Bodové odhady parametrů

Parametrický prostor, parametrická funkce: Je dán měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, náh. veličina X a množina pravděpodobností $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$. Množina Θ se nazývá *parametrický prostor* a její prvky *parametry*. Jakékoli zobrazení $h : \Theta \to \mathbb{R}^q$, kde $q \in \mathbb{N}$, se nazývá *parametrická funkce.*

- Statistika $T = g(X_1, \dots, X_n)$ se nazývá **nestranný odhad** parametrické funkce $h(\theta)$, právě když pro každé $\theta \in \Theta$ platí $E_\theta(T) = h(\theta)$.
- T_1, T_2 jsou dva různé nestranné odhady param. fce $h(\theta)$. Řekneme, že T_1 je *lepší* nestranný odhad než T_2, právě když pro každé $\theta \in \Theta$ platí $D_\theta(T_1) < D_\theta(T_2)$.
- Posloupnost $T_1, \dots, T_n, \dots$ statistik tvoří posloupnost **asymptoticky nestranných odhadů** parametrické funkce $h(\theta)$, právě když pro každé $\theta \in \Theta$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = h(\theta)$$

- Posloupnost $T_1, \dots, T_n, \dots$ statistik tvoří posloupnost **konzistentních odhadů** parametrické funkce $h(\theta)$, právě když pro každé $\theta \in \Theta$ a $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(|T_n - h(\theta)| < \varepsilon) = 1$$

1. Mějme dány lineární statistiky tvaru $T_n = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i, c_i \in \mathbb{R}$. Najděte mezi nimi takovou, která je nejlepším nestranným odhadem střední hodnoty. $[T_n = \overline{X}]$

2. Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené. X_i má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} 3\theta^3 \frac{1}{x^4} & x > \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$

kde $\theta > 0$ je parametr. Odvoďte vlastnosti odhadů

$$T_1 = \hat{\theta}_n = \frac{2}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad T_2 = \tilde{\theta}_n = \frac{3n-1}{3n}\min(X_1, \dots, X_n)$$

parametru θ a zjistěte, který z nich je lepší. $[D(T_1) = \frac{\theta^2}{3n} > D(T_2) = \frac{\theta^2}{3n(n-2)}]$

3. Nechť T_1 a T_2 jsou nezávislé nestranné odhady θ. Předpokládejme, že rozptyl T_1 je dvojnásobkem rozptylu T_2. Stanovte konstanty k_1 a k_2 tak, aby $T = k_1T_1 + k_2T_2$ byl nestranným odhadem s nejmenším možným rozptylem. $[k_1 = 1/3,\ k_2 = 2/3]$

4. Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z exponenciálního rozdělení, $X_i \sim Ex(c_i\lambda)$, kde $c_i > 0, \lambda > 0$ jsou konstanty. Dokažte, že statistika $T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}}$ je nestranným odhadem parametru $\frac{1}{\lambda}$.

5. Uvažujme náhodný výběr $X_1 \dots, X_n$ z rozdělení s konečným rozptylem σ^2. Určete konstantu c tak, aby statistika $T = c \cdot \sum_{i=2}^{n} (X_i - X_{i-1})^2$ byla nestranným odhadem rozptylu. $\left[c = \frac{1}{2(n-1)}\right]$