

## Rovnice matematické fyziky cvičná písemka

### I. část

1. Najděte vlastní čísla Sturmovy-Liouvilleovy úlohy

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda y, & x \in (0, \ell) \\ y(0) - y'(0) &= 0 = y(\ell) + y'(\ell). \end{aligned}$$

2. Najděte distributivní derivaci funkce  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$

3. Najděte obecné řešení rovnice  $xu_x - yu_y = x$ .

4. Určete typ rovnice  $u_{xx} - u_{xy} + xu_{yz} + (x^2 - y^2)u_z + (y^2 - z^2)u_x - (\operatorname{arctg}(z^2 - x^2))u_y = 0$  v bodě  $(1, 0, 4)$ .

5. Řešte Neumanovu úlohu pro Laplaceovu rovnici

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} &= x, & x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

6. Řešte Dirichletovu úlohu pro Poissonovu rovnici

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 2, & x > y^2 \\ u(x, y) &= 0, & x = y^2. \end{aligned}$$

### II. část

1. Najděte řešení rovnice

$$(y(x+y) + u)u_x + (x(x+y) - u)u_y = (x+y)u$$

s okrajovou podmínkou  $u(x, x) = x$ .

2. Transformací na kanonický tvar najděte obecné řešení rovnice

$$(1+x^2)u_{xx} - (1+y^2)u_{yy} + xu_x - yu_y = 0.$$

3. Řešte úlohu

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= a^2 u_{xx}(t, x), & 0 < t, \quad 0 < x < \ell, \\ u(0, x) &= 0, & 0 < x < \ell, \\ u(t, 0) &= u_0, \quad u_x(t, \ell) = 0, & 0 < t. \end{aligned}$$

---

Čas na vypracování: I. část 80 minut, II. část 40 minut.

Bodování: I. část  $6 \times 1$  bod, II. část  $3 \times 2$  body.

Hodnocení: I. část: dosáhnout alespoň 4 body.

II. část: [5,6]=A, [4,5]=B, [3,4]=C, [2,3]=D, [1,2]=E, [0,1]=F.

---

Výsledky: II.  $\lambda_k = \left(\frac{\xi_k}{\ell}\right)^2$ , kde  $\xi_k$  jsou kladné kořeny rovnice  $\frac{2\xi\ell}{\xi^2 - \ell^2} = \operatorname{tg} \xi$ . I2.  $T_{2|x|}$ . I3.  $\Phi(xy, x - u) = 0$ .

I4. hyperbolická I5.  $u(x, y) = A + x$ . I6.  $u(x, y) = y^2 - x$ .

II1.  $u(x, y) = \frac{x+y}{2}$ . II2.  $u(x, y) = \Phi\left((x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})\right) + \Psi\left(\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$ .

II3.  $u(t, x) = u_0 \left(1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left\{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2\ell}\right)^2 t\right\} \sin \frac{2k+1}{2\ell} \pi x\right)$ .