &= \int_C y\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi} \frac{1-\cos t}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^1\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(při výpočtu integrálu volíme substituci $u = \cos\frac{t}{2}$) a

$$S_y = \int_C x\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} 2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{16}{3}.$$

(První integrál počítáme metodou per partes, ve druhém po úpravě $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$ volíme substituci $u = \sin\frac{t}{2}$.)

Je tedy

$$x_t = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{3}, \qquad y_t = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 1.29. *Vypočítejte hmotnost části elipsy $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, jestliže její hustota je v každém bodě $h(x, y) = xy$.* ***Výsledek:*** $38/5$

Příklad 1.30. *Vypočítejte hmotnost jednoho závitu šroubovice s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0, b > 0)$, jestliže její hustota v každém bodě je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od počátku, tj. $h(x, y, z) = r^2$.*
Výsledek: $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)/3$

Příklad 1.31. *Vypočítejte hmotnost křivky C s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (1, t, t^2/2)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, jestliže její hustota v každém bodě je $h(x, y, z) = \sqrt{2z}$.*
Výsledek: $(2\sqrt{2}-1)/3$

Příklad 1.32. *Vypočítejte hmotnost drátu, který má tvar kružnice $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x + z = 0$, je-li jeho hustota $h(x, y, z) = x^2$.* ***Výsledek:*** $\pi/2$

Příklad 1.33. *Najděte souřadnice těžiště homogenního oblouku cykloidy s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $(a > 0)$.*
Výsledek: $(a\pi, 4a/3)$

Příklad 1.34. *Najděte souřadnice těžiště homogenního obvodu sférického trojúhelníku $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ $(a > 0)$.*
Výsledek: $(4a/(3\pi), 4a/(3\pi), 4a/(3\pi))$

Příklad 1.35. *Drát má tvar kružnice $x^2+y^2 = a^2$ $(a > 0)$. Vypočítejte jeho moment setrvačnosti vzhledem k jeho průměru, je-li jeho hustota $h(x, y) = |x|+|y|$.*
Výsledek: $4a^3$

Příklad 1.36. *Vypočítejte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám jednoho závitu homogenní šroubovice s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.*
Výsledek: $I_x = I_y = \sqrt{5}\pi(1+32\pi/3)$, $I_z = 2\sqrt{5}\pi$

1.2. **Křivkový integrál druhého druhu.**

Příklad 1.37. *Nechť* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ *je vektorové pole a* C *kladně orientovaná hladká křivka s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. *Vypočítejme křivkový integrál druhého druhu* $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$.

Řešení: Připomeňme si nejdříve několik skutečností, které při výpočtu integrálu použijeme.

Je-li $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ vektorové pole, C hladká orientovaná křivka s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$ ($\mathbf{T}$ je její tečný vektor), potom

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\ . \tag{7}$$

Užitím věty o substituci dostaneme

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s &= \int_C (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \\ &+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)))\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{8}$$

Připomeňme ještě, že v případě rovinného vektorového pole (7) i (8) platí, s tím, že R a z jsou nulové.

Nyní se vrátíme k našemu příkladu. Protože $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, budeme podle (7) počítat integrál

$$\int_C (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z,$$

a protože

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2, t^3) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t, 3t^2),$$

je podle (8)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(t^4 - t^6 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

Příklad 1.38. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je parabola* $y = x^2$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ *s počátečním bodem* $(-1,1)$ *a koncovým bodem* $(1,1)$.

Řešení: Křivkový integrál je zadán ve tvaru (7) a $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ je rovinné vektorové pole. Označíme-li $x(t) = t$ a $y(t) = t^2$ je $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, t^2)$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ parametrizací křivky C. Protože $(-1,1)$ je počátečním bodem a $(1,1)$ koncovým bodem křivky, je křivka při zvolené parametrizaci orientována kladně (je orientována ve směru rostoucího parametru). Dále $\boldsymbol{\psi}'(t) = (1, 2t)$ a podle (8)

$$\int_C \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}x + \left(y^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3)\cdot 2t\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{14}{15}.$$

Příklad 1.39. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int\limits_C (2-y)\,\mathrm{d}x + (1+x)\,\mathrm{d}y$*, kde* C *je obvod trojúhelníku s vrcholy* $(0,0)$*,* $(1,1)$*,* $(0,2)$ *a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.*

Řešení: Křivka C není hladká. Vznikne spojením tří na sebe navazujících křivek (úseček – stran trojúhelníka) C_1, C_2 a C_3 s parametrizacemi

$$\begin{aligned} &C_1: && \boldsymbol{\psi}(t) = (t,t), && t \in \langle 0,1\rangle, && \text{kladně orientovaná,}\\ &C_2: && \boldsymbol{\psi}(t) = (t,2-t), && t \in \langle 0,1\rangle, && \text{záporně orientovaná,}\\ &C_1: && \boldsymbol{\psi}(t) = (0,t), && t \in \langle 0,2\rangle, && \text{záporně orientovaná.} \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (2-y)\,\mathrm{d}x+(1+x)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (2-t+1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (2-2+t-1-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 (1)\,\mathrm{d}t = 2.$$

V příkladech 1.40 – 1.47 vypočítejte křivkové integrály podél křivky C.

Příklad 1.40. $\int_C y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$*, kde* C *je čtvrtkružnice* $x^2+y^2=a^2$*,* $x \geq 0$*,* $y \geq 0$ *(*$a>0$*) s počátečním bodem* $(a,0)$ *a koncovým bodem* $(0,a)$*.* ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.41. $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$*, kde* C *je křivka* $y = 1-|1-x|$*,* $x \in \langle 0,2\rangle$ *s počátečním bodem* $(0,0)$*.* ***Výsledek:*** $4/3$

Příklad 1.42. $\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$*, kde křivka* C *je obvod obdelníku s vrcholy* $(2,2)$*,* $(5,2)$*,* $(5,4)$*,* $(2,4)$ *orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů.*
Výsledek: 42

Příklad 1.43. $\int_C \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$*, kde křivka* C *je část hyperboly* $xy=1$ *s počátečním bodem* $(3,1/3)$ *a koncovým bodem* $(1/2,2)$*.* ***Výsledek:*** $\ln 6 - 5/3$

Příklad 1.44. $\int_C (2y-6xy^3)\,\mathrm{d}x + (2x-9x^2y^2)\,\mathrm{d}y$*, kde*
a) C *je parabola* $y=x^2$ *s počátečním bodem* $(0,0)$ *a koncovým bodem* $(1,1)$*,*
b) C *je úsečka s počátečním bodem* $(0,0)$ *a koncovým bodem* $(1,1)$*.*
Výsledek: *a)* -1*, b)* -1

Příklad 1.45. $\int_C yz\,\mathrm{d}x + z\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y + yx\,\mathrm{d}z$*, kde* C *křivka s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$*,* $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ *(*$a>0, b>0$*) s počátečním bodem* $(a,0,0)$ *a koncovým bodem* $(a,0,2\pi b)$*.*
Výsledek: $-\pi^2a^2b$

Příklad 1.46. $\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}x$*, kde křivka* C *je obvod trojúhelníku s vrcholy* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$ *orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů.*
Výsledek: 0

Příklad 1.47. $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$*, kde* C *je průniková křivka ploch* $z=xy$ *a* $x^2+y^2=1$ *orientovaná souhlasně s pořadím bodů* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$*,* $(-1,0,0)$*.*
Výsledek: $-\pi$

Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

Fyzikální aplikace

Příklad 1.48. *Vypočítejme práci silového pole* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$*, kterou vykoná posunutím hmotného břemene z bodu* $(-1,0,\mathrm{e}^{\pi})$ *do bodu* $(1,0,1)$ *podél křivky* C *s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t) = (\cos t, \sin t, \mathrm{e}^t)$*.*

Řešení: Připomeňme, že práce W silového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C je

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \tag{9}$$

Křivka C je parametrizována funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (\cos t, \sin t, \mathrm{e}^t)$ a je $\boldsymbol{\psi}(0) = (1,0,1)$ a $\boldsymbol{\psi}(\pi) = (-1,0,\mathrm{e}^{\pi})$. Protože C je parametrizována spojitou funkcí, je $t \in \langle 0,\pi\rangle$. Po křivce však postupujeme proti rostoucímu parametru, tj. křivka je orientována záporně, a to znamená, že u počítaného křivkového integrálu musíme změnit znaménko. Pro práci silového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C tedy dostáváme

$$W = -\int_0^{\pi} \left(-\sin^2 t + \mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\cos t\right)\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 1.49. *Vypočítejme tok rovinného vektorového pole* $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2, -2xy)$ *uzavřenou kladně orientovanou křivkou* C *(kružnicí)* $x^2+y^2 = 2x$*.*

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladu nejdříve připomeňme, že tok rovinného vektorového pole $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ uzavřenou kladně orientovanou křivkou C je ($\mathbf{n}$ je vnější normála křivky)

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

(Symbolem $\oint$ zdůrazňujeme, že počítáme křivkový integrál přes uzavřenou křivku.)

Pro nalezení toku vektorového pole křivkou C budeme tedy počítat

$$\oint_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \oint_C 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

Kružnici $x^2+y^2 = 2x$ můžeme parametrizovat funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (1+\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(2(1+\cos t)\sin t(-\sin t) + 2(1+\cos t)\cos t\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Příklad 1.50. *Vypočítejme cirkulaci rovinného vektorového pole* $\mathbf{F}(x,y) = (x^2-y^2, xy)$*, podél uzavřené kladně orientované hranice půlkruhu* $x^2+y^2 \le 2x$*,* $y \ge 0$*.*

Řešení: Cirkulace vektorového pole $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ podél uzavřené kladně orientované křivky C je dána křivkovým integrálem

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

V našem případě hranice půlkruhu není hladká křivka. Vznikne však spojením dvou na sebe navazujících křivek C_1, tj. půlkružnice $x^2 + y^2 = 2x$, $y \geq 0$, a C_2, tj. úsečky spojující body $(0,0)$ a $(2,0)$. Je tedy

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s$$

Křivku C_1 budeme parametrizovat funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 1, \pi \rangle$ a křivku C_2 funkcí $\boldsymbol{\psi}(t) = (t, 0)$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$, přičemž obě křivky jsou orientovány shodně s rostoucím parametrem, tedy kladně. Potom

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} (\sin^2 t - \cos t - 1) \sin t \, \mathrm{d}t + \int_0^2 t^2 \, \mathrm{d}t = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2.$$

Příklad 1.51. *Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole* $\mathbf{F}(x,y) = (0, x^2)$ *podél křivky* $y^2 = 1 - x$ *s počátečním bodem* $(0,1)$ *a koncovým bodem* $(1,0)$.
Výsledek: $-8/15$

Příklad 1.52. *Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole* $\mathbf{F}(x,y) = (x+y, 2x)$ *podél kladně orientované kružnice* $x^2 + y^2 = a^2$ *(*$a > 0$*).* ***Výsledek:*** πa^2

Příklad 1.53. *Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ *podél lomené čáry spojující body* $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ *orientované souhlasně s uvedeným pořadím bodů.* ***Výsledek:*** $3/2$

Příklad 1.54. *Na hmotný bod, který se pohybuje po elipse* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *(*$a > 0, b > 0$*) z bodu* $(a,0)$ *do bodu* $(0,b)$ *působí síla, jejíž velikost je rovna vzdálenosti bodu od středu elipsy, a která směřuje do středu této elipsy. Vypočítejte práci, kterou pole vykoná při pohybu bodu.* ***Výsledek:*** $(a^2 - b^2)/2$

Příklad 1.55. *Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole* $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ *podél průnikové křivky ploch* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *a* $x + z = 0$ *orientované souhlasně s pořadím bodů* $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $(0,1,0)$, $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. ***Výsledek:*** 0

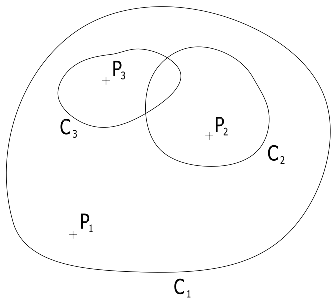
V příkladech 1.57 – 1.59 vypočítejte tok, resp. cirkulaci daného vektorového pole křivkou, resp. podél uzavřené křivky C.

Příklad 1.56. $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$ *a* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leq \sqrt[3]{a^2}$ *(*$a > 0$*) (viz příklad 1.16),* $x \geq 0$, $y \geq 0$.
Výsledek: $3a^2\pi/10$, *resp.* 0

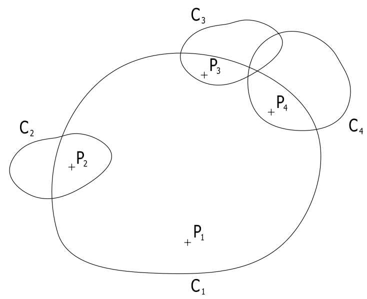
Příklad 1.57. $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x-1}{r^2}, \frac{y+1}{r^2}\right)$ *(*r *je vzdálenost bodu* (x,y) *od počátku) a* C *je kladně orientovaná kružnice* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$. ***Výsledek:*** 2π, *resp.* 0

Příklad 1.58. $\mathbf{F}(x,y) = (x+y, 2x)$ *a* C *kladně orientované kružnice* $x^2 + y^2 = a^2$ *(*$a > 0$*).* ***Výsledek:*** πa^2, *resp.* πa^2

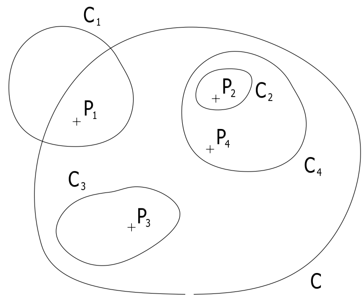
Příklad 1.59. $\mathbf{F}(x,y) = (x\,\mathrm{e}^y, \mathrm{e}^y)$ *a* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $y^2 \leq x$, $x \leq 4$. ***Výsledek:*** $-76\,\mathrm{e}^{-2} - 4\,\mathrm{e}^2$, *resp.* $16\,\mathrm{e}^{-2} + 4\,\mathrm{e}^2$



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Příklad 1.60. *Pole* $\mathbf{F}$ *je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů* P_1, P_2 *a* P_3 *(Obr. 5). Víme, že* $\oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2$, $\oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = -3$. *Najděte* $\oint_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$.
Výsledek: 5

Příklad 1.61. *Pole* $\mathbf{F}$ *je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů* P_1, P_2, P_3 *a* P_4 *(Obr. 6). Víme, že* $\oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 6$, $\oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = -2$, $\oint_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2$. *Najděte* $\oint_{C_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$. ***Výsledek:*** 6

Příklad 1.62. *Pole* $\mathbf{F}$ *je nestlačitelné a je definováno všude s výjimkou bodů* P_1, P_2, P_3 *a* P_4 *(Obr. 7). Víme, že* $\oint_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 5$, $\oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 2$, $\oint_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 1$, $\oint_{C_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = -3$. *Najděte* $\oint_{C} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$. ***Výsledek:*** 3

Příklad 1.63. *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde C *je kladně orientovaná elipsa* $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $(a > 0, b > 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, jež tvoří hranici množiny M, pak podle Greenovy věty platí, že tok tohoto vektorového pole přes hranici množiny M (tj. křivku C) je roven úhrnému množství divergence tohoto pole na M. Tedy platí

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_M \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}A, \tag{12}$$

tj.

$$\oint_C -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}A. \tag{13}$$

Chceme-li nyní použít k výpočtu integrálu $\oint_{(C)}(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y$ vzorec (13), znamená to, že místo toku vektorového pole $\mathbf{F}(x,y)=(-(x-y),-(x+y))$ přes křivku C, můžeme počítat úhrné množství divergence tohoto pole na M. Protože $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)=(-1,-1)$, je

$$\oint_{(C)}(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_M(-1-1)\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = -2ab\pi$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

Příklad 1.64. *Užitím Greenovy věty vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)}\left(\frac{1}{x}+2xy-\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}+x^2+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\le x^2+y^2\le 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}\,x\right\}.$$

Řešení: Protože počítaný křivkový integrál nám opět představuje levou stranu ve vzorci (13), je

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{1}{y}+x^2+\frac{x^3}{3},-\frac{1}{x}-2xy+\frac{y^3}{3}\right).$$

Odtud

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)=(2x+x^2,-2x+y^2).$$

Podle vzorce (13) pak dostáváme

$$\oint_{(C)}\left(\frac{1}{x}+2xy-\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}+x^2+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_M(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A=\int_2^3\int_{\pi/6}^{\pi/3} r^3\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r=\frac{65}{24}\pi.$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí polárních souřadnic.)

Příklad 1.65. *Vypočítejme obsah plochy omezené jedním obloukem cykloidy s parametrizací $\boldsymbol{\psi}(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$ $(a>0)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ a osou x.*

Řešení: Jednoduchým důsledkem Greenovy věty je vzorec pro výpočet míry (obsahu) množiny M ohraničené uzavřenou kladně orientovanou křivkou C. Zvolíme-li např.

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),\quad \text{je}\quad \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

a podle vzorce (13) je

$$\frac{1}{2}\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\int_M\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}A=\int_M \mathrm{d}A=\mu(M). \tag{14}$$

Obecně stačí, zvolíme-li si libovolné rovinné vektorové pole $\mathbf{F}$, jehož $\operatorname{div}\mathbf{F}=1$. Zvolíme-li např. $\mathbf{F}(x,y)=(x,0)$ a z (13) dostáváme další vztah pro výpočet míry množiny

$$\oint_C x\,\mathrm{d}y=\int_M 1\cdot\mathrm{d}A=\int_M \mathrm{d}A=\mu(M). \tag{15}$$

V našem případě je hranice množiny M tvořena dvěma jednoduchými na sebe navazujícími křivkami C_1 a C_2, kde C_1 je část osy x mezi body $(0,0)$ a $(2a\pi,0)$ a C_2 je oblouk cykloidy vycházející z bodu $(2a\pi,0)$ a vracející se do bodu $(0,0)$. Hranice je pak při takto zvolené orientaci orientována kladně. (Připomeňme jednoduché pravidlo pro určení orientace uzavřené křivky - hranice množiny: Procházíme-li křivkou ve směru zvolené orientace a máme-li uzavřenou množinu po levé ruce, je křivka orientována kladně. V případě, že množina je po pravé ruce, je křivka orientována záporně.) Je tedy

$$\mu(M)=\frac{1}{2}\oint_C -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_{C_1} -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\oint_{C_2} -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y.$$

Křivku C_1 parametrizujeme funkcí $\boldsymbol{\psi}(t)=(t,0)$, $t\in\langle 0,2a\pi\rangle$. Snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2}\oint_{C_1} -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=0.$$

Křivka C_2 je parametrizována funkcí $\boldsymbol{\psi}(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. Protože jsme hranici množiny orientovali kladně, postupujeme po křivce C_2 proti rostoucímu parametru, a to znamená, že při výpočtu druhého integrálu musíme u tohoto integrálu změnit znaménko. Je tedy po úpravě

$$\frac{1}{2}\oint_{C_2} -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(-2+2\cos t+t\sin t)\,\mathrm{d}t=3a^2\pi,$$

a tedy

$$\mu(M)=3a^2\pi.$$

Příklad 1.66. *Užitím Stokesovy věty v rovině vypočítejme křivkový integrál*

$$\oint_{(C)}\left(\frac{1}{x}-x^2y+2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\right)\mathrm{d}x+\left(xy^2-\frac{1}{y}+x^2\,\mathrm{e}^{x^2y}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná část lemniskáty $(x^2+y^2)^2=xy$, $(x\geq 0,y\geq 0)$.

Řešení: Připomeňme, že je-li $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ rovinné vektorové pole a C jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka jež tvoří hranici množiny M, potom pro cirkulaci a rotaci tohoto pole platí ($\mathbf{k} = (0,0,1)$)

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \int_M \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A, \tag{16}$$

tj.

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_M \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}A. \tag{17}$$

Předně je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x\,\mathrm{e}^{x^2y} + 2x^3y\,\mathrm{e}^{x^2y} - x^2, \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x\,\mathrm{e}^{x^2y} + 2x^3y\,\mathrm{e}^{x^2y} + y^2.$$

Potom podle (17) je

$$\oint_C \left(\frac{1}{x} - x^2y + 2xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\right)\mathrm{d}x + \left(xy^2 - \frac{1}{y} + x^2\,\mathrm{e}^{x^2y}\right)\mathrm{d}y = \int_M (y^2+x^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x^2+y^2) \le xy \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$. Použitím substituce pomocí polárních souřadnic (**??**) pak dostaneme

$$\int_M (y^2+x^2)\,\mathrm{d}A = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{64}.$$

V příkladech 1.67 – 1.76 vypočítejte křivkové integrály pomocí Greenovy věty.

Příklad 1.67. $\int\limits_C (2\,\mathrm{e}^{2x}\sin y - 3y^3)\,\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^{2x}\cos y + \frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná křivka* $4x^2+9y^2=36$. ***Výsledek:*** 108π

Příklad 1.68. $\int\limits_C (\cos x\ln y + 2\,\mathrm{e}^{2x}\,y^2)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\sin x}{y} + 2\,\mathrm{e}^{2x}\,y + \frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná křivka* $4x^2+y^2=4$. ***Výsledek:*** 2π

Příklad 1.69. $\int\limits_C (\mathrm{e}^x\ln y - y^2x)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{e}^x}{y} - \frac{1}{2}x^2y\right)\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná křivka* $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. ***Výsledek:*** 4π

Příklad 1.70. $\int\limits_C (\mathrm{e}^x\sin y - xy^2)\,\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^x\cos y - \frac{1}{2}x^2y\right)\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná křivka* $(x+2)^2+(y+2)^2=1$. ***Výsledek:*** 4π

Příklad 1.71. $\int\limits_C (2xy+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+3xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2x\}$. ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.72. $\int\limits_C (xy+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+2xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2y\}$. ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.73. $\int\limits_C \mathrm{e}^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\pi\rangle \wedge 0\le y\le \sqrt{\sin x}\right\}$.

Výsledek: $-(\mathrm{e}^\pi+1)/4$

Příklad 1.74. $\int\limits_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4 \wedge x\le y\le \sqrt{3}\,x\right\}$.

Výsledek: $\frac{1}{12}\pi\ln 2$

Příklad 1.75. $\int\limits_C y^3\,\mathrm{d}x - x^3\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je kladně orientovaná hranice množiny* $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0\wedge y\ge 0\wedge (x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)\}$ *(*$a>0$*).*

Výsledek: $-\frac{3}{32}\pi a^4$

Příklad 1.76. $\int\limits_C (\mathrm{e}^x\sin y - y)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 1)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je půlkružnice* $x^2+y^2=ax$ *(*$a>0$*),* $y\le 0$ *s počátečním bodem* $(0,0)$ *a koncovým bodem* $(a,0)$. *[Návod: Doplňte křivku* C *úsečkou spojující počáteční koncový bod půlkružnice na uzavřenou křivku.]*

Výsledek: $-\pi a^2/8$

V příkladech 1.67 – 1.76 vypočítejte křivkové integrály pomocí Stokesovy věty v rovině.

Příklad 1.77. *Pomocí křivkového integrálu odvoďte vztah pro výpočet obsahu kruhu o poloměru* R.

Příklad 1.78. *Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami* $x=y^2$ *a* $x=4$.

Výsledek: $32/3$

Příklad 1.79. *Pomocí křivkového integrálu vypočítejte obsah plochy omezené křivkami* $x=y^3$, $x=8$ *a* $y=0$.

Výsledek: 12

Příklad 1.80. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené smyčkou Descartesova listu* $x^3+y^3-3axy=0$ *(*$a>0$*) s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right)$, $t\in\langle 0,+\infty)$.

Výsledek: $3a^2/2$

Příklad 1.81. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou* $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ *(*$a>0$*).*

Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.82. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené asteroidou s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ *(*$a>0$*),* $t\in\langle 0,2\pi\rangle$.

Výsledek: $3\pi a^2/8$

Příklad 1.83. *Vypočítejte obsah plochy ohraničené srdcovkou s parametrizací* $\boldsymbol{\psi}(t)=(2\cos t-\cos 2t, 2\sin t-\sin 2t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$.

Výsledek: 6π

1.3. Konzervativní pole.

Příklad 1.84. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka spojující body* $(-2,-1)$ *a* $(3,0)$.

Řešení: Nejdříve ukážeme, že rovinné vektorové pole
$\mathbf{F}(x,y) = (x^4+4xy^3, 6x^2y^2-5y^4)$ je v $\mathbb{R}^2$ nerotační, tj. že platí

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{18}$$

Platí

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 12xy^2, \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12xy^2$$

a podmínka (18) je splněna. To znamená, že pole $\mathbf{F}$ je nerotační a je v $\mathbb{R}^2$ potenciální (konzervativní). Počítaný integrál je tedy nazávislý na cestě a je na nás, jakou křivku C spojující body $(-2,-1)$ a $(3,0)$ si zvolíme. Zvolme v našem případě C jako lomenou čáru složenou ze dvou úseček C_1 a C_2 spojující body $(-2,-1)$, $(3,-1)$ a $(3,0)$. Jejich parametrizace jsou

$$\begin{aligned} C_1: &\quad x = t, \quad y = -1, \quad t \in \langle -2, 3\rangle,\\ C_2: &\quad x = 3, \quad y = t, \quad t \in \langle -1, 0\rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\int_C (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{3} (t^4-4t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} \left(54t^2-5t^4\right)\,\mathrm{d}t = 62.$$

Příklad 1.85. *Vypočítejme křivkový integrál* $\int_C yz\,\mathrm{d}x + (2+xy)\,\mathrm{d}y + (xy-1)\,\mathrm{d}z$, *kde* C *je křivka spojující body* $(-1,-1,-1)$ *a* $(1,1,1)$.

Řešení: Vektorové pole $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, 2+xy, xy-1)$ je v $\mathbb{R}^3$ nerotační. Platí totiž

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}$$

a vektorové pole $\mathbf{F}$ je potenciální a počítaný integrál je nezávislý na cestě. Zvolme tentokrát za křivku C úsečku spojující body $(-1,-1,-1)$ a $(1,1,1)$. Její parametrizace je $\boldsymbol{\psi}(t) = (-1+2t, -1+2t, -1+2t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Potom

$$\begin{aligned} &\int_C yz\,\mathrm{d}x + (2+xy)\,\mathrm{d}y + (xy-1)\,\mathrm{d}z = \\ &\quad = \int_0^1 ((-1+2t)^2 + 2(2+(-1+2t)^2) + ((-1+2t)^2-1))\,\mathrm{d}t = 4. \end{aligned}$$

Poznámka 1.86. *V případě, že křivkový integrál je nezávislý na cestě a křivka* C *je libovolná křivka s počáteční bodem* A *a koncovým bodem* B, *je zvykem místo* $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$ *psát* $\int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$. *Dále je třeba si uvědomit, že křivka* $C \subseteq M$, *kde* M *je množina, na které je* $\mathbf{F}$ *potenciální.*

Příklad 1.87. *Vypočítejme práci, kterou vykoná rovinné vektorové pole* $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x\right)$ *posunem hmotného břemene z bodu* $A = (0,0)$ *do bodu* $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Řešení: Ukážeme nejdříve, že pole $\mathbf{F}$ je na množině $M = (-1,1) \times (-1,1)$ potenciální. Je

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

tj. pole je nerotační a vektorové pole $\mathbf{F}$ je na množině M potenciální. Dále víme, že práce, kterou vykoná vektorové pole podél křivky C (křivka C musí ležet v M) je dána křivkovým integrálem

$$W = \int_C \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x\right) \mathrm{d}y. \tag{19}$$

Protože pole $\mathbf{F}$ je potenciální, existuje skalární pole f (potenciál pole $\mathbf{F}$) takové, že $\mathbf{F} = \nabla f$, a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál f budeme hledat analogickou metodou, kterou jsme řešili exaktní diferenciální rovnice.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y, \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x\right),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin y.$$

Integrací této rovnice podle x dostaneme

$$f(x,y) = y \arcsin x + x \arcsin y + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí y. Derivováním f podle y dostaneme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x + \varphi'(y).$$

Podle předpokladu je ale také

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin x.$$

Odtud pak

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c,$$

kde c je libovolná konstanta (můžeme položit $c = 0$). Je tedy

$$f(x,y) = y \arcsin x + x \arcsin y$$

a

$$W = f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) - f(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Příklad 1.88. *Vypočítejme práci, kterou vykoná prostorové vektorové pole* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y)$ *posunem hmotného břemene z bodu* $A = (1,1,1)$ *do bodu* $B = (-2,1,-1)$.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladě ukážeme, že pole $\mathbf{F}$ je v $\mathbb{R}^3$ nerotační, tedy, že je potenciální. Je

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = 6xyz^2 - 1,$$
$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = 3y^2z^2 + 1,$$
$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 2yz^3.$$

Existuje tedy skalární pole f (potenciál pole $\mathbf{F}$) takové, že $\mathbf{F} = \nabla f$, a platí

$$W = f(B) - f(A).$$

Potenciál f budeme opět hledat analogicky stejnou metodou jako v předchozím příkladu.

Podle předpokladu je

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y^2z^3 + z, 2xyz^3 - z, 3xy^2z^2 + x - y\right),$$

tedy

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = y^2z^3 + z \ \Rightarrow\ f(x,y,z) = xy^2z^3 + zx + \varphi_1(y,z),$$

kde $\varphi_1(y,z)$ je integrační konstanta, která ovšem může být funkcí y a z. Derivováním f podle y dostaneme

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial y}.$$

Je ale také

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = Q(x,y,z) = 2xyz^3 - z.$$

Odtud pak

$$\frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial y} = -z \ \Rightarrow\ \varphi_1(y,z) = -zy + \varphi_2(z),$$

kde $\varphi_2(z)$ je integrační konstanta, která však už může být funkcí pouze z. Pro funkci f tedy dostáváme

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + zx - yz + \varphi_2(z).$$

Nyní derivováním f podle z dostaneme

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3xy^2z^2 + x - y + \varphi_2'(z),$$

a protože je také

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z) = 3xy^2z^2 + x - y,$$

dostáváme

$$\varphi_2'(z) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi_2(z) = c,$$

kde c je libovolná konstanta (můžeme položit $c = 0$).

Je tedy

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + zx - yz$$

a pro velikost vykonané práci W dostáváme (v příslušných jednotkách)

$$W = f(B) - f(A) = 5 - 1 = 4.$$

Příklad 1.89. *Vypočítejte křivkový integrál* $\int_C \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\,\mathrm{d}x + (\ln x + 2xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (1,1)$ *a koncovým bodem* $B = (2,3)$.

Výsledek: $3\ln 2 + 17$

Příklad 1.90. *Vypočítejte křivkový integrál* $\int_C (2x\ln y - y)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} - x\right)\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (1,1)$ *a koncovým bodem* $B = (3,2)$.

Výsledek: $9\ln 2 - 5$

Příklad 1.91. *Vypočítejte křivkový integrál* $\int_C (3x^2y^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (2x^3y + 2xy + 1)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (1,-1)$ *a koncovým bodem* $B = (2,1)$.

Výsledek: 10

Příklad 1.92. *Vypočítejte křivkový integrál* $\int_C (2xy^3 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}x + (3x^2y^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (-1,-1)$ *a koncovým bodem* $B = (2,1)$.

Výsledek: 11

Příklad 1.93. *Ukažte, že vektorové pole* $F(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arctg} y, \frac{x}{1+y^2} + \operatorname{arctg} x\right)$ *je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu* $A = (0,0)$ *do bodu* $B = (1,1)$.

Výsledek: $f(x,y) = y\operatorname{arctg} x + x\operatorname{arctg} y$, $W = \pi/2$

Příklad 1.94. *Ukažte, že vektorové pole* $F(x,y) = (2x\sin y - y\sin x, \cos x + x^2\cos y)$ *je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu* $A = (0,0)$ *do bodu* $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Výsledek: $f(x,y) = x^2\sin y + y\cos x$, $W = \pi^2/4$

Příklad 1.95. *Ukažte, že vektorové pole* $F(x,y) = (\sin y - y^2\sin x, x\cos y + 2y\cos x)$ *je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu* $A = (0,0)$ *do bodu* $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Výsledek: $f(x,y) = x\sin y + y^2\cos x$, $W = \pi/2$

Příklad 1.96. *Vypočítejte křivkový integrál*
$\int_C (x^2 - 2yz)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\,\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\,\mathrm{d}z$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (1, 1, 1)$ *a koncovým bodem* $B = (-1, 2, -2)$. ***Výsledek:*** $-22/3$

Příklad 1.97. *Vypočítejte křivkový integrál*
$\int_C \left(2xz + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x - \frac{x+z}{y^2}\,\mathrm{d}y + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}z$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (-1, 3, -2)$ *a koncovým bodem* $B = (1, 2, 3)$. ***Výsledek:*** 8

Příklad 1.98. *Vypočítejte křivkový integrál*
$\int_C 3x^2y^2z\,\mathrm{d}x + (2x^3yz - z^2)\,\mathrm{d}y + (x^3y^2 - 2yz + 3z^2)\,\mathrm{d}z$, *kde* C *je křivka s počátečním bodem* $A = (-1, 3, 0)$ *a koncovým bodem* $B = (0, 1, 2)$.
Výsledek: 4

Příklad 1.99. *Ukažte, že vektorové pole*
$F(x, y, z) = \left(\ln yz + 2xy, \frac{x}{y} + x^2 + z, \frac{x}{z} + y\right)$ *je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu* $A = (1, 1, 1)$ *do bodu* $B = (2, 1, 2)$.
Výsledek: $f(x, y, z) = x \ln yz + x^2y + zy$, $W = 2\ln 2 + 4$

Příklad 1.100. *Ukažte, že vektorové pole*
$F(x, y, z) = \left(\operatorname{arctg} yz + z, \frac{xz}{1+y^2z^2} + z^2, \frac{xy}{1+y^2z^2} + x + 2yz + 1\right)$ *je potenciální, najděte potenciál tohoto pole a určete práci, kterou toto pole vykoná posunem hmotného břemene z bodu* $A = (1, 0, -1)$ *do bodu* $B = (1, 1, \sqrt{3})$.
Výsledek: $f(x, y, z) = x \operatorname{arctg} yz + xz + yz^2 + z$, $W = \pi/3 + 5 + 2\sqrt{3}$