1. Stochasticky nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 mají binomické rozdělení, kde $X_1 \sim Bi(13; 0,13)$ a $X_2 \sim Bi(12; 0,12)$.
   (a) Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina X_1 nabude hodnoty alespoň 1. [0,8364]
   (b) Uvažme transformované náhodné veličiny $Y_1 = 2X_1 + X_2$ a $Y_2 = X_1 - 3X_2$. Vypočítejte koeficient korelace mezi veličinami Y_1 a Y_2. [-0,0897]

2. Náhodné veličiny U, V, W jsou nezávislé a platí: $E(U) = 0$, $E(V) = 1$, $E(W) = 2$, $D(U) = 2$, $D(V) = 4$, $D(W) = 6$. Určete koeficient korelace náhodných veličin $X = V - U$ a $Y = W - U$. $[\frac{\sqrt{3}}{6}]$

3. Je dána náhodná veličina $X \sim Ex(\lambda), \lambda > 0$. Vypočtěte střední hodnotu transformované náhodné veličiny $Y = \mathrm{e}^{-\gamma X}$, kde $\gamma > 0$. $\left[\frac{\lambda}{\lambda+\gamma}\right]$

Číselné charakteristiky náhodných vektorů

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor. Reálný vektor

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n))'$$

se nazývá **vektor středních hodnot**, reálná čtvercová symetrická matice

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \ldots & C(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_n, X_1) & C(X_n, X_2) & \ldots & D(X_n) \end{pmatrix}$$

se nazývá **varianční matice** a reálná čtvercová symetrická matice

$$\mathrm{cor}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \ldots & R(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(X_n, X_1) & R(X_n, X_2) & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá **korelační matice**.

4. Spojitý náhodný vektor (X, Y) má hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny charakteristiky náhodného vektoru.
$$\left[E(X, Y) = (\tfrac{5}{12}, \tfrac{7}{12})',\ \mathrm{cov}(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & \frac{1}{144} \\ \frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix},\ \mathrm{cor}(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}\right]$$

5. Je dán náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)' \sim Rd(G)$, kde $G = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Ukažte, že náhodné veličiny X_1, X_2 jsou nekorelované, ale nejsou stochasticky nezávislé.

6. Je dán náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ se sdruženou pravděpodobnostní funkcí:

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + 1}{15} & x_1 = 0, 1, 2;\ x_2 = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny charakteristiky.
$$\left[E(X_1, X_2) = (\tfrac{19}{15}, \tfrac{9}{15})',\ \mathrm{cov}(X_1, X_2) = \tfrac{1}{225}\begin{pmatrix} 134 & -6 \\ -6 & 54 \end{pmatrix},\ \mathrm{cor}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & -0,07053 \\ -0,07053 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

7. Spojitý náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ je rovnoměrně spojitě rozdělen na oblasti $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x_1 < 1, 0 \le x_2 < 1, x_1 + x_2 \le 1\}$. Určete $C(X_1, X_2)$. $[C(X_1, X_2) = -\frac{1}{36}]$