1. Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ má střední hodnotu $E(\boldsymbol{X}) = (0,1,2)'$ a varianční matici

$$\operatorname{cov}\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & 4 & 0.5 \\ -1 & 0.5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete $E(\boldsymbol{Y})$ a $\operatorname{cov}\boldsymbol{Y}$ náhodného vektoru $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$, pro jehož složky platí $Y_1 = 2X_1 - 2X_2 + X_3,\ Y_2 = X_1 - X_3,\ Y_3 = X_1 - X_2 + 2X_3$.

$$\left[E(\boldsymbol{Y}) = (0,-2,3)',\ \operatorname{cov}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 10.5 \\ -2 & 8 & -10 \\ 10.5 & -10 & 18 \end{pmatrix} \right]$$

2. Je dán náhodný vektor $(X,Y)'$, který je rovnoměrně rozdělen na kruhové oblasti o poloměru 1. Určete hodnotu podmíněného rozptylu $D(Y|X)$.

[$(1-x^2)/3$ pro $x \in (-1,1)$]

Další číselné charakteristiky

Nechť X, X_1, X_2 jsou náhodné veličiny, k, k_1, k_2 reálná čísla, r, s přirozená čísla. Pak číslo

- $E([X-k]^r)$ se nazývá r-tý **moment** náhodné veličiny X,
- $E([X_1-k_1]^r[X_2-k_2]^s)$ se nazývá $r \times s$-tý **smíšený moment** náhodného vektoru $(X_1, X_2)'$.

Je-li $k = k_1 = k_2 = 0$, hovoříme o **počátečních momentech** (značíme μ_k'), je-li $k = E(X)$, $k_1 = E(X_1)$, $k_2 = E(X_2)$, jedná se o **centrální momenty** (značíme μ_k).

Asymetrie (šikmost) náhodné veličiny X je definována vztahem

$$A_3(X) = \frac{E([X-E(X)]^3)}{\sqrt{D(X)^3}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$$

Exces (špičatost) náhodné veličiny X je definována vztahem

$$A_4(X) = \frac{E([X-E(X)]^4)}{\sqrt{D(X)^4}} - 3 = \frac{\mu_4}{\sqrt{\mu_2^4}} - 3$$

Za předpokladu, že všechny střední hodnoty existují a směrodatná odchylka je kladná. Pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je $A_3(X) = 0$ a pro $U \sim N(0,1)$ je $A_4(U) = 0$.

Charakteristická funkce náhodné veličiny

Funkce dána vztahem

$$\psi(t) = E(e^{itX}),\ t \in \mathbb{R}$$

se nazývá **charakteristická funkce** náhodné veličiny X.
Vlastnosti:

(a) $|\psi(t)| \leq 1$

(b) $\psi(0) = 1$

(c) $\overline{\psi(t)} = \psi(-t)$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$

(d) ψ je rovnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$

(e) $\psi_{a+bX}(t) = e^{ita}\psi_X(tb)$

(f) $\psi_{X_1+X_2}(t) = \psi_{X_1}(t)\psi_{X_2}(t)$

(g) $\psi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

3. Náhodná veličina X má binomické rozdělení, tedy $X \sim Bi(n, \theta)$. Pomocí charakteristické funkce určete její střední hodnotu a rozptyl.

Kvantily

Definice: Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Funkce

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1,$$

se nazývá **kvantilová funkce** náhodné veličiny X. Pro $0 < \alpha < 1$ se hodnota $F^{-1}(\alpha)$ nazývá α-kvantil.

Pozn.: Pokud je distribuční funkce $F(x)$ rostoucí a spojitá je kvantilová funkce totožná s obyčejnou inverzní funkcí k distribuční funkci.

$0,5$-kvantil $\rightarrow$ medián
$0,25$-kvantil $\rightarrow$ dolní kvartil
$0,75$-kvantil $\rightarrow$ horní kvartil.

4. Nechť $U \sim N(0, 1)$. Najděte medián, dolní a horní kvartil.
[$\tilde{x} = 0,\ u_{0,25} = -0,67449,\ u_{0,75} = 0,67449$]

5. Určete $\chi^2_{0,025}(25)$. [13,120]

6. Určete $t_{0,99}(30)$ a $t_{0,05}(24)$. [2.4573; -1,7109]

7. Nechť $T \sim t(14)$. Určete konstantu c tak, aby $P(-c < T < c)$=0,9. [$c = 1,7613$]

8. Určete $F_{0.975}(5, 20)$ a $F_{0,05}(2, 10)$. [3,2891; 0,05156]

9. Hustota spojité náhodné veličiny X je

$$f(x) = \begin{cases} 4x(9 - x^2)/81 & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Najděte modus $\hat{x}$, medián $\tilde{x}$ a porovnejte se střední hodnotou.
[$\hat{x} = 1,732,\ \tilde{x} = 1,6284,\ E(X) = 1,6$]