Intervalové odhady parametrů

Intervalový odhad: Nechť $\alpha \in (0;1)$ je libovolné číslo a $D = g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $H = g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jsou statistiky. Interval (D, H) se nazývá $100 \cdot (1-\alpha)\%$ **interval spolehlivosti (konfidenční, toleranční)** pro parametr θ, právě když platí:

$$P(D < \theta < H) \geq 1 - \alpha$$

Statistika H se nazývá **horní odhad** parametru θ na hladině významnosti α, právě když platí:

$$P(\theta < H) \geq 1 - \alpha$$

Statistika D se nazývá **dolní odhad** parametru θ na hladině významnosti α, právě když platí:

$$P(D < \theta) \geq 1 - \alpha$$

Intervalové odhady pro paramtery μ a σ^2 jednoho normálního rozložení

1. Odhad parametru μ

   - pokud σ^2 známe

     $$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

     $D = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad H = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$

   - pokud σ^2 neznáme

     $$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)^1$$

     $D = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \quad H = \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$

2. Odhad paramteru σ^2

   - pokud μ známe

     $$W = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \sim \chi^2(n)$$

     $D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \quad H = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}$

   - pokud μ neznáme

     $$K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

     $D = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \quad H = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$

[a] Odvoďte rozdělení statistiky T

1. Odvoďte vztahy pro horní a dolní odhady parametrů μ a σ^2.

2. Rychlost letadla byla určována v pěti zkouškách a z jejich výsledků byl určen odhad $\overline{x} = 870,3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete 95% interval spolehlivosti pro μ, je-li známo, že rozptýlení rychlosti se řídí normálním

rozdělením se směrodatnou odchylkou $\sigma = 2,1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

[$\mu \in (868,46; 872,14)$ při riziku $\alpha = 0,05$]

3. Při zjišťování přesnosti nově zaváděné metody pro stanovení obsahu manganu v oceli bylo rozhodnuto provést čtyři nezávislá měření u oceli se známým obsahem manganu, který je roven 0,30 %. Stanovte dolní odhad pro σ s rizikem 0,05, když výsledeky měření byly: 0,31 %, 0,30 %, 0.29 %, 0,32 %. Údaje o obsahu manganu v oceli považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 4 z $N(\mu, \sigma^2)$. [$\sigma \in (0,00795; \infty)$]

4. Uvažujme náhodný výběr rozsahu n z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že μ leží v intervalu

$$a)\left(\overline{X} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad b)\left(\overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)?$$

[a) 0,9973, b)$1-\alpha$]

5. Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno 6 selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenány průměrné denní přírůstky v dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58. Při riziku $\alpha = 0.05$ odvoďte:

   (a) dolní odhad neznámé střední hodnoty μ při neznámé směrodatné odchylce σ;
   [$\mu \in (54,06; \infty)$]

   (b) intervalový odhad směrodatné odchylky σ. [$\sigma \in (2,233; 8,776$]

6. Výzkumná zpráva obsahuje 20 intervalů spolehlivosti, každý na 95% hladině významnosti. Předpokládajme, že intervaly jsou založeny na nezávislých statistikách.

   (a) U kolika intervalů můžeme očekávat, že obsahují skutečnou hodnotu parametru, který odhadují? [19]

   (b) Jaká je pravděpodobnost, že všech 20 intervalů spolehlivosti bude obsahovat skutečnou hodnotu parametru, který odhadují? [0,3585]

7. Nechť $X_1, \ldots X_n$ je náhodný výběr z rozložení $N(\mu; 0,04)$. Zvolme riziko $\alpha = 0,05$. Jaký musí být nejmenší počet měření, aby šířka intervalu spolehlivost pro neznámou střední hodnotu μ nepřesáhla číslo 0,16? [$n = 25$]

8. Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozložení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1\,\mathrm{m}$. Kolik měření je nutno provést, aby se hloubka stanovila s chybou nejvýše $\pm 0,25\,\mathrm{m}$ při riziku 0,05? [$n = 62$]