

NAJDĚTE LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH.

Zkratky: LM=lokální maximum; lm=lokální minimum; sp=sedlo; ??=nelez rozhodnout podle druhých derivací

Souřadnice bodů nejsou zrovna nejjednodušší zapsané, protože je vše generováno na počítači v Maplu. Takže třeba $\{y = -9, x = 7\}$ značí bod $[7, -9]$. Ale každý by to měl pochopit a snad mi to laskavý čtenář promine :).

1. $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

Návod: $z'_x = 2xy^2 - 2x$

$z'_y = 2x^2y - 2y$

Výsledek:

LM: $\{x = 0, y = 0\}$;

sp: $\{x = 1, y = 1\}$;

sp: $\{x = 1, y = -1\}$;

sp: $\{x = -1, y = 1\}$;

sp: $\{x = -1, y = -1\}$;

2. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Návod: $z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$

$z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$

Výsledek:

?: $\{y = 0, x = 0\}$

lm: $\{y = 1, x = 1\}$;

lm: $\{x = -1, y = -1\}$;

3. $z = xy - x^2 - y^2 + x + y$

Návod: $z'_x = y - 2x + 1$

$z'_y = x - 2y + 1$

Výsledek:

LM: $\{y = 1, x = 1\}$;

4. $z = xy(4 - x - y)$

Návod: $z'_x = y(4 - x - y) - xy$

$z'_y = x(4 - x - y) - xy$

Výsledek:

sp: $\{y = 0, x = 4\}$;

sp: $\{y = 4, x = 0\}$;

LM: $\{x = 4/3, y = 4/3\}$;

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

5. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Návod: $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$

$z'_y = 2xy + 2y$

Výsledek:

LM: $\{x = -5/3, y = 0\}$;

sp: $\{x = -1, y = -2\}$;

sp: $\{x = -1, y = 2\}$;

lm: $\{y = 0, x = 0\}$;

6. $z = 2xy + 3x^2 + 2y^2 + 10$

Návod: $z'_x = 2y + 6x$

$z'_y = 2x + 4y$

Výsledek:

lm: $\{y = 0, x = 0\}$;

7. $z = 9x - 9y - x^2 - y^2$

Návod: $z'_x = 9 - 2x$

$z'_y = -9 - 2y$

Výsledek:

LM: $\{y = -9/2, x = 9/2\}$;

8. $z = x^3 + 2xy + y^3$

Návod: $z'_x = 3x^2 + 2y$

$z'_y = 2x + 3y^2$

Výsledek:

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

LM: $\{y = -2/3, x = -2/3\}$;

9. $z = x^2 + y^2 - 1/2xy - 4x + 4y + 3$

Návod: $z'_x = 2x - 1/2y - 4$

$z'_y = 2y - 1/2x + 4$

Výsledek:

lm: $\{y = -8/5, x = 8/5\}$;

10. $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

Návod: $z'_x = 4x^3 - 4y$

$z'_y = 4y^3 - 4x$

Výsledek:

lm: $\{y = -1, x = -1\}$;

lm: $\{x = 1, y = 1\}$;

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

11. $z = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$

Návod: $z'_x = 9x^2 + 6xy - 15$

$z'_y = 3x^2 - 3y^2$

Výsledek:

LM: $\{x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}\}$;

lm: $\{y = -\sqrt{5}, x = \sqrt{5}\}$;

sp: $\{x = 1, y = 1\}$;

sp: $\{x = -1, y = -1\}$;

12. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

Návod: $z'_x = 3x^2 - 9y$

$z'_y = 3y^2 - 9x$

Výsledek:

lm: $\{y = 3, x = 3\}$;

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

13. $z = x \ln(x^2 + y)$

Návod: $z'_x = \ln(x^2 + y) + 2 \frac{x^2}{x^2 + y}$

$z'_y = \frac{x}{x^2 + y}$

Výsledek:

sp: $\{x = 0, y = 1\}$;

14. $z = \ln(1/6x) + 2 \ln(y) + \ln(12 - x - y)$

Návod: $z'_x = x^{-1} - (12 - x - y)^{-1}$

$z'_y = 2y^{-1} - (12 - x - y)^{-1}$

Výsledek:

LM: $\{x = 3, y = 6\}$;

15. $z = e^{1/2x} (x + y^2)$

Návod: $z'_x = 1/2 e^{1/2x} (x + y^2) + e^{1/2x}$

$z'_y = 2 e^{1/2x} y$

Výsledek:

lm: $\{y = 0, x = -2\}$;

16. $z = xy + 50x^{-1} + 20y^{-1}$

Návod: $z'_x = y - 50x^{-2}$

$z'_y = x - 20y^{-2}$

Výsledek:

lm: $\{y = 2, x = 5\}$;

17. $z = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$

Návod: $z'_x = \cos(x) + \cos(x + y)$

$z'_y = \cos(y) + \cos(x + y)$

Výsledek:

sp: $\{x = \pi, y = \pi\}$;

LM: $\{y = \arctan(\sqrt{3}), x = \arctan(\sqrt{3})\}$;

lm: $\{y = \arctan(-\sqrt{3}), x = \arctan(-\sqrt{3})\}$;

18. $z = xy \ln(x^2 + y^2)$

Návod: $z'_x = y \ln(x^2 + y^2) + 2 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

$z'_y = x \ln(x^2 + y^2) + 2 \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

Výsledek:

sp: $\{x = 1, y = 0\}$;

sp: $\{x = -1, y = 0\}$;

sp: $\{x = 0, y = -1\}$;

sp: $\{x = 0, y = 1\}$;

lm: $\{x = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}, y = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}\}$;

lm: $\{x = -1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}, y = -1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}\}$;

LM: $\{y = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}, x = -1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}\}$;

LM: $\{x = 1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}, y = -1/2 \sqrt{2} \sqrt{e^{-1}}\}$;

19. $z = \ln(x - y) - x^2 + 6y$

Návod: $z'_x = (x - y)^{-1} - 2x$

$z'_y = -(x - y)^{-1} + 6$

Výsledek:

LM: $\{x = 3, y = \frac{17}{6}\}$;

20. $z = e^y (x^2 + 2y + 2)$

Návod: $z'_x = 2e^y x$

$z'_y = e^y (x^2 + 2y + 2) + 2e^y$

Výsledek:

lm: $\{x = 0, y = -2\}$;

21. $z = \ln(x^2 + y)y$

Návod: $z'_x = 2 \frac{xy}{x^2 + y}$

$z'_y = \frac{y}{x^2 + y} + \ln(x^2 + y)$

Výsledek:

sp: $\{x = 1, y = 0\}$;

sp: $\{x = -1, y = 0\}$;

lm: $\{x = 0, y = e^{-1}\}$;

22. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln(x) - 10 \ln(y)$

Návod: $z'_x = 2x + y - 4x^{-1}$

$z'_y = x + 2y - 10y^{-1}$

Výsledek:

lm: $\{x = 1, y = 2\}$;

23. $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$

Návod: $z'_x = 6x^2 + y^2 - 10x$

$z'_y = 2xy + 2y$

Výsledek:

sp: $\{x = 0, y = 0\}$;

lm: $\{y = 0, x = 5/3\}$;

24. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Návod: $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$

$z'_y = 2xy + 2y$

Výsledek:

LM: $\{x = -5/3, y = 0\}$;

sp: $\{x = -1, y = 2\}$;

lm: $\{x = 0, y = 0\}$;

sp: $\{x = -1, y = -2\}$;

25. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

Návod: $z'_x = 2y - 6x$

$z'_y = 2x - 4y$

Výsledek:

LM: $\{x = 0, y = 0\}$;

26. $z = \ln(x - y) - x^2 + y$

Návod: $z'_x = (x - y)^{-1} - 2x$

$z'_y = -(x - y)^{-1} + 1$

Výsledek:

LM: $\{y = -1/2, x = 1/2\}$;

27. $z = 50xy - 5x^{-1} - 4y^{-1}$

Návod: $z'_x = 50y + 5x^{-2}$

$z'_y = 50x + 4y^{-2}$

Výsledek:

lm: $\{x = -1/2, y = -2/5\}$;

28. $z = 9xy + x^{-1} + 3y^{-1}$

Návod: $z'_x = 9y - x^{-2}$

$z'_y = 9x - 3y^{-2}$

Výsledek:

lm: $\{y = 1, x = 1/3\}$;

29. $z = xy + 2x^{-1} + 32y^{-1}$

Návod: $z'_x = y - 2x^{-2}$

$z'_y = x - 32y^{-2}$

Výsledek:

lm: $\{y = 8, x = 1/2\}$;

30. $z = x^3 + y^3 - 18xy + 215$

Návod: $z'_x = 3x^2 - 18y$

$z'_y = 3y^2 - 18x$

Výsledek:

lm: $\{y = 6, x = 6\}$;

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

31. $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$

Návod: $z'_x = 6x^2 + y^2 - 10x$

$z'_y = 2xy + 2y$

Výsledek:

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

lm: $\{x = 5/3, y = 0\}$;

32. $z = (3x - x^3)(y^2 + 1)$

Návod: $z'_x = (3 - 3x^2)(y^2 + 1)$

$$z'_y = 2(3x - x^3)y$$

Výsledek:

sp: $\{y = 0, x = 1\}$;

sp: $\{y = 0, x = -1\}$;

33. $z = x^4 + y^4 - 4xy$

Návod: $z'_x = 4x^3 - 4y$

$$z'_y = 4y^3 - 4x$$

Výsledek:

sp: $\{y = 0, x = 0\}$;

lm: $\{y = 1, x = 1\}$;

lm: $\{y = -1, x = -1\}$;

34. $z = e^x(x + y^2 + y)$

Návod: $z'_x = e^x(x + y^2 + y) + e^x$

$$z'_y = e^x(2y + 1)$$

Výsledek:

lm: $\{y = -1/2, x = -3/4\}$;

35. $z = e^{x-y}(-x^2 + 3y^2)$

Návod: $z'_x = e^{x-y}(-x^2 + 3y^2) - 2e^{x-y}x$

$$z'_y = -e^{x-y}(-x^2 + 3y^2) + 6e^{x-y}y$$

Výsledek:

sp: $\{x = 0, y = 0\}$;

lm: $\{x = -3, y = -1\}$;

36. $z = y\sqrt{x} + \sqrt{x} - y^2 + 4y - x$

Návod: $z'_x = 1/2 \frac{y}{\sqrt{x}} + 1/2 \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

$$z'_y = \sqrt{x} - 2y + 4$$

Výsledek:

LM: $\{x = 4, y = 3\}$;

37. $z = \ln(x^3) + \ln(y^2) + \ln(3 - x - y)$

Návod: $z'_x = 3x^{-1} - (3 - x - y)^{-1}$

$$z'_y = 2y^{-1} - (3 - x - y)^{-1}$$

Výsledek:

LM: $\{y = 1, x = 3/2\}$;