PŘÍKLADY K MATEMATICE 3

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Vícenásobné intergrály

1.1. Dvojné integrály.

Příklad 1.1. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,3\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{3+y^2}$ je na obdélníku (dvojrozměrném intervalu) M spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný integrál (přičemž nezáleží na pořadí, ve kterém budeme integrovat) a postupnou integrací dostaneme

$$\begin{aligned}\int\limits_M \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^3\int\limits_0^1 \frac{x^2}{3+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \left[\frac{x^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{18}\int\limits_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\;.\end{aligned}$$

Příklad 1.2. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = x\sin y$ je na M spojitá. Pomocí Fubiniovy věty opět převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Protože meze pro x i y jsou konstantní, opět nezáleží v jakém pořadí budeme integrovat. Postupně dostaneme

Date:

$$\begin{aligned}\int\limits_M x\sin y\,\mathrm{d}A &= \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_1^2 x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}x^2\sin y\right]_{x=1}^{x=2}\mathrm{d}y = \\ &= \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\ .\end{aligned}$$

Příklad 1.3. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,2\rangle \times \langle 1,2\rangle$. ***Výsledek:*** 4

Příklad 1.4. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \mathrm{e}^x\, y\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $8(\mathrm{e}-1)$

Příklad 1.5. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{1}{(1+x+2y)^3}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,4\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{11}{90}$

Příklad 1.6. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\ \mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. ***Výsledek:*** 2

Příklad 1.7. *Vypočítejte dvojný integrál*

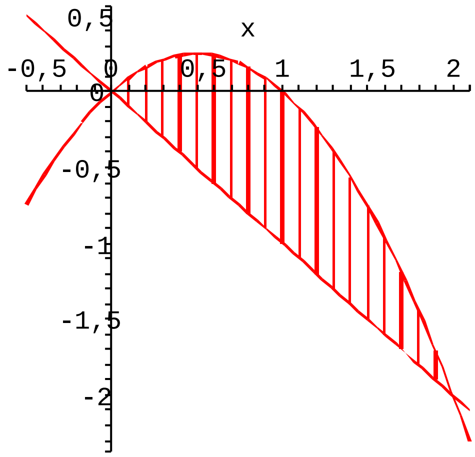
$$\int\limits_M xy^2\sin(x^2+y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \langle 0,\sqrt{\pi}\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$. ***Výsledek:*** $\frac{1}{4}\pi^2 - 2$

Příklad 1.8. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M xy\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je množina ohraničená křivkami* $y = -x$ *a* $y = x - x^2$.



Obr. 1

Řešení: M je ohraničená přímkou $y = -x$ a parabolou $y = x - x^2$ (Obr. 1).

Souřadnice průsečíků obou křivek získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} y &= -x, \\ y &= x - x^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že křivky se protnou v bodech $(0,0)$ a $(2,-2)$. Funkce $f(x,y) = xy$ je na M spojitá a je zřejmé, že pro libovolné $x \in \langle 0, 2\rangle$ je $-x \leq y \leq x - x^2$. Užitím Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int\limits_M xy \, \mathrm{d}A &= \int\limits_0^2 \int\limits_{-x}^{x-x^2} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=-x}^{y=x-x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (x(x-x^2)^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = -\frac{16}{15} \, . \end{aligned}$$

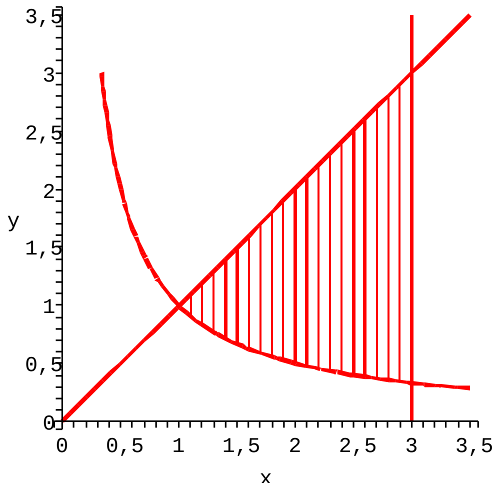
Příklad 1.9. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a $x = 3$.

Řešení: Množina M je část roviny ohraničená přímkami $y = x$, $x = 3$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ (Obr. 2).

Vyšetřením průsečíků křivek, které tvoří hranici množiny a také z obrázku je zřejmé, že pro všechny body (x, y) množiny je $x \in \langle 1, 3\rangle$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$. Protože



Obr. 2

funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ je na M spojitá můžeme použít Fubiniovu větu. Potom

$$\begin{aligned}\int\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}A &= \int\limits_1^3 \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{y=1/x}^{y=x} \mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_1^3 (-x + x^3)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_1^3 = 16\ .\end{aligned}$$

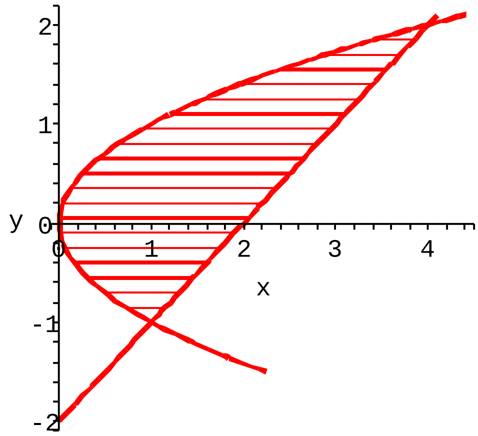
Příklad 1.10. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y^2 = x$ a $y = x - 2$.

Řešení: Množina M je ohraničena parabolou $y^2 = x$ a přímkou $y = x - 2$ (Obr. 3), přičemž hraniční křivky se protnou v bodech $(1, -1)$, a $(4, 2)$

Z obrázku je patrné, že v tomto případě bude lepší dvojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na dvojnásobný tak, abychom integrovali nejdříve podle x a teprve pak podle y. V opačném případě bychom totiž museli množinu M rozdělit na dvě množiny, a to na M_1, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$ a na M_2, kde $x \in \langle 1, 4\rangle$ a $x - 2 \le y \le \sqrt{x}$. V případě, že zaměníme pořadí integrace, platí pro M, že $y \in \langle -1, 2\rangle$ a $y^2 \le x \le y + 2$. Potom



Obr. 3

$$\begin{aligned}\int\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}A &= \int\limits_{-1}^{2}\int\limits_{y^2}^{y+2} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{2}\left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_{-1}^{2}\frac{1}{3}y\left((y+2)^3 - y^6\right)\,\mathrm{d}y = \frac{603}{40}\,.\end{aligned}$$

Příklad 1.11. *Vypočítejme dvojný integrál*

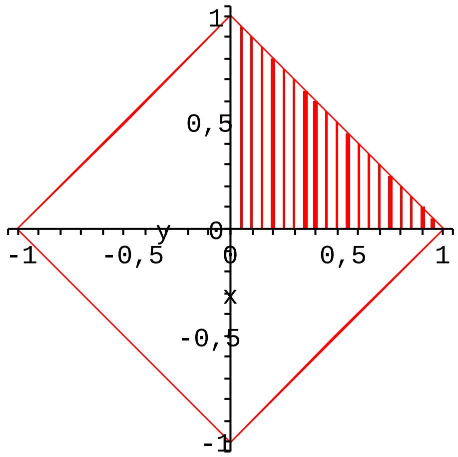
$$\int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde M je množina ohraničená křivkou $|x|+|y|=1$.

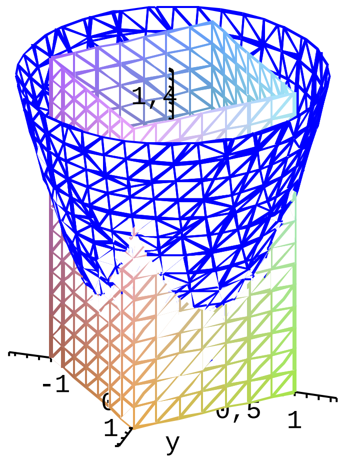
Řešení: Hraniční křivkou množiny M je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ a $(0,-1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ je na množině M spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}A$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce f je na M spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in M \wedge 0\le z\le f(x,y)\right\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou z), je symetrické podle rovin $x=0$ a $y=0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny M ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto



Obr. 4



Obr. 5

vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\int\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A = 4\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_0^1 \left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= 4\int\limits_0^1 \left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,.$$

Příklad 1.12. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (2x+y)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge x+y\leq 3\}$. ***Výsledek:*** $27/2$

Příklad 1.13. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 1 \wedge y\leq x\leq 10y\}$. ***Výsledek:*** 6

Příklad 1.14. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y^2=2x$ *a* $y=2x$.
Výsledek: $\ln(5/4)$

Příklad 1.15. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y^2 = x$, $x = 0$ *a* $y = 1$.

Výsledek: $1/2$

Příklad 1.16. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (x + y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y = x^2$ *a* $y^2 = x$.

Výsledek: $33/140$

Příklad 1.17. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je uzavřená množina ohraničená křivkami* $y = x^2 - 2x + 1$ *a* $y = x + 1$.

Výsledek: $729/28$

Příklad 1.18. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde M *je trojúhelník s vrcholy* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. ***Výsledek:*** $\frac{1}{18}(3\sqrt{3} + 2\pi)$

Příklad 1.19. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M x(y-1)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge y \le x + 1 \wedge y \ge 0\}$. ***Výsledek:*** $-1/12$

Příklad 1.20. *Vypočítejte dvojný integrál*

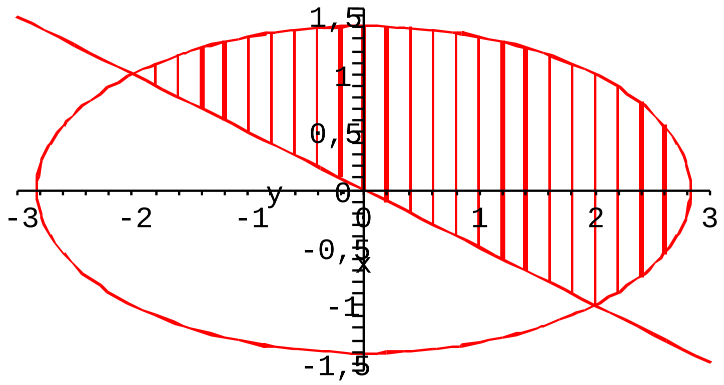
$$\int\limits_M xy\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 8 \wedge y \ge -\frac{x}{2}\right\}$ *(Obr. 6).* ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.21. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.



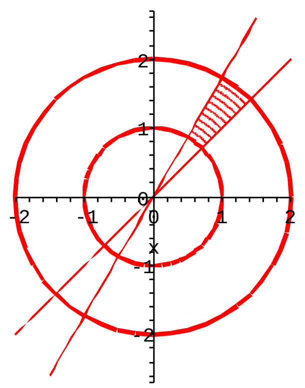
Obr. 6

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

(1) $$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad \text{a } J = r.$$

V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2\rangle \times \langle \pi/4, \pi/3\rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (1) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{array}{cc} 1 \le x^2 + y^2 \le 4, & x \le y \le \sqrt{3}x, \\ 1 \le r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi \le 4, & r\cos\phi \le r\sin\phi \le \sqrt{3}r\cos\phi, \\ 1 \le r \le 2, & 1 \le \operatorname{tg}\phi \le \sqrt{3}, \\ & \frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{3}. \end{array}$$



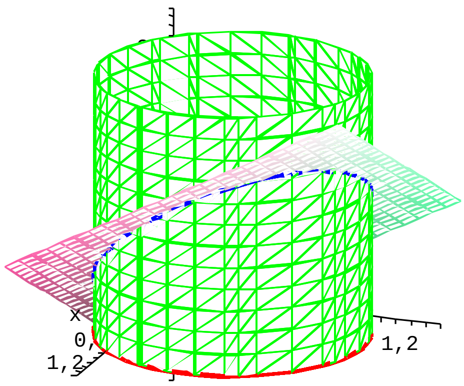
Obr. 7

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\int\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A = \int\limits_N \sqrt{r^2}r\,\mathrm{d}A = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\int\limits_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2\mathrm{d}\phi =$$
$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{7}{3}\,\mathrm{d}\phi = \frac{7}{36}\pi\ .$$

Příklad 1.22. *Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami* $x^2+y^2=x+y$, $z=x+y$ *a* $z=0$.

Řešení: Těleso, jehož objem máme nalézt, je část rotačního válce určeného řídicí kružnicí $x^2+y^2=x+y$, zdola ohraničeného rovinou $z=0$ a shora rovinou $z=x+y$.



Obr. 8

Jak víme již z příkladu 1.11, je objem takového tělesa číselně roven hodnotě dvojného integrálu $\int\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}A$, kde

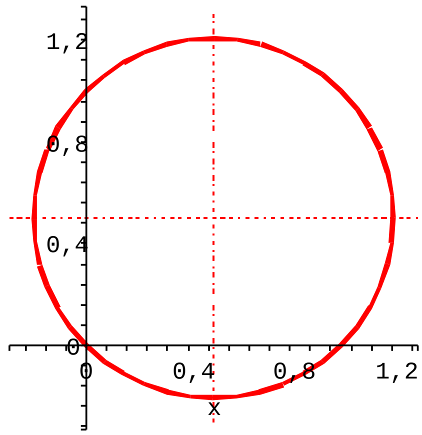
$$M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le x+y\right\}.$$

Doplněním na čtverec a úpravou můžeme podmínku $x^2+y^2\le x+y$ upravit na tvar

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Z (2) je zřejmé, že množina M je kruh se středem v bodě $(1/2,1/2)$ a poloměrem $\sqrt{2}/2$ (Obr. 9).

Dvojný integrál $\int\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}A$ budeme opět počítat pomocí substituce do polárních souřadnic. (Tato substituce převádí integraci přes kruh na integraci přes dvojrozměrný interval.) V našem případě však „posuneme“ těleso tak, aby střed



Obr. 9

řídicí kružnice byl počátek. Toho dosáhneme tak, že substituci do polárních souřadnic budeme volit ve tvaru

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\phi, \quad y = \frac{1}{2} + r\sin\phi \quad \text{a } J = r. \tag{3}$$

Dosazením do (2) dostaneme

$$\begin{gathered} 0 \le \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le \tfrac{1}{2}, \\ 0 \le \left(\tfrac{1}{2} + r\cos\phi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2} + r\sin\phi - \tfrac{1}{2}\right)^2 \le \tfrac{1}{2}, \\ 0 \le r \le \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{gathered}$$

Pro ϕ jsme nedostali žádnou omezující podmínku, je tedy $0 \le \phi \le 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned} \int_M (x+y)\,\mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(r + r^2(\cos\phi + \sin\phi)\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}(\cos\phi + \sin\phi)\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}/2} \mathrm{d}\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{12}(\cos\phi + \sin\phi)\right) \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Při počítání objemu jsme mohli místo substituce pomocí „posunutých“ polárních souřadnic (3) použít substituci (1). Dosazením (1) do podmínky $x^2+y^2 \le x+y$ postupně dostaneme

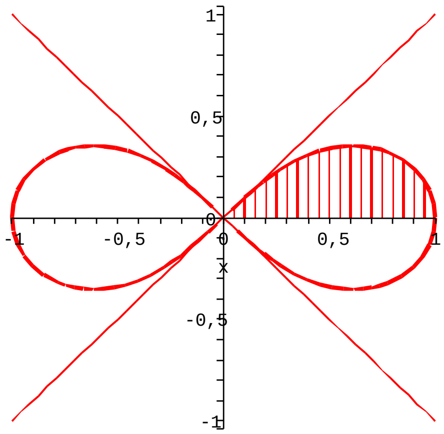
$$\begin{gathered} 0 \le r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \le r(\cos\phi + \sin\phi), \\ 0 \le r \le (\cos\phi + \sin\phi). \end{gathered}$$

Z podmínky $0 \le r \le \cos\phi + \sin\phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\int_M (x+y)\,\mathrm{d}A = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos\phi+\sin\phi} \big(r^2(\cos\phi+\sin\phi)\big)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos\phi + \sin\phi)^4\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\,.$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (3).



Obr. 10

Příklad 1.23. *Vypočítejme obsah množiny M, která je ohraničená lemniskátou $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).*

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A,$$

kde v našem případě je

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2\right\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto křivkou stačí počítat obsah pouze té části M, která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (1) do nerovnice určující M dostaneme

$$0 \leq (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2,$$
$$0 \leq r^4 \leq r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \tag{4}$$

Z podmínky (4) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$\cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle. \tag{5}$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M, pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos\phi \geq 0 \wedge \sin\phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Spolu s (5) tedy dostáváme $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Potom

$$\mu(M) = \int_M \mathrm{d}A = 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi = 1\ .$$

Příklad 1.24. *Vypočítejme dvojný integrál*

$$\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{a } J = abr, \tag{6}$$

V zobrazení (6) (uvažovaném na množině $(0,+\infty) \times (0,2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M, která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (6), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

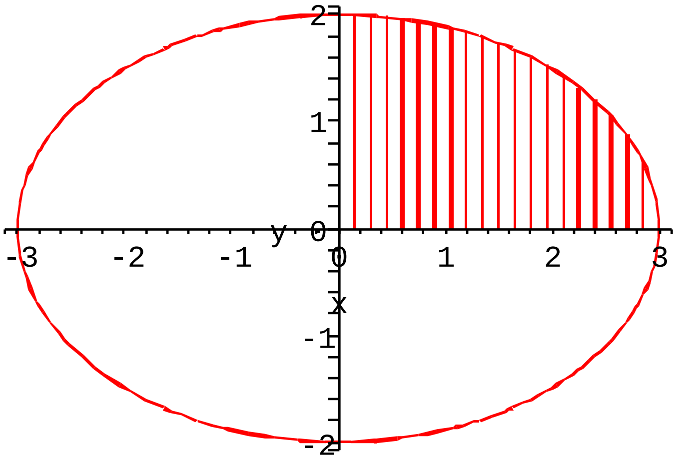
$$x = 3r\cos\phi, \quad y = 2r\sin\phi \quad \text{a } J = 6r,$$

a dosazením do M (za podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$) dostaneme

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\mu(M) = \int_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}A &= 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \left(9r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi\right)6r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi = \\ &= 6\int_0^{\pi/2}\left(9\cos^2\phi + 4\sin^2\phi\right)\,\mathrm{d}\phi = \frac{39}{2}\pi\ .\end{aligned}$$

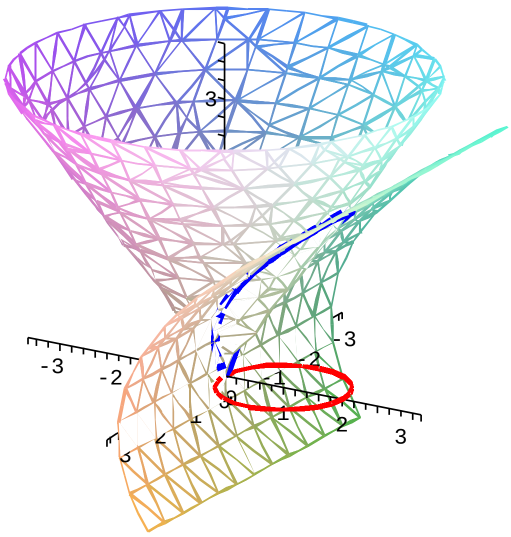


Obr. 11

Příklad 1.25. *Vypočítejme obsah části kuželové plochy* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$*, kterou z ní vytne parabolický válec* $z^2 = 2x$ *(Obr. 12).*

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P, která je částí grafu funkce $z = f(x, y)$, $(x, y) \in M$ platí

(7)



Obr. 12

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z^2 = 2x$

do roviny $z = 0$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tj}, \quad x^2 + y^2 = 2x, \ z = 0.$$

Je tedy

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1, 0)$ a poloměrem 1. Dále je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a odtud

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Substitucí do polárních souřadnic (1) dostaneme

$$S = \int\limits_M \sqrt{2}\,\mathrm{d}A = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2\cos\phi} \sqrt{2} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi = \pi\sqrt{2}\ .$$

Příklad 1.26. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (1 - 3x - 2y)\ \mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x\}$. ***Výsledek:*** $2\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2}$

Příklad 1.27. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq \mathrm{e} \wedge\ y \geq 0\}$. ***Výsledek:*** $\pi/4$

Příklad 1.28. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0\}$. ***Výsledek:*** $\pi(\pi - 2)/4$

Příklad 1.29. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sin\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$. ***Výsledek:*** $-6\pi^2$

Příklad 1.30. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$. ***Výsledek:*** $\frac{5}{48}\pi^2$

Příklad 1.31. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M xy^2 \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2ax\}$ $(a > 0)$. ***Výsledek:*** $a^5\pi/4$

Příklad 1.32. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M y \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \le ay^3\}$ $(a > 0)$. ***Výsledek:*** $\frac{21}{256}\pi a^3$

Příklad 1.33. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M xy \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \le a^2(x^2 - y^2)\}$ $(a > 0)$. ***Výsledek:*** 0

Příklad 1.34. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$. ***Výsledek:*** 4π

Příklad 1.35. *Vypočítejte dvojný integrál*

$$\int\limits_M (x - 2y) \, \mathrm{d}A,$$

kde $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 4 \wedge 0 \le x \le \sqrt{12}y\right\}$. ***Výsledek:*** $\frac{2}{3}(1 - \sqrt{3})$

Příklad 1.36. *Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami* $y = 1 - x^2$ *a* $y = x - 1$. ***Výsledek:*** $9/2$

Příklad 1.37. *Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami* $xy = 9$, $y = x$ *a* $x = 5$. ***Výsledek:*** $8 + 9\ln 3 - 9\ln 5$

V příkladech 1.58 – 1.64 vypočítejte obsahy množiny M.

Příklad 1.38. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \le 1 \wedge x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$.
Výsledek: $(\pi - 2)/2$

Příklad 1.39. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

Výsledek: $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Příklad 1.40. $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^2 \leq xy\right\}$. ***Výsledek:*** 18

V příkladech 1.41 – 1.47 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.41. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq z \leq 9\}$.

Výsledek: $\frac{27}{2}\pi$

Příklad 1.42. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + 4(y-2)^2 \leq z \leq 4\}$.

Výsledek: 4π

Příklad 1.43. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2ax \wedge x \leq z \leq 2x\}$ $(a > 0)$.

Výsledek: πa^3

Příklad 1.44.

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2(y-x) - 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 - (x+1) - (y-1)^2\right\}.$$

Výsledek: $\frac{7}{4}\pi$

Příklad 1.45.

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2(x-y) \wedge 0 \leq z \leq 3 - (x-1)^2 - (y+1)\right\}.$$

Výsledek: 5π

Příklad 1.46. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 27y^2 \leq z \leq 6 - 3x^2 - 27y^2\}$.

Výsledek: π

Příklad 1.47. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - 8x^2 - 2y^2\}$.

Výsledek: π

V příkladech 1.48 – 1.53 vypočítejte objemy těles ohraničených danými plochami:

Příklad 1.48. $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3,\ z = 0,\ z = 4x^2 + 2y^2 + 1$.

Výsledek: 45

Příklad 1.49. $y = 1,\ y = x^2,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2$. ***Výsledek:*** $\frac{88}{105}$

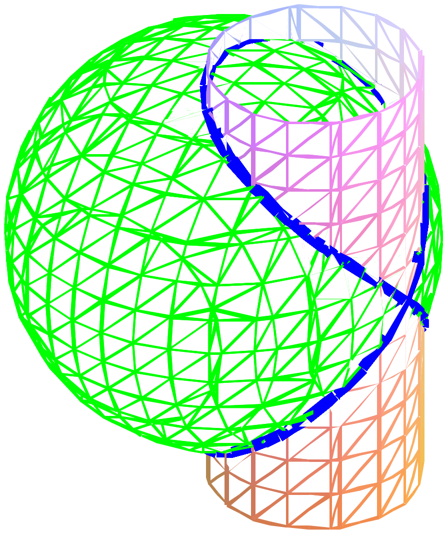
Příklad 1.50. $y = \ln x,\ y = \ln^2 x,\ z = 0,\ y + z = 1$.
(Pomůcka: Platí $\int \ln^n x \,\mathrm{d}x = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \,\mathrm{d}x$.) ***Výsledek:*** $3\,\mathrm{e} - 8$

Příklad 1.51. $x^2 + y^2 = 2x,\ z = xy,\ z = 0$ $(z \geq 0)$. ***Výsledek:*** $2/3$

Příklad 1.52. $x^2 + y^2 = 2y,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0$. ***Výsledek:*** $\frac{3}{2}\pi$

Příklad 1.53. $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ $(a > 0)$.

Výsledek: $\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-a^2}\right)$



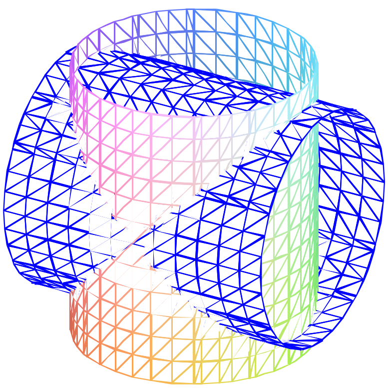
Obr. 13

Příklad 1.54. *Vypočítejte objem tzv. Vivianiova tělesa (Obr. 13)*

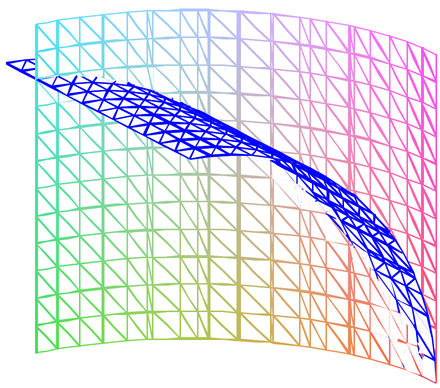
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\right\} \quad (a > 0).$$

Výsledek: $\frac{2}{9}(3\pi - 4)a^3$

Příklad 1.55. *Vypočítejte objem a povrch tělesa ohraničeného dvěma rotačními válcovými plochami o stejném poloměru R, jejichž osy se kolmo protínají (Obr. 14) a (Obr. 15).* ***Výsledek:*** $\frac{16}{3}R^3$, $16R^2$



Obr. 14



Obr. 15

Příklad 1.56. *Vypočítejte obsah části rotačního paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, kterou z něj vyřízne rovina $z = 0$.* ***Výsledek:*** $\pi/2$

Příklad 1.57. *Vypočítejte obsah části hyperbolického paraboloidu $z = 4 + x^2 - y^2$, kterou z něj vyřízne válcová plocha $x^2 + y^2 = 4$.*

Výsledek: $\frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 1)\pi$

V příkladech 1.58 – 1.64 vypočítejte obsahy daných ploch.

Příklad 1.58. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 12 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

Výsledek: $6\sqrt{29}$

Příklad 1.59. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z \wedge 2z^2 \leq xy\}$.

Výsledek: $\frac{1}{9}(20 - 3\pi)$

Příklad 1.60. $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1 \wedge z \geq 0\big\}$.

Výsledek: $\frac{1}{6}\left(3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})\right)\pi$

Příklad 1.61. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 2z \wedge \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

Výsledek: $4(2\sqrt{2} - 1)\pi$

Příklad 1.62. $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge z \geq 0 \wedge z \leq \sqrt{2}(\frac{1}{2}x + 1)\big\}$.

Výsledek: 8π

Příklad 1.63. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geq 0 \wedge |y| \leq x\}$. $(a > 0)$

Výsledek: $2a^2$

Příklad 1.64. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax, z \geq 0\}$ $\quad (a > 0)$.

Výsledek: $(\pi - 2)a^2$, *(Obr. 13)*

Příklad 1.65. *Vypočítejte obsah části zemského povrchu (za předpokladu, že jde o kulovou plochu o poloměru $R = 6378\,km$), ohraničenou poledníky odpovídajícími západním zeměpisným délkám $30°$ a $60°$ a rovnoběžkami odpovídajícími severním zeměpisným šířkám $45°$ a $60°$.*

Výsledek: $\frac{1}{12}R^2\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3.38 \cdot 10^6\,km^2$

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

Nechť M je dvourozměrná množina (rovinná deska), jejíž plošná hustota v každém bodě (x, y) je $h(x, y)$.

(I) Hmotnost této množiny je

$$m = \int_M h(x, y)\,\mathrm{d}A\,. \tag{8}$$

(II) Statický moment této množiny vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y je

$$S_x = \int_M y h(x, y)\,\mathrm{d}A, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_M x h(x, y)\,\mathrm{d}A\,. \tag{9}$$

(III) Souřadnice těžiště této množiny (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

$$x_T = \frac{S_y}{m}, \qquad y_T = \frac{S_x}{m} \ . \tag{10}$$

(IV) Moment setrvačnosti této množiny vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y, resp. vzhledem k počátku je

$$I_x = \int\limits_M y^2 h(x,y)\,\mathrm{d}A \ , \quad \text{resp.} \quad I_y = \int\limits_M x^2 h(x,y)\,\mathrm{d}A \ ,$$

$$\text{resp.} \quad I_z = I_x + I_y = \int\limits_M (x^2+y^2) h(x,y)\,\mathrm{d}A \ . \tag{11}$$

Poznámka 1.66. *V dalších příkladech budeme vždy v případě homogenní desky (tělesa) předpokládat, že $h(x,y) = 1$ ($h(x,y,z) = 1$).*

Příklad 1.67. *Najděme souřadnice těžiště nehomogenní rovinné desky ohraničené kružnicí $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, jejíž plošná hustota v každém bodě (x,y) je rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku $(0,0)$.*

Řešení: Víme, že $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Protože deska je symetrická podle osy x a funkce h je sudá v proměnné y, je zřejmé, že těžiště desky bude ležet na ose x, tj. $y_T = 0$. Pro určení x_T potřebujeme znát celkovou hmotnost desky m a dále statický moment desky vzhledem k ose y (viz (10)). Podle (8) a (9) je

$$m = \int\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A \ , \quad S_y = \int\limits_M x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A \ .$$

Použitím substituce pomocí polárních souřadnic (1) dostaneme

$$\begin{gathered} 0 \le x^2 + y^2 \le 2ax, \\ 0 \le r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \le 2ar\cos\phi, \\ 0 \le r \le 2a\cos\phi \quad \text{a tedy} \quad \phi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle. \end{gathered}$$

Potom

$$\begin{aligned} m = \int\limits_M \sqrt{x^2+y^2} \quad \mathrm{d}A \ &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2a\cos\phi} r^2\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi = \\ &= \ 2\int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\phi} \mathrm{d}\phi = \frac{16}{3}a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{32}{9}a^3 \ , \end{aligned}$$

a

$$S_y = \int\limits_M x\sqrt{x^2+y^2} \quad \mathrm{d}A \;\; = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2a\cos\phi} r^3 \cos\phi \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi =$$

$$= \;\; 8a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^5\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{64}{15}a^4 \; .$$

Podle (10) je tedy

$$x_T = \frac{S_y}{m} = \frac{64a^4}{15} \cdot \frac{9}{32a^3} = \frac{6a}{5}.$$

Příklad 1.68. *Vypočítejme moment setrvačnosti kruhové desky o poloměru R vzhledem k její libovolné tečně t, jestliže její plošná hustota v každém bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od tečny t.*

Řešení: Zvolme si souřadnicový systém tak, že střed kružnice ohraničující desku je v bodě $(0, R)$, tj. její rovnice je $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ a tečna, ke které budeme moment setrvačnosti počítat, je osa x. Potom plošná hustota desky v každém bodě (x, y) je $h(x, y) = y$. Je tedy

$$I_t = I_x = \int\limits_M y^2 h(x,y) \,\mathrm{d}A = \int\limits_M y^3 \,\mathrm{d}A,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2\}$. Použitím substituce pomocí „posunutých" polárních souřadnic

$$x = r\cos\phi, \quad y = R + r\sin\phi \quad \text{a } J = r,$$

pak dostaneme

$$I_t = \int\limits_M y^3 \,\mathrm{d}A = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^R (R + r\sin\phi)^3 r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi = \frac{7}{4}\pi R^5.$$

V příkladech 1.69 – 1.73 vypočítejte souřadnice těžiště rovinných homogenních desek:

Příklad 1.69. *Deska ohraničená parabolou $y^2 = 2x$ a přímkou $x = a$, $(a > 0)$.*
Výsledek: $(3a/5, 0)$

Příklad 1.70. *Deska ohraničená křivkami $4y = x^2$, $x + y = 3$.*
Výsledek: $(-2, 17/5)$

Příklad 1.71. *Deska ohraničená křivkami $y = 2x - 3x^2$, $y = -x$.*
Výsledek: $(1/2, -1/5)$

Příklad 1.72. *Deska ohraničená křivkou $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geq 0$.*
Výsledek: $\left(\frac{3}{16}\pi, 0\right)$

Příklad 1.73. *Deska ohraničená křivkou* $(x^2+y^2)^2 = 2x^2y$, *(*$x \geq 0$, $y \geq 0$*).*
Výsledek: $\left(\frac{16}{15\pi}, \frac{1}{4}\right)$

Příklad 1.74. *Nehomogenní deska má tvar půlkruhu o poloměru* R*, kde plošná hustota v každém bodě desky je rovna vzdálenosti tohoto bodu od středu kruhu. Určete vzdálenost těžiště desky od středu kruhu.* ***Výsledek:*** $\frac{3}{2}\frac{R}{\pi}$

Příklad 1.75. *Nehomogenní deska má tvar čtvrtkruhu o poloměru* R*, kde plošná hustota v každém bodě desky je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu kruhu. Určete vzdálenost těžiště desky od středu kruhu.*
Výsledek: $\frac{8\sqrt{2}}{5}\frac{R}{\pi}$

Příklad 1.76. *Vypočítejte moment setrvačnosti kruhové desky o poloměru* R *a plošné hustotě* $h(x,y) = |x||y|$ *vzhledem k přímce procházející jejím středem.*
Výsledek: $R^6/6$

Příklad 1.77. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní rovinné desky* $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \wedge |y| \leq \frac{1}{2}\right\}$ *vzhledem k ose* x*.*
Výsledek: $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Příklad 1.78. *Vypočítejte moment setrvačnosti rovinné desky ohraničené křivkami* $y = 4 - x^2$ *a* $y = 0$ *vzhledem k ose* x*, jestliže plošná hustota v každém bodě je rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy* y*.* ***Výsledek:*** $64/3$

Příklad 1.79. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní desky ohraničené elipsou* $4(x+1)^2 + y^2 = 4$ *vzhledem k ose* y*.*
Výsledek: $5\pi/2$

Příklad 1.80. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní rovinné desky* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \leq a^2(x^2-y^2)\}$, $(a > 0)$ *vzhledem k ose* x *a* y*.*
Výsledek: $I_x = \frac{1}{48}(3\pi - 8)a^4, I_y = \frac{1}{48}(3\pi + 8)a^4$

1.2. Trojné integrály.

Příklad 1.81. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int\limits_W (2x - y + z)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 2,3\rangle$*.*

Řešení: Funkce $f(x,y,z) = 2x - y + z$ je na trojrozměrném intervalu W spojitá. Užitím Fubiniovy věty převedeme trojný integrál na jednoduchý integrál z dvojného integrálu

$$\int\limits_W (2x - y + z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_M (2x - y + z)\,\mathrm{d}A \right) \mathrm{d}x.$$

K výpočtu dvojného integrálu nyní použijeme opět Fubiniovu větu (pro dvojný integrál) a tím převedeme zadaný trojný integrál na trojnásobný integrál

$$\int\limits_W (2x - y + z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \int\limits_1^2 \int\limits_2^3 (2x - y + z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_1^2 \left[2xz - yz + \frac{z^2}{2}\right]_{z=2}^{z=3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_1^2 \left(2x - y + \frac{5}{2}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2} + \frac{5}{2}y\right]_{y=1}^{y=2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x + 1)\,\mathrm{d}x = 2.$$

Příklad 1.82. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W \left(x^3 y - \frac{z}{y}\right) \mathrm{d}V,$$

kde $W = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. ***Výsledek:*** $3/4 - 2\ln 2$

Příklad 1.83. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W xy^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \langle -2, 1\rangle \times \langle 1, 3\rangle \times \langle 2, 4\rangle$. ***Výsledek:*** $52(\sqrt{2} - 4)/3$

Příklad 1.84. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W xy^2 z^3\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle \times \langle 0, 4\rangle$. ***Výsledek:*** 1152

Příklad 1.85. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W x^2 z\,\mathrm{e}^{x-y+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

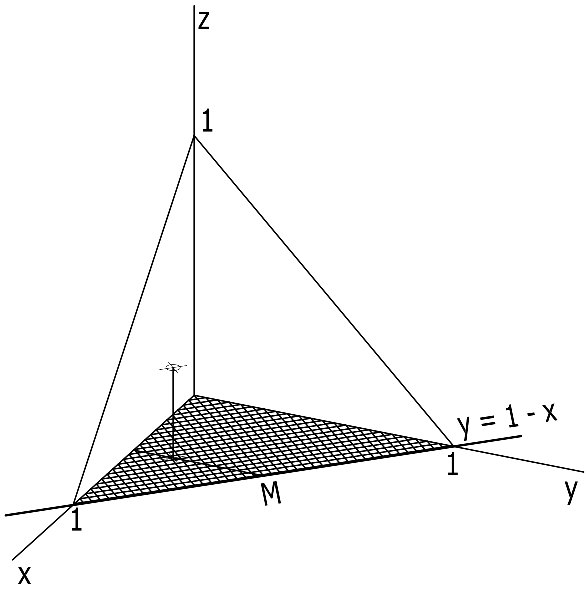
kde $W = \langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 0\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. ***Výsledek:*** $(\mathrm{e}^2 - 5)(\mathrm{e}^2 - 1)(\mathrm{e} - 1)/(2\,\mathrm{e})$

Příklad 1.86. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int\limits_W \frac{1}{1 + x + y}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

Řešení: Množina W je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník M (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a



Obr. 16

$(0,1)$. Zřejmě $\forall (x,y) \in M$ je $0 \le z \le 1 - x - y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int\limits_W \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}V = \int\limits_M \left(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

Zapíšeme-li množinu M ve tvaru

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1 - x \right\},$$

můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

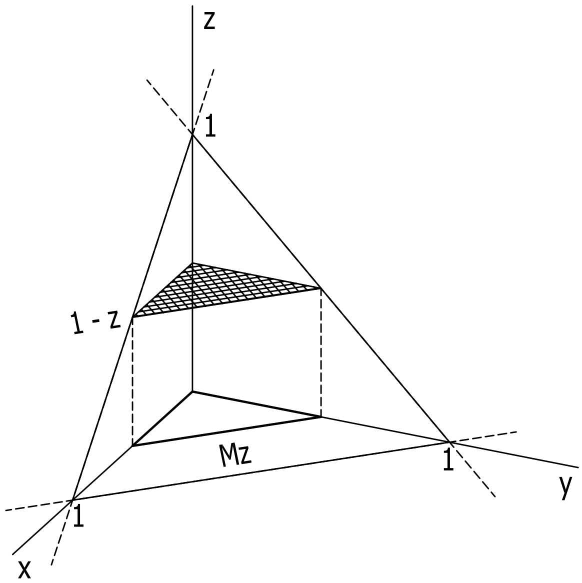
$$\int\limits_W \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2\ln(1+x+y) - y \right]_{y=0}^{y=1-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2\ln 2 - 2\ln(x+1) + x - 1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:



Obr. 17

Pro libovolné $z \in \langle 0,1\rangle$ leží vždy bod (x,y) v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny xy $(z=0)$ je trojúhelník M_z s vrcholy $(0,0)$, $(1-z,0)$, $(0,1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int\limits_W \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{M_z} \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}A \right) \mathrm{d}z.$$

Zapíšeme-li množinu M_z ve tvaru

$$M_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le (1-z) \wedge 0 \le y \le (1-x-z) \right\},$$

může opět použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál zadaný trojný integrál převést na trojnásobný integrál

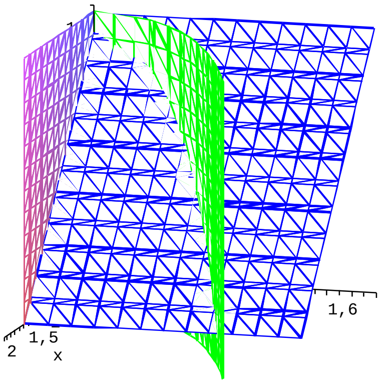
$$\int\limits_W \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-z} \int\limits_0^{1-x-z} \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

Příklad 1.87. *Vypočítejme trojný integrál*

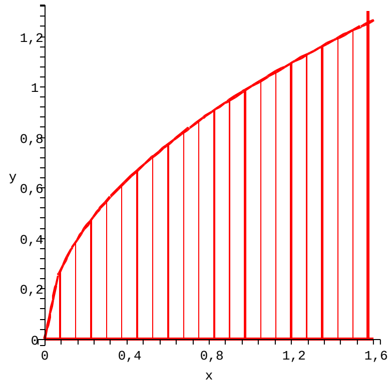
$$\int\limits_W y\cos(x+z)\,\mathrm{d}V,$$

kde W je množina ohraničená plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Řešení: Množina W (Obr. 18) je část válce ohraničeného válcovou plochou $y=\sqrt{x}$ a rovinou $y=0$. Zdola je ohraničena rovinou $z=0$ a shora rovinou



Obr. 18



Obr. 19

$x+z=\frac{\pi}{2}$. Kolmý průmět M množiny W do roviny xy je část roviny ohraničená přímkami $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ a parabolou $y=\sqrt{x}$ (Obr. 19),

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le \frac{\pi}{2}\wedge 0\le y\le\sqrt{x}\right\}.$$

a $0\le z\le -x+\frac{\pi}{2}$. Potom

$$\begin{aligned}
\int\limits_W y\cos(x+z)\,\mathrm{d}V &= \int\limits_M\left(\int\limits_0^{-x+\pi/2} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A=\\
&=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{x}}\int\limits_0^{-x+\pi/2} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{x}}\left[y\sin(x+z)\right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\\
&=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{y^2}{2}(1-\sin x)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}=\\
&=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(x-x\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.88. *Vypočítejte trojný integrál*

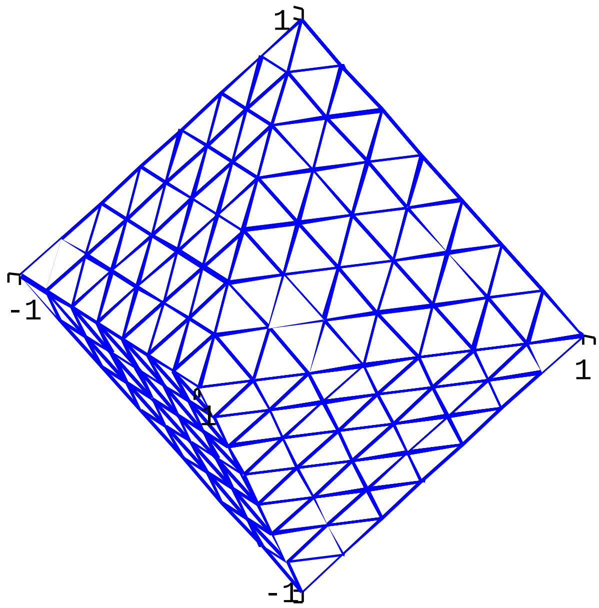
$$\int\limits_W z\,\mathrm{d}V,$$

kde W je množina ohraničená plochami $x=2$, $y=0$, $z=0$, $y=2x$, $z=x^2$.

Výsledek: $32/3$

Příklad 1.89. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W z^4\sin^3 y\,\mathrm{d}V,$$



Obr. 20

kde W je množina ohraničená plochami $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi/2$, $z = 0$, $z = x$.

Výsledek: $\pi^6/45$

Příklad 1.90. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W xy^2 \sin(x + y + z)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

Výsledek: $\pi^4/192 - \pi^2/4 + 2$

Příklad 1.91. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W xyz\,\mathrm{d}V,$$

kde W je množina ohraničená plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = xy$.

Výsledek: $1/96$

Příklad 1.92. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W x^2\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$ *(Obr. 20).* ***Výsledek:*** $2/15$

Příklad 1.93. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W \frac{x^3yz}{(1+z^2)^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\ge 0 \wedge y\ge 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\Big\}$.

Výsledek: $\frac{1}{16}\ln 5 - \frac{1}{60}$

Příklad 1.94. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le a^2 \wedge \sqrt{x^2+y^2}\le z\Big\}$ $(a>0)$.

Řešení: Množina W je část koule se středem v bodě $(0,0,0)$ a poloměrem a, kterou z ní vyřízne kuželová plocha $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Pro výpočet tohoto integrálu použijeme substituci pomocí sférických souřadnic

$$x = r\cos\phi\cos\psi,\ \ y = r\sin\phi\cos\psi,\ \ z = r\sin\psi \ \text{ a } J = r^2\cos\psi. \tag{12}$$

Použitím (12) a dosazením do nerovností definujících W dostaneme

$$\begin{gathered} x^2+y^2+z^2 \le a^2,\\ r^2\left(\cos^2\psi(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\sin^2\psi\right)\le a^2,\\ 0\le r\le a, \end{gathered} \qquad \begin{gathered} \sqrt{x^2+y^2}\le z,\\ \sqrt{r^2\cos^2\psi(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}\le r\sin\psi,\\ \operatorname{tg}\psi\ge 1,\\ \pi/4\le\psi\le\pi/2. \end{gathered}$$

Pro ϕ jsme nedostali žádnou podmínku, je tedy $0\le\phi\le 2\pi$. Nyní použitím věty o substituci a současně Fubiniovy věty dostaneme

$$\int\limits_W \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^a \sqrt{r^2\cos^2\psi(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}\,r^2\cos\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\phi =$$

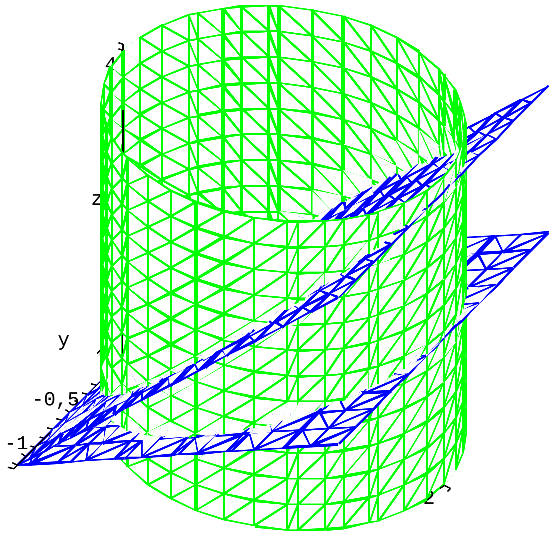
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^a r^3\cos^2\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\phi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\cos^2\psi\right]_{r=0}^{r=a}\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\phi = \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left[\psi+\frac{\sin 2\psi}{2}\right]_{\psi=\pi/4}^{\psi=\pi/2}\mathrm{d}\phi = \frac{a^4}{16}\pi(\pi-2).$$

Příklad 1.95. *Vypočítejme trojný integrál*

$$\int\limits_W xz\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2x \wedge x\le z\le 2x\}$.



Obr. 21

Řešení: Množina W je část rotačního válce $x^2+y^2 \leq 2x$ seříznutého zdola rovinou $z = x$ a shora rovinou $z = 2x$ (Obr 21). Kolmým průmětem W do roviny xy je kruh ohraničený kružnicí $x^2 + y^2 = 2x$.

Pro výpočet integrálu použijeme substituci do cylindrických souřadnic

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = Z \quad \text{a } J = r. \tag{13}$$

Použitím (13) a dosazením do nerovností definujících W dostaneme

$$\begin{array}{cc} x^2+y^2 \leq 2x & x \leq z \leq 2x, \\ 0 \leq r \leq 2\cos\phi, & r\cos\phi \leq Z \leq 2r\cos\phi. \end{array}$$

z podmínky $2\cos\phi \geq 0$ pak dostáváme $\cos\phi \geq 0$, tj. $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$.

Použitím věty o substituci a současně Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\int\limits_W xz \,\mathrm{d}V = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{2\cos\phi} \int\limits_{r\cos\phi}^{2r\cos\phi} r^2 Z\cos\phi \,\mathrm{d}Z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{2\cos\phi} r^2\cos\phi \left[\frac{Z^2}{2}\right]_{Z=r\cos\phi}^{Z=2r\cos\phi} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{3}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{2\cos\phi} r^4\cos^3\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\phi \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2\cos\phi} \mathrm{d}\phi = \frac{96}{10}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{21}{8}\pi.$$

Příklad 1.96. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\}$.

Výsledek: $\pi/8$

Příklad 1.97. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9 \wedge z \ge 0\}$. ***Výsledek:*** $844/15\pi$

Příklad 1.98. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le z\}$. ***Výsledek:*** $\pi/10$

Příklad 1.99. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$. ***Výsledek:*** $8\pi(\mathrm{e}^2-1)$

Příklad 1.100. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2az \wedge x^2+y^2 \le 3z^2\}$ $(a>0)$.

Výsledek: $21\pi a^5/10$

Příklad 1.101. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V,$$

kde W *je množina ohraničená plochami* $y=0$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$, $x^2+y^2=2x$.

Výsledek: $8a^2/9$

Příklad 1.102. *Vypočítejte trojný integrál*

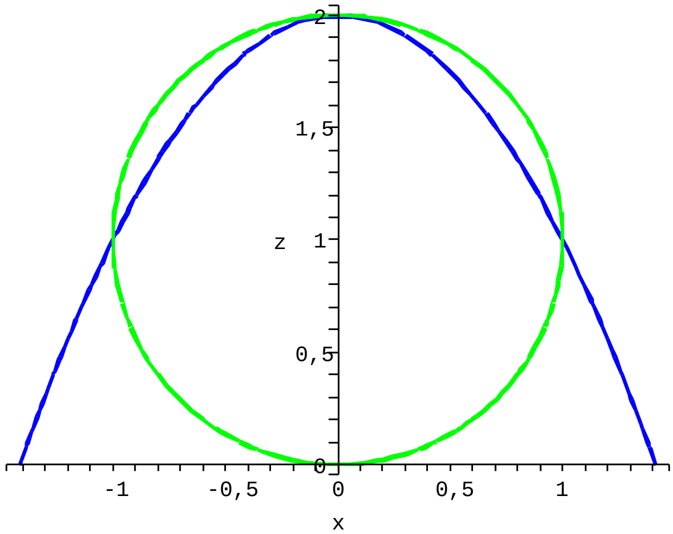
$$\int\limits_W (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde W *je množina ohraničená plochami* $2z=x^2+y^2$, $z=2$. ***Výsledek:*** $16\pi/3$

Příklad 1.103. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int\limits_W x^2y^2z\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\right\}$. ***Výsledek:*** $\pi/192$



Obr. 22

Příklad 1.104. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. ***Výsledek:*** $32\pi/3$

Příklad 1.105. *Vypočítejte trojný integrál*

$$\int_W (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,$$

kde $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 3a^2 \wedge x^2+y^2 \le 2az\}$ $(a > 0)$.
Výsledek: $\pi a^5(108\sqrt{3} - 97)/30$

Příklad 1.106. *Vypočítejme objem tělesa ohraničeného plochami* $x^2+y^2 = 2-z$ *a* $x^2+y^2+z^2 = 2z$.

Řešení: Těleso můžeme popsat jako množinu

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2z \wedge x^2+y^2 \le 2-z\right\}.$$

Objem množiny (míru množiny) W pak vypočítáme jako

$$\mu(W) = \int_W \mathrm{d}V.$$

Těleso, jehož objem počítáme, je průnik koule a rotačního paraboloidu. Řez tělesa rovinou $y = 0$ je na Obr. 22.

Z geometrie víme, že obě plochy jsou rotační a mají společnou osu. Proto jejich průnikem je kružnice. Řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 2z, \\ x^2 + y^2 &= 2 - z, \end{aligned}$$

zjistíme, že kružnice průniku leží v rovinách o rovnicích $z = 2$ a $z = 1$ s tím, že kružnice v rovině $z = 2$ se redukuje na bod o souřadnicích $(0, 0, 2)$ a v rovině $z = 1$ je průnikem kružnice, jejíž kolmý průmět do roviny xy má rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Celé těleso se tedy promítne do roviny xy jako kruh M: $x^2 + y^2 \leq 1$. Pro libovolné $(x, y, z) \in W$ je tedy

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$$

Užitím Fubiniovy věty pro trojný integrál pak dostaneme

$$\begin{aligned} \Omega = \int\limits_W \mathrm{d}V &= \int\limits_M \left(\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A = \\ &= \int\limits_M \Big((1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}) - (2 - x^2 - y^2) \Big) \, \mathrm{d}A = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \Big(r - r^3 + r\sqrt{1 - r^2} \Big) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

Pro výpočet dvojného integrálu jsme použili substituci do polárních souřadnic (1).

V příkladech 1.107 – 1.111 vypočítejte objemy daných těles.

Příklad 1.107. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$. ***Výsledek:*** $8/3$

Příklad 1.108. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$. ***Výsledek:*** $7/12$

Příklad 1.109. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, *přičemž* $z \geq 0$ *a* $0 < a < b$. ***Výsledek:*** $(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)\pi/3$

Příklad 1.110. *Těleso je ohraničeno plochami* $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. ***Výsledek:*** $32\pi/3$

Příklad 1.111. *Těleso je ohraničeno plochami* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$.

Výsledek: $80\pi/3$

Fyzikální aplikace trojného integrálu

Nechť W je trojrozměrné těleso, jehož hustota v každém bodě (x, y, z) je $h(x, y, z)$.

(I) Hmotnost tohoto tělesa je

$$m = \int_W h(x, y, z)\,\mathrm{d}V\ . \tag{14}$$

(II) Statický moment tohoto tělesa vzhledem k rovině xy, resp. vzhledem k rovině xz, resp. vzhledem k rovině yz

$$S_{xy} = \int_W zh(x, y, z)\,\mathrm{d}V,\ S_{xz} = \int_W yh(x, y, z)\,\mathrm{d}V,\ S_{yz} = \int_W xh(x, y, z)\,\mathrm{d}V. \tag{15}$$

(III) Souřadnice těžiště tohoto tělesa (v pravoúhlém souřadnicovém systému) jsou

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \qquad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \qquad z_T = \frac{S_{xy}}{m}. \tag{16}$$

(IV) Moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose x, resp. vzhledem k ose y, resp. vzhledem k ose z je

$$I_x = \int_W (y^2 + z^2)h(x, y, z)\,\mathrm{d}V\ ,$$

$$I_y = \int_W (x^2 + z^2)h(x, y, z)\,\mathrm{d}V\ ,$$

$$I_z = \int_W (x^2 + y^2)h(x, y, z)\,\mathrm{d}V\ . \tag{17}$$

V příkladech 1.112 – 1.116 vypočítejte souřadnice těžiště homogenních těles ohraničených danými plochami.

Příklad 1.112. $x + y + z = 2a,\ x = a,\ y = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
Výsledek: $(5a/12, 5a/12, 5a/12)$

Příklad 1.113. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0.$ ***Výsledek:*** $(0, 0, 1/4)$

Příklad 1.114. $x^2 + y^2 = 2z,\ z = 1.$ ***Výsledek:*** $(0, 0, 2/3)$

Příklad 1.115. $x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z.$ ***Výsledek:*** $(1, 1, 5/3)$

Příklad 1.116. $x^2 + y^2 = 2az,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\ (a > 0).$
Výsledek: $(0, 0, 5a(6\sqrt{3} + 5)/83)$

Příklad 1.117. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního tělesa ohraničeného plochami* $z = x^2 + y^2,\ x + y = \pm 1,\ x - y = \pm 1,\ z = 0$ *vzhledem k ose* x.
Výsledek: $14/45$

Příklad 1.118. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R vzhledem k přímce, která se jí dotýká.* ***Výsledek:*** $28\pi R^5/15$

Příklad 1.119. *Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní kostky o hraně a vzhledem k její libovolné hraně.* ***Výsledek:*** $2a^5/3$

Příklad 1.120. *Hustota v každém bodě nehomogenní koule o poloměru R je rovna vzdálenosti tohoto bodu od jejího středu. Vypočítejte moment setrvačnosti této koule vzhledem k (libovolné) přímce, která*

a) prochází středem koule,

b) se dotýká povrch koule.

Výsledek: $4\pi R^6/9$, $13\pi R^6/9$