ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. (7 bodů) Vyřešete následující diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x-y-1}{x+y+3}.$$

[Návod: Rovnice typu $y' = f\left(\frac{Ax+By+C}{\alpha x+\beta y+\delta}\right)$ se řeší pomocí substituce $u = x - x_0$ a $v = y - y_0$, kde dvojice $[x_0, y_0]$ je jediné řešení soustavy rovnic $Ax + By + C = 0$, $\alpha x + \beta y + \delta = 0$. Pokud soustava nemá jediné řešení, je vhodné použít substituci $z = Ax + By$ nebo $z = \alpha x + \beta y$.]

2. (6 bodů) Vyřešete následující diferenciální rovnici

$$y'' + y' + \frac{5}{2}y = 25\cos 2x.$$

3. (5 bodů) Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+1}$ v bodě $[0,4,?]$.

4. (9 bodů) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$$

vzhledem k podmínce $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

5. (6 bodů) Spočítejte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x,y)$ zadané implicitně rovnicí

$$\operatorname{arctg}(x+y) + \operatorname{arctg}(y+z) = x + y + z.$$

6. (7 bodů) Předpokládejme, že pro funkce f a g existují derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte platnost následující rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

je-li $u = f(x + g(y))$.

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M2100.
- Ústní část zkoušky začíná ve 14^{00} v učebně MS2 na ÚMS.

1)

$$y' = \frac{x-y-1}{x+y+3}$$

$$x-y=1$$
$$x+y=-3$$
$$2x=-2$$
$$\underline{x=-1} \qquad \underline{y=-2}$$

$$u = x+1$$
$$v = y+2$$
$$v' = y'$$

$$v' = \frac{(u-1)-(v-2)-1}{(u-1)+(v-2)+3} = \frac{u-v}{u+v}$$

$$v' = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}} \qquad \frac{v}{u} = z$$
$$z'u + z = v'$$

$$z'u + z = \frac{1-z}{1+z}$$

$$z'u = \frac{1-z-z(1+z)}{1+z} = \frac{1-2z-z^2}{1+z} \quad , \quad 1-2z-z^2 \neq 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \mp \frac{\sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$-\frac{1+z}{z^2+2z-1}\,dz = \frac{1}{u}\,du$$

$$-\frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = \ln|u| + C_2 \quad , \quad C_2 \in R$$

$$\ln|z^2+2z-1| = -2\ln|u| + C_1 \quad , \quad C_1 \in R$$

$$|z^2+2z-1|\,u^2 = K \quad , \quad K>0$$

$$(z^2+2z-1)\,u^2 = C \quad , \quad C \in \mathbb{R} \text{ , neboť pro } z=-1\pm\sqrt{2} \text{ je } C=0$$

$$v^2 + 2vu - u^2 = C$$

$$\underline{(y+2)^2 + 2(x+1)(y+2) - (x+1)^2 = C}$$

2) $y'' + y' + \frac{5}{2} y = 25 \cos 2x$

$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{2} = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{5}{2}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1-10}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$

$y_H(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x \right)$

$y_p(x) = A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$

$y_p'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

$y_p''(x) = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$

$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + \frac{5}{2} A \cos 2x + \frac{5}{2} B \sin 2x = 25 \cos 2x$

$-4A + 2B + \frac{5}{2} A = 25$

$-4B - 2A + \frac{5}{2} B = 0$

$-\frac{3}{2} B = 2A$

$A = -\frac{3}{4} B$

$3B + 2B - \frac{15}{8} B = 25$

$\frac{25}{8} B = 25$

$\underline{B = 8}$

$\underline{A = -6}$

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x \right) + 8 \sin 2x - 6 \cdot \cos 2x}}$$

3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+xy+1}$, $[0,4,?]$, $[x_0,y_0]=[0,4]$

$f(x_0,y_0)=1$

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+1}}\cdot(2x+y)\Big|_{[0,4]}=2$$

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+1}}\cdot x\Big|_{[0,4]}=0$$

$t:\ z-1=2(x-0)+0\cdot(y-4)$

$t:\ 2x-z+1=0$

$n:\ x=2t$
$y=4$
$z=1-t$

---

4) $f(x,y)=\sqrt{3}\,x-y+2$, $x^2+2x+y^2=0$

$L(x,y,\lambda)=\sqrt{3}\,x-y+2+\lambda(x^2+2x+y^2)$

$$\left.\begin{aligned}L_x&=\sqrt{3}+2x\lambda+2\lambda=0\\ L_y&=-1+2y\lambda=0\\ x^2&+2x+y^2=0\end{aligned}\right\}$$

$2y\lambda=1$

$y=\frac{1}{2\lambda}$

$2\lambda x=-2\lambda-\sqrt{3}$

$x=-1-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}$

$$\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2+2\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}\right)+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2=0$$

$$1+\frac{\sqrt{3}}{\lambda}+\frac{3}{4\lambda^2}-2-\frac{\sqrt{3}}{\lambda}+\frac{1}{4\lambda^2}=0$$

$\frac{4}{4\lambda^2}=1$

$\frac{1}{\lambda^2}=1$

$\lambda=\pm 1$

$y = \pm \frac{1}{2}$

$$x = \begin{cases} \xrightarrow{+1} -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ \searrow -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{cases}$$

stacionární body:

$$\left[-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right], \lambda = 1$$

$$\left[\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\tfrac{1}{2}\right], \lambda = -1$$

$L_{xx} = 2\lambda$

$L_{xy} = 0$

$L_{yy} = 2\lambda$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$\left[-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right], \lambda = 1$: $\begin{vmatrix} \overset{>0}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ poz. def., minimum

$\left[\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\tfrac{1}{2}\right], \lambda = -1$: $\begin{vmatrix} \overset{<0}{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ neg. def., maximum

vázané lokální maximum: $\left[\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\tfrac{1}{2}\right]$, $f_{MAX} = 4 - \sqrt{3}$

vázané lokální minimum: $\left[-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$, $f_{MIN} = -\sqrt{3}$

M2100 IV: 18.6.2009

-V-

5) $\operatorname{arctg}(x+y) + \operatorname{arctg}(y+z) = x+y+z$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} + \frac{1}{1+(y+z)^2} \cdot z_x = 1 + z_x$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} - 1 = \left(1 - \frac{1}{1+(y+z)^2}\right) z_x$$

$$z_x = \frac{\dfrac{1-1-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}{\dfrac{1+(y+z)^2-1}{1+(y+z)^2}}$$

$$z_x = -\frac{(x+y)^2\left[1+(y+z)^2\right]}{(y+z)^2\left[1+(x+y)^2\right]}$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} + \frac{1}{1+(y+z)^2}(1+z_y) = 1 + z_y$$

$$\frac{1}{1+(x+y)^2} = \left(1 - \frac{1}{1+(y+z)^2}\right)(1+z_y)$$

$$\frac{\dfrac{1}{1+(x+y)^2}}{\dfrac{1+(y+z)^2-1}{1+(y+z)^2}} = 1 + z_y$$

$$\frac{1+(y+z)^2}{(y+z)^2\left[1+(x+y)^2\right]} = 1 + z_y$$

$$z_y = \frac{1+(y+z)^2 - (y+z)^2\left[1+(x+y)^2\right]}{(y+z)^2\left[1+(x+y)^2\right]}$$

$$z_y = \frac{1-(y+z)^2(x+y)^2}{(y+z)^2\left[1+(x+y)^2\right]}$$

Πλdoo IV: 18.6.2009

- VI -

6) $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u = f(x+g(y))$$

$$u_x = f'(x+g(y))\cdot 1 \qquad u_{xx} = f''(x+g(y))$$

$$u_y = f'(x+g(y))\cdot g'(y) \qquad u_{xy} = f''(x+g(y))\cdot g'(y)$$

$$\cancel{f'(x+g(y))}\cdot \boxed{f''(x+g(y))}\cdot \cancel{g'(y)} = \cancel{f'(x+g(y))}\cdot \cancel{g'(y)}\cdot \boxed{f''(x+g(y))}$$

$$0 = 0 \checkmark$$