Křivkové integrály prvního druhu

Vypočítejte dané křivkové integrály prvního druhu v $\boldsymbol{\mathcal{R}}^2$.

Příklad 1. $\int\limits_k \frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, kde k je úsečka AB, $A[0,-2]$, $B[4,0]$.

Řešení: Pro křivkový integrál prvního druhu platí:

$$\int\limits_k f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

kde regulární křivka k je parametricky vyjádřena rovnicemi

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \qquad t\in\langle\alpha,\beta\rangle.$$

Parametrické vyjádření úsečky AB je

$$\begin{aligned} x &= 0+4t,\\ y &= -2+2t,\ t\in\langle 0,1\rangle. \end{aligned}$$

Křivku k můžeme tedy parametricky vyjádřit rovnicemi

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0+4t,\\ \psi(t) &= -2+2t,\ t\in\langle 0,1\rangle. \end{aligned}$$

Odtud

$$\int\limits_k \frac{\mathrm{d}s}{x-y} = \int\limits_0^1 \frac{1}{4t-(-2+2t)}\sqrt{4^2+2^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\,[\ln|t+1|]_0^1 = \sqrt{5}\ln 2.$$

Příklad 2. $\int\limits_k (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde k je obvod trojúhelníka ABC, $A[0,1]$, $B[2,1]$, $C[0,3]$

Řešení: Platí $k=k_1\cup k_2\cup k_3$, kde k_1,k_2,k_3 jsou strany trojúhelníka ABC.

Je

$$k_1: \qquad \begin{aligned} x &= 0+2t,\\ y &= 1+0\cdot t, \quad t\in\langle 0,1\rangle, \end{aligned}$$

$$k_2: \qquad \begin{aligned} x &= 2-2t,\\ y &= 1+2t, \quad t\in\langle 0,1\rangle, \end{aligned}$$

$$k_3: \qquad \begin{aligned} x &= 0+0\cdot t,\\ y &= 1+2t, \quad t\in\langle 0,1\rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\int\limits_k (x+y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (2t+1)2\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 ((2-2t)+(1+2t))\sqrt{8}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 (2t+1)2\,\mathrm{d}t = 8+3\sqrt{8}.$$

Příklad 3. $\int\limits_k x^2\,\mathrm{d}s$, kde $k = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^2 :\ x \in \langle 1,2\rangle \wedge y = \ln x\right\}$.

Řešení: Křivku k můžeme parametricky vyjádřit pomocí rovnic

$$x = t, \quad y = \ln t, \qquad t \in \langle 1,2\rangle.$$

Potom

$$\int\limits_k x^2\,\mathrm{d}s = \int\limits_1^2 t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Označme $u = t^2+1$ a dále $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$. Potom

$$\int\limits_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right).$$

Příklad 4. $\int\limits_k \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde k je kružnice $x^2+y^2 = 2x$.

Řešení: Doplněním na čtverec a úpravou převedeme rovnici kružnice na tvar $(x-1)^2+y^2 = 1$. Její parametrické vyjádření je

$$\begin{aligned} x &= 1+\cos t, \\ y &= \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \int\limits_k \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} 2\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}} = \int\limits_0^{2\pi} 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| = \\ &= 2\left(\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\pi}^{2\pi} -\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right) = 2\left(\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} - \left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = 8 \end{aligned}$$

Příklad 5. $\int\limits_k (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, kde k je křivka daná parametrickými rovnicemi

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t), \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \qquad a > 0.$$

Řešení: Nejdříve určíme

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t, \\ \psi'(t) &= a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t. \end{aligned}$$

Potom

$$\int\limits_k (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} a^2\left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right) at\,\mathrm{d}t = 2a^3\pi^2(1+2\pi^2).$$

Vypočítejte dané křivkové integrály prvního druhu v $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3$.

Příklad 6. $\int\limits_k \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}$, kde k je křivka (jeden "závit" šroubovice) daná parametrickými rovnicemi

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \qquad a > 0, b > 0.$$

Řešení:

$$\int\limits_k \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2+b^2t^2}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\frac{b}{a}\left[\mathrm{arctg}\frac{bt}{a}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\mathrm{arctg}\frac{2b\pi}{a}.$$

Příklad 7. $\int\limits_k \left(2\sqrt{x^2+y^2} - z\right)\,\mathrm{d}s$, kde k je křivka (jeden "závit" kuželové šroubovice) daná parametrickými rovnicemi

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení: Nejdříve určíme

$$\varphi'(t) = \cos t - t\sin t, \quad \psi'(t) = \sin t + t\cos t, \quad \chi'(t) = 1$$

a

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Potom

$$\int\limits_k \left(2\sqrt{x^2+y^2} - z\right)\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} \left(2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} - t\right)\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2+4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}\right).$$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu.

Příklad 8. Vypočítejte délku asteroidy k $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$, jejíž parametrické rovnice jsou $x = a\cos^3 t$, $x = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení: Asteroida není regulární křivka. Víme, že funkce $F(x,y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2}$ je sudá v proměnné x i v proměnné y a křivka je souměrná podle osy y i podle osy x.

Platí $k = k_1 \cup k_2 \cup k_3 \cup k_4$, kde k_1, k_2, k_3, k_4 jsou čtyři regulární křivky stejné délky. Pro délku asteroidy platí

$$s = \int_k \mathrm{d}s = 4 \int_{k_1} \mathrm{d}s.$$

Nejdříve určíme

$$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \psi'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$$

a

$$\mathrm{d}s = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 3a \cos t \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Odtud

$$s = 4\int_{k_1} \mathrm{d}s = 4\int_0^{\pi/2} 3a\cos t \sin t = 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 3a.$$

Příklad 9. Pomocí křivkového integrálu prvního druhu vypočítejte obsah válcové plochy

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \le z \le \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Řešení:

Z geometrického významu křivkového integrálu prvního druhu víme, že obsah části válcové plochy je roven číslu

$$\sigma = \int_k f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde k je křivka v rovině $z = 0$, do které se válcová plocha promítne a plocha je zdola omezena rovinou $z = 0$ a shora grafem funkce $z = f(x,y)$. V našem případě je k kružnice $x^2 + y^2 = 4$ (s parametrickými rovnicemi $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$) a $f(x,y) = \sqrt{4-x^2}$. Potom

$$\sigma = \int_k \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - 4\cos^2}\,2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + 4\int_{\pi}^{2\pi} -\sin t\,\mathrm{d}t = 4\left([-\cos t]_0^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{2\pi}\right) = 16.$$

Příklad 10. Pomocí křivkového integrálu prvního druhu vypočítejte obsah válcové plochy

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 : x^2 + y^2 = ax \wedge x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\right\} \ (a > 0).$$

Řešení: Plocha je souměrná podle roviny $z = 0$ a podle roviny $x = 0$ a je sjednocením čtyř ploch o stejném obsahu. Pro obsah plochy Ω platí

$$\sigma = 4\int_{k_1} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde k_1 je půlkružnice $x = \frac{a}{2}(1 - \cos t)$, $y = \frac{a}{2}\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a graf funkce $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ je horní část zadané kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Tedy

$$\sigma = 4\int_{k_1} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}s = 4\int_0^\pi \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}(1 + \cos t)}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{d}t = 2a^2\int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2a^2\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a^2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4a^2.$$

Příklad 11. Najděte souřadnice těžiště homogenní křivky dané parametrickými rovnicemi $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ (část cykloidy).

Řešení: Pro souřadnice těžiště $T = [x_t, y_t]$ platí

$$x_t = \frac{S_y}{m}, \quad y_t = \frac{S_y}{m}, \tag{1}$$

kde m je hmotnost křivky a S_x, resp. S_y je statický moment křivky vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y. Platí

$$m = \int_k f(x,y)\,\mathrm{d}s, \quad S_x = \int_k yf(x,y)\,\mathrm{d}s \quad S_y = \int_k xf(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde $f(x,y)$ je hustota křivky k v bodě (x,y). V našem případě je křivka homogenní, tj. $f(x,y) =$ konst. a souřadnice těžiště jsou na této konstantě nezávislé (ve vzorcích (1) se tato konstanta vykrátí) a proto položím $f(x,y) = 1$.

Je

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t, \quad \psi'(t) = \sin t$$

a

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Potom

$$m = \int_k 1\cdot\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4.$$

Dále

$$S_x = \int_k y\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 2(1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \frac{1 - \cos t}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^\pi \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^1 \left(1 - u^2\right)\,\mathrm{d}u = \frac{16}{3}$$

(při výpočtu integrálu volíme substituci $u = \cos\frac{t}{2}$) a

$$S_y = \int_k x\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 2(t - \sin t)\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{16}{3}.$$

(První integrál počítáme metodou per partes a ve druhém po úpravě $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$ volíme substituci $u = \sin\frac{t}{2}$.)

Je tedy

$$x_t = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{3}, \qquad y_t = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4}{3}.$$

Křivkové integrály druhého druhu

Příklad 12. Vypočítejte křivkový integrál $\int\limits_{(k)} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z$, kde (k) je kladně orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Řešení: Pro křivkový integrál druhého druhu

$$\int\limits_{(k)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + g(x,y,z)\,\mathrm{d}y + h(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

kde (k) je kladně (ve směru rostoucího parametru) orientovaný hladký oblouk daný parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \qquad t \in \langle\alpha, \beta\rangle,$$

platí

$$\int\limits_{(k)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + g(x,y,z)\,\mathrm{d}y + h(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + h(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Je tedy

$$\int\limits_{(k)} (y^2 - z^2)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y - x^2\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \left(t^4 - t^6 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

Příklad 13. Vypočítejte křivkový integrál $\int\limits_{(k)} \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}x + \left(y^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je orientovaný oblouk s trajektorií $k = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^2 : x \in \langle -1, 1\rangle \wedge y = x^2\right\}$, přičemž $\mathrm{pb}(k) = (-1,1)$, $\mathrm{kb}(k) = (1,1)$.

Řešení: Oblouk budeme parametrizovat rovnicemi $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t^2$, $t \in \langle -1, 1\rangle$. Protože $\mathrm{pb}(k) = (-1,1)$ je počátečním bodem oblouku, znamená to, že je při zvolené parametrizaci orientován kladně. Potom

$$\int\limits_{(k)} \left(x^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}x + \left(y^2 - 2xy\right)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3)\cdot 2t\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{14}{15}.$$

Příklad 14. Vypočítejte křivkový integrál $\int\limits_{(k)} (2-y)\ \mathrm{d}x + (1+x)\ \mathrm{d}y$, kde (k) je obvod trojúhelníka ABC, $A[0,0]$, $B[1,1]$, $C[0,2]$ a orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů.

Řešení: Oblouk (k) není hladký oblouk. Platí $(k) = (k_1)\cup(k_2)\cup(k_3)$, kde $(k_1), (k_2), (k_3)$ jsou hladké oblouky (strany trojúhelníka ABC). Je

$$
\begin{array}{lllll}
k_1: & x = t, & y = t, & t \in \langle 0,1\rangle, & \text{kladně orientovaná,}\\
k_2: & x = t, & y = 2-t, & t \in \langle 0,1\rangle, & \text{záporně orientovaná,}\\
k_3: & x = 0, & y = t, & t \in \langle 0,2\rangle, & \text{záporně orientovaná.}
\end{array}
$$

Potom

$$
\int\limits_{(k)} (2-y)\ \mathrm{d}x + (1+x)\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2-t+1+t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 (2-2+t-1-t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^2 (1)\,\mathrm{d}t = 2.
$$

Příklad 15. Užitím Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál $\int\limits_{(k)} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná elipsa $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, $(a > 0, b > 0)$.

Řešení: Podle Greenovy věty platí

$$
\int\limits_{(k)} f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

kde (k) je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti M.

V našem případě je $f(x,y) = x+y$, $g(x,y) = -(x-y)$ a M je oblast omezená elipsou $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

Tedy

$$
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -1
$$

a dále

$$
\int\limits_{(k)} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{M} (-1-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2ab\pi.
$$

(Dvojný integrál jsme vypočítali substitucí pomocí zobecněných polárních souřadnic.)

Příklad 16. Užitím Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál $\int\limits_{(k)} \mathrm{e}^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y$, kde (k) je kladně orientovaná hranice uzavřené oblasti $M = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^2 : x \in \langle 0,\pi\rangle \wedge 0 \le y \le \sqrt{\sin x}\right\}$.

Řešení: Je

$$
f(x,y) = \mathrm{e}^x(1-\cos y), \qquad g(x,y) = -\mathrm{e}^x(y-\sin y),
$$

a odtud

$$
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x \sin y, \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -\mathrm{e}^x(y-\sin y)
$$

a dále

$$\int\limits_{(k)} e^x(1-\cos y)\,dx - e^x(y-\sin y)\,dy = \iint\limits_M \left(-e^x y + e^x\sin y - e^x \sin y\right)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_M -e^x y\,dx\,dy = -\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{\sin x}} e^x y\,dy\right)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = -\frac{1}{4}\left(e^{\pi}+1\right).$$

Příklad 17. Ukažte, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(x,y) = \big(2x(y^2-2x^2), 2y(x^2-2y^2)\big)$ nezávisí v oblasti $G = \boldsymbol{\mathcal{R}}^2$ na cestě, a vypočtěte integrál $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,3)} \mathbf{f}(x,y)\cdot d\mathbf{s}$.

Řešení: Křivkový integrál druhého druhu nezávisí na cestě, je-li pro vektorové pole $\mathbf{f}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ splněna podmínka (vektorové pole je potenciální)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}.$$

V našem případě je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4xy, \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 4xy$$

a to znamená, že vektorové pole je potenciální a křivkový integrál druhého druhu $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,3)} 2x(y^2-2x^2)\,dx + 2y(x^2-2y^2)\,dy$ nazávisí na cestě a můžeme volit libovolnou cestu (k), která spojí bod $(-1,1)$ s bodem $(2,3)$, přičemž bod $(-1,1)$ je počáteční bod cesty.

Zvolme cestu $(k) = (k_1)\cup(k_2)$, kde (k_1) je úsečka spojující body $(-1,1)$ a $(2,1)$ a (k_2) je úsečka spojující body $(2,1)$ a $(2,3)$ (cestu volíme tak, abychom postupovali rovnoběžně se souřadnicovými osami). Je

$$\begin{array}{lllll} k_1: & x = t, & y = 1, & t\in\langle -1,2\rangle, & \text{kladně orientovaná,} \\ k_2: & x = 2, & y = t, & t\in\langle 1,3\rangle, & \text{kladně orientovaná.} \end{array}$$

Potom

$$\int\limits_{(-1,1)}^{(2,3)} 2x(y^2-2x^2)\,dx + 2y(x^2-2y^2)\,dy = \int\limits_{(k_1)} 2x(y^2-2x^2)\,dx + 2y(x^2-2y^2)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{(k_2)} 2x(y^2-2x^2)\,dx + 2y(x^2-2y^2)\,dy = \int\limits_{-1}^{2} 2t(1-2t^2)\,dt + \int\limits_{1}^{3} 2t(4-2t^2)\,dt = -60.$$

Příklad 18. Ukažte, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right)$ nezávisí v oblasti $G = \left\{(x,y)\in\boldsymbol{\mathcal{R}}^2 : x>0\right\}$ na cestě, a vypočtěte integrál $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \mathbf{f}(x,y)\cdot d\mathbf{s}$.

Řešení: Protože

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

je vektorové pole potenciální a křivkový integrál $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y$ nezávisí na cestě.

Zvolme opět cestu $(k) = (k_1) \cup (k_2)$, kde (k_1) je úsečka spojující body $(2,1)$ a $(1,1)$ a (k_2) je úsečka spojující body $(1,1)$ a $(1,2)$. Tedy

$$\begin{array}{llll} k_1: & x = t, \quad y = 1, & t \in \langle 1, 2 \rangle, & \text{záporně orientovaná}, \\ k_2: & x = 1, \quad y = t, & t \in \langle 1, 2 \rangle, & \text{kladně orientovaná}. \end{array}$$

Potom

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(k_1)} \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y + \int\limits_{(k_2)} \frac{y}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y =$$

$$= -\int\limits_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^2 -1\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}.$$