Normální rozdělení a rozdělení z něho odvozená

Náhodné veličiny $X_1, X_2 \dots X_n$ jsou stochasticky nezávislé.

- $X_i \sim N(0,1),\ i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$,
- $X_1, X_2 \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X_1}{X_2}$ má Cauchyovo rozdělení,
- $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim \chi^2(n) \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}} \sim t(n)$,
- $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2) \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X_1/n_1}{X_2/n} \sim F(n_1, n_2)$,

1. Mějme stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots X_4$ ze standardizovaného normálního rozdělení. Jaké rozdělení má

   (a) $Y_1 = 3 + X_1 - 2X_2$, $[N(3,5)]$

   (b) $Y_2 = \frac{X_1^2+X_3^2}{X_2^2+X_4^2}$, $[F(2,2)]$

   (c) $Y_3 = \frac{2X_1+2X_2+X_3-X_4}{\sqrt{10}}$, $[N(0,1)]$

   (d) $Y_4 = \frac{X_1^2}{X_2^2}$, $[F(1,1)]$

   (e) $Y_5 = \frac{(X_1-X_2+X_4)^2}{3}$, $[\chi^2(1)]$

   (f) $Y_6 = \frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$, $[t(2)]$

   (g) $Y_7 = \frac{2X_1^2}{X_2^2+X_4^2}$, $[F(1,2)]$

   (h) $Y_8 = X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 4$? $[N(-4,14)]$

2. Mějme stochasticky nezávislé náhodné veličiny $Z_1, \dots Z_{10}$ z normálního rozdělení $N(0,6)$. Jaké rozdělení mají

   (a) $U_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Z_i$, $[N(0, 6/10)]$

   (b) $U_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=5}^{10} Z_i^2$, $[\chi^2(6)]$

   (c) $U_3 = \frac{Z_1}{\sqrt{U_2}}$, $[t(6)]$

   (d) $U_4 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{4} Z_i^2$, $[\chi^2(4)]$

   (e) $U_5 = \frac{3U_4}{2U_2}$? $[F(4,6)]$