Doplňky z multilineární algebry.

K přednášce Diferenciální geometrie křivek a ploch.

Nechť V značí reálný vektorový prostor. *Bilineární formou* na V nazýváme zobrazení $h : V \times V \to \mathbb{R}$ splňující

$$
\begin{aligned}
h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w) &\quad \text{pro všechna } v_1, v_2, w \in V,\\
h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2) &\quad \text{pro všechna } v, w_1, w_2 \in V,\\
h(av, w) = ah(v, w) &\quad \text{pro všechna } v, w \in V \text{ a } a \in \mathbb{R},\\
h(v, aw) = ah(v, w) &\quad \text{pro všechna } v, w \in V \text{ a } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Bilineární forma h se nazývá *symetrická*, jestliže

$$h(v, w) = h(w, v) \quad \text{pro všechna } v, w \in V.$$

Kvadratickou formou na vektorovém prostoru V nazýváme zobrazení $\Phi : V \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\Phi(av) = a^2\Phi(v) \quad \text{pro všechna } v \in V \text{ a } a \in \mathbb{R},$$

$$b(v, w) = \frac{1}{2}\big[\Phi(v + w) - \Phi(v) - \Phi(w)\big] \quad \text{je symetrická bilineární forma.}$$

Označme $B_s(V)$ množinu všech symetrických bilineárních forem na V a $Q(V)$ množinu všech kvadratických forem na V. Snadno je vidět, že na obou těchto množinách můžeme (pomocí standardního sčítání a násobení číslem) zavést strukturu reálného vektorového prostoru. Ukážeme nyní, že vektorové prostory $B_s(V)$ a $Q(V)$ jsou isomorfní. Definujme lineární zobrazení

$$\alpha : B_s(V) \to Q(V) \text{ předpisem } (\alpha h)(v) = h(v, v),$$

$$\beta : Q(V) \to B_s(V) \text{ předpisem } (\beta\Phi)(v, w) = \frac{1}{2}\big[\Phi(v + w) - \Phi(v) - \Phi(w)\big].$$

$$(\alpha(\beta\Phi))(v) = (\beta\Phi)(v, v) = \frac{1}{2}\big[\Phi(2v) - 2\Phi(v)\big] = \frac{1}{2}\big[4\Phi(v) - 2\Phi(v)\big] = \Phi(v),$$

$$
\begin{aligned}
(\beta(\alpha h))(v, w) &= \frac{1}{2}\big[(\alpha h)(v + w) - (\alpha h)(v) - (\alpha h)(w)\big] =\\
&= \frac{1}{2}\big[h(v + w, v + w) - h(v, v) - h(w, w)\big] = h(v, w).
\end{aligned}
$$

Vidíme tak, že α a β jsou vzájemně inversní isomorfismy.

S pomocí výše uvedených isomorfismů budeme symetrické bilineární formy a kvadratické formy ztotožňovat.

Asymptotické vektory a asymptotické směry.

Definice. Buď V reálný vektorový prostor a h symetrická bilineární forma na V. Vektor $v \in V$ nazveme *asymptotický vektor (vůči h)* jestliže $h(v, v) = 0$. Jednorozměrný podprostor ve V nazveme *asymptotickým směrem*, jestliže všechny vektory v něm ležící jsou asymptotické. Poznamenejme, že místo asymptotický se často říká *isotropní.*

Odtud dále budeme předpokládat, že $\dim V = 2$.

Věta 0.1. *Jestliže symetrická bilineární forma h má tři asymptotické směry, potom $h = 0$.*

Důkaz. Buďte $v, w \in V$ dva vektory určující dva různé asymptotické směry. Zřejmě vektory v, w tvoří basi prostoru V. Jestliže existuje třetí asymptotický směr, potom je určen vektorem $av + bw$, kde $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Máme

$$h(v, v) = 0, \quad h(w, w) = 0.$$

Dále potom dostáváme

$$h(av + bw, av + bw) = 0,$$
$$2abh(v, w) = 0.$$

Protože $a \neq 0$ a $b \neq 0$, máme $h(v, w) = 0$. Je tedy nutně $h = 0$. $\square$

Vidíme tak, že nenulová symetrická bilineární forma může mít maximálně dva asymptotické směry.

Budeme nyní zkoumat determinant symetrické bilineární formy. Buď h taková forma a buď v_1, v_2 base prostoru V. Nyní můžeme definovat

$$h_{11} = h(v_1, v_1), \quad h_{12} = h(v_1, v_2), \quad h_{21} = h(v_2, v_1), \quad h_{22} = h(v_2, v_2),$$
$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}.$$

Zvolíme-li jinou basi $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ definujeme podobně

$$\tilde{h}_{11} = h(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1), \quad \tilde{h}_{12} = h(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), \quad \tilde{h}_{21} = h(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1), \quad \tilde{h}_{22} = h(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2),$$
$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det \tilde{H} = \begin{vmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} \end{vmatrix}.$$

Na příkladech se můžeme snadno přesvědčit, že výše uvedený determinant závisí na volbě base a obecně $\det H \neq \det \tilde{H}$. Žádný pojem jako determinant symetrické bilineární formy tedy nejde zavést. Nicméně, jak ihned uvidíme, alespoň něco z uvažovaného determinantu na volbě base nezávisí. Je to jeho znaménko. Pišme

$$\tilde{v}_i = \sum_{k=1}^{2} c_{ik} v_k,$$

kde

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

je matice přechodu. Máme potom

$$\tilde{h}_{ij} = h(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = h(\sum_{k=1}^{2} c_{ik} v_k, \sum_{l=1}^{2} c_{jl} v_l) = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ik} h_{kl} c_{jl} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ik} h_{kl} c'_{lj},$$

kde c'_{lj} značí prvek transponované matice C' k matici C. Předchozí rovnost můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\tilde{H} = CHC'.$$

Odtud potom plyne

$$\det \tilde{H} = \det C \det H \det C' = \det H \cdot (\det C)^2.$$

Je tedy zřejmé, že jestliže $\det H > 0$ (resp. $\det H = 0$, resp. $\det H < 0$), potom rovněž $\det \tilde{H} > 0$ (resp. $\det \tilde{H} = 0$, resp. $\det \tilde{H} < 0$).

Nyní jsme dostatečně technicky vybaveni, abychom mohli říci kolik má daná symetrická bilineární forma asymptotických směrů.

Věta 0.2. *Nenulová symetrická bilineární forma h má dva asymptotické směry právě tehdy, když* $\det h < 0$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že h má dva asymptotické směry. V každém směru vybereme nenulový vektor a dostáváme tak basi v, w sestávající z asymptotických vektorů. Uvědomme si, že potom $h(v, w) \neq 0$. Jinak by totiž forma h byla nulová. Potom máme

$$\begin{vmatrix} h(v,v) & h(v,w) \\ h(w,v) & h(w,w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & h(v,w) \\ h(v,w) & 0 \end{vmatrix} = -h(v,w)^2 < 0.$$

Nyní předpokládejme, že $\det h < 0$. Zvolme libovolnou basi v_1, v_2 prostoru V. Vektor $x_1 v_1 + x_2 v_2$ je asymptotický právě tehdy, když

$$h(x_1 v_1 + x_2 v_2, x_1 v_1 + x_2 v_2) = 0$$
$$h_{11} x_1^2 + 2h_{12} x_1 x_2 + h_{22} x_2^2 = 0.$$

Hledejme asymptotické vektory s $x_2 = 1$. Poslední rovnice má potom tvar

$$h_{11} x_1^2 + 2h_{12} x_1 + h_{22} = 0$$

a její diskriminant je roven

$$4h_{12}^2 - 4h_{11} h_{22} = -4(h_{11} h_{22} - h_{12}^2) > 0.$$

Rovnice tedy má dva různé reálné kořeny ξ a η a my dostáváme dva lineárně nezávislé asymptotické vektory $\xi v_1 + v_2$ a $\eta v_1 + v_2$. Tím je důkaz ukončen. $\square$

Věta 0.3. *Nenulová symetrická bilineární forma h má jediný asymptotický směr právě tehdy, když* $\det h = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že forma h má jediný asymptotický směr určený vektorem $v \neq 0$. Ukážeme, že potom pro každý vektor $w \in V$ platí $h(v, w) = 0$. Předpokládejme, že existuje vektor $w \neq 0$ takový, že $h(v, w) \neq 0$. Platí $h(w, w) \neq 0$, neboť forma h nemá další asymptotický směr. Potom máme

$$h(x_1 v + x_2 w, x_1 v + x_2 w) = 2x_1 x_2 h(v, w) + x_2^2 h(w, w) = x_2[2x_1 h(v, w) + x_2 h(w, w)].$$

Zvolíme-li nyní $x_1 = (1/2)h(w, w)$ a $x_2 = -h(v, w)$, dostáváme další asymptotický směr, což je spor. Je tedy $h(v, w) = 0$ pro všechna $w \in V$. Forma h je tedy singulární a tudíž $\det h = 0$.

Nyní předpokládejme, že $\det h = 0$. Znamená to, že forma h je singulární a tedy existuje vektor $v \neq 0$ takový, že pro všechna $v' \in V$ je $h(v, v') = 0$. Zvolme vektor w tak, aby vektory v, w tvořily basi. Nyní máme

$$h(x_1 v + x_2 w, x_1 v + x_2 w) = x_2^2 h(w, w).$$

Zřejmě $h(w,w) \neq 0$. Jinak by totiž forma h byla nulová. Vidíme tak, že vektor x_1v+x_2w určuje asymptotický směr práve tehdy, když $x_2 = 0$. Odtud plyne, že forma h má jediný asymptotický směr. □

Následující větu tedy už není třeba dokazovat.

Věta 0.4. *Nenulová symetrická bilineární forma h nemá žádný asymptotický směr právě tehdy, když* $\det h > 0$.

Vlastní čísla a vlastní vektory.

Připomeňme, že symetrická bilineární forma h se nazývá regulární, jestliže ke každému vektoru $v \neq 0$ existuje vektor w takový, že $h(v,w) \neq 0$. (Samozřejmě je potom $w \neq 0$.) Snadno se můžeme přesvěčit, že h je regulární právě když $\det h \neq 0$. Můžeme ale nalézt i jinou podmínku ekvivalentní regularitě. Jasné je, že každá bilineární forma h určuje lineární zobrazení $\alpha_h : V \to V^*$. (V^* označuje duální prostor k prostoru V, tj. prostor lineárních forem na V.) Definujeme $(\alpha_h(v))(w) = h(v,w)$. Je-li forma h regulární, potom pro každé $v \neq 0$ je lineární forma $\alpha_h(v)$ nenulová (stačí do ní dosadit w takové, že $h(v,w) \neq 0$) a tedy lineární zobrazení α_h je prosté. Protože $\dim V = \dim V^*$, plyne odtud, že α_h je isomorfismus. Snadno se dokáže i obrácené tvrzení. Dokázali jsme tak následující lemma.

Lemma 0.5. *Bilineární forma je regulární právě když s ní asociované lineární zobrazení $\alpha_h : V \to V^*$ je isomorfismus.*

V dalším uvažujme dvě symetrické bilineární formy g a h. Budeme předpokládat, že forma g je positivně definitní (a tedy regulární). (O formě h nic takového nepředpokládáme.) Dostáváme tak dvě lineární zobrazení

$$V \xrightarrow{\alpha_g} V^* \xleftarrow{\alpha_h} V.$$

Protože g je regulární, je α_g isomorhismus a existuje tedy k němu inversní isomorfismus. Můžeme tak definovat lineární zobrazení $A : V \to V$ předpisem $A = (\alpha_g)^{-1} \circ \alpha_h$. Snadno nyní vidíme, že pro každé v, w platí

$$h(v,w) = g(Av,w).$$

Navíc můžeme snadno dokázat, že lineární zobrazení A je předchozí rovností jednoznačně určeno. Předpokládejme, že máme lineární zobrazení A a B taková, že $h(v,w) = g(Av,w)$ a zároveň $h(v,w) = g(bv,w)$. Potom

$$g(Av,w) = g(Bv,w)$$
$$g((A-B)v,w) = 0$$

pro všechny vektory $v, w \in V$. Protože forma g je regulární, je $(A-B)v = 0$ pro všechny vektory $v \in V$. Tedy $A = B$.

Lemma 0.6. *Lineární zobrazení A je symetrické (vůči bilineární formě g), tj. pro všechna $v, w \in V$ platí*

$$g(Av,w) = g(v,Aw).$$

Důkaz.
$$g(Av,w)=h(v,w)=h(w,v)=g(Aw,v)=g(v,Aw).$$
$\square$

Připomeňme, že reálné číslo λ se nazývá *vlastním číslem* lineárního zobrazení L, jestliže existuje nenulový vektor $u\in V$ takový, že
$$Lv=\lambda v.$$
Protože uvažujeme reálný vektorový prostor a reálná vlastní čísla, lineární zobrazení obecně nemusí mít žádné vlastní číslo. (Jinak je tomu u komplexních vektorových prostorů a komplexních vlastních čísel. V takové situaci vlastní číslo vždy existuje.) Ukážeme nyní, že výše zavedené lineární zobrazení A (díky jeho symetričnosti) vždy má reálné vlastní číslo. Positivně definitní symetrická bilineární forma není nic jiného než skalární součin. Zvolme ortonormální basi e_1,e_2 (vůči g). Máme tedy
$$g(e_1,e_1)=1,\quad g(e_1,e_2)=g(e_2,e_1)=0,\quad g(e_2,e_2)=1.$$
Pišme
$$\begin{aligned}Ae_1&=a_{11}e_1+a_{12}e_2\\Ae_2&=a_{21}e_1+a_{22}e_2\end{aligned}$$
Snadno potom dostáváme
$$\begin{aligned}g(Ae_1,e_2)&=g(e_1,Ae_2)\\g(a_{11}e_1+a_{12}e_2,e_2)&=g(e_1,a_{21}e_1+a_{22}e_2)\\a_{12}&=a_{21}.\end{aligned}$$
Hledejme vlastní číslo λ a vlastní vektor $u=x_1e_1+x_2e_2$. Musí platit
$$\begin{aligned}A(x_1e_1+x_2e_2)&=\lambda(x_1e_1+x_2e_2)\\x_1(a_{11}e_1+a_{12}e_2)+x_2(a_{21}e_1+a_{22}e_2)&=\lambda x_1e_1+\lambda x_2e_2\\(a_{11}x_1+a_{21}x_2)e_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2)e_2&=\lambda x_1e_1+\lambda x_2e_2.\end{aligned}$$
Srovnáním koeficientů u e_1 a e_2 dostáváme soustavu rovnic
$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2&=0\\a_{12}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2&=0.\end{aligned}$$
Protože vlastní vektor musí být nenulový, potřebujeme, aby tato homogenní soustava měla netriviální řešení. To nastane právě tehdy, když
$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$
λ je vlastním číslem právě tehdy, když je kořenem rovnice
$$x^2-(a_{11}+a_{22})x+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0.$$
Diskriminant této kvadratické rovnice je roven
$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geq 0.$$

Rovnice tedy má alespoň jeden reálný kořen, maximálně však dva reálné kořeny. Řešením výše uvedeného homogenního systému (kde λ je vlastní číslo) potom získáme vlastní vektor. Dokázali jsme tak následující větu.

Věta 0.7. *Symetrické (vůči formě g) lineární zobrazení A má alespoň jedno reálné vlastní číslo, maximálné však dvě různá reálná vlastní čísla.*

Předpokládejme nejprve, že A má dvě různá vlastní čísla $\lambda \neq \mu$ a buďte v a w příslušné vlastní vektory. Potom máme

$$\lambda g(v, w) = g(\lambda v, w) = g(Av, w) = g(v, Aw) = g(v, \mu w) = \mu g(v, w).$$

Odtud plyne $g(v, w) = 0$, neboli že vektory v a w jsou k sobě kolmé.

Dále předpokládejme, že A má jediné vlastní číslo λ a buď v příslušný vlastní vektor. Vezměme nenulový vektor w kolmý k vektoru v, tj. takový, že $g(v, w) = 0$ Potom máme

$$g(v, Aw) = g(Av, w) = \lambda g(v, w) = 0,$$

což ukazuje, že rovněž vektor Aw je kolmý k vektoru v. Protože $\dim V = 2$ znamená to, že existuje reálné číslo μ takové, že $Aw = \mu w$. Vidíme, že μ je vlastní číslo lineárního zobrazení A. Protože ale podle předpokladu A má jediné vlastní číslo, je $\mu = \lambda$. Vidíme tak, že $A = \lambda I$, kde I značí identické zobrazení. Každý nenulový vektor je potom vlastním vektorem.