1. Exponenciální rozložení a jeho vlastnosti

1.1. Definice: Definice náhodné veličiny s exponenciálním rozložením.

1.2. Věta: Vysvětlení, proč se exponenciální rozložení nazývá rozložením bez paměti.

1.3. Poznámka: Exponenciální rozložení je speciálním případem Erlangova rozložení.

1.4. Příklad: Výrobce žárovek jisté značky ví, že průměrná životnost jeho žárovek je 10 000 h. V rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu t, do níž se spálí maximálně 3 % žárovek. Stanovte tuto dobu t.
Řešení: Životnost žárovky je náhodná veličina X ~ Ex(λ), přičemž 1/ λ = 10 000, tj. λ = 0,0001. Nyní musíme najít dobu t tak, aby $P(X \le t) = 0{,}03$. Tedy

$$0{,}03 = P(X \le t) = \Phi(t) = 1 - e^{-0{,}0001t} \Rightarrow t = -10000 \ln 0{,}97 = 304{,}6$$

1.5. Věta: Věta o standardizovaném exponenciálním rozložení.

1.6. Věta: Věta o transformaci rovnoměrného spojitého rozložení na intervalu (0,1) na exponenciální rozložení.

1.7. Poznámka: Využití vět 1.5. a 1.6. při generování realizací náhodné veličiny s exponenciálním rozložením na počítači.

1.8. Věta: Věta o rozložení minima dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozložením.

1.9. Poznámka: Zobecnění věty 1.8.

1.10. Věta: Věta o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozložením.

1.11. Poznámka: Zobecnění věty 1.10.

1.12. Příklad: Zákazník prochází třemi stanicemi obsluhy, přičemž v každé z nich má doba obsluhy exponenciální rozložení se střední hodnotou 1 min. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 min?
Řešení: Podle poznámky 1.11. se celková doba obsluhy Y řídí rozložením Er(3,1), tedy

$$P(Y \le 2) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \ldots = 0{,}323$$

1.13. Věta: Věta o transformaci exponenciálního rozložení na rozložení $\chi^2(2)$.

1.14. Věta: Věta o pravděpodobnosti přežití jedné součástky druhou součástkou.

1.15. Věta: Věta o 100(1-α)% přibližném empirickém intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu exponenciálního rozložení.

1.16. Příklad: V jisté prodejně potravin bylo na základě náhodného výběru 50 zákazníků zjištěno, že průměrná doba obsluhy u pokladny je 30 s. Předpokládejme, že doba obsluhy u pokladny je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením. Najděte 95% přibližný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy.
Řešení: $n = 50$, $m = 30$, $\alpha = 0{,}05$

$$d = \frac{2n \cdot m}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{3000}{\chi^2_{0,975}(100)} = \frac{3000}{129{,}561} = 23$$

$$h = \frac{2n \cdot m}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{3000}{\chi^2_{0,025}(100)} = \frac{3000}{74{,}222} = 40$$

$23\ \text{s} < 1/\lambda < 40\ \text{s}$ s pravděpodobností aspoň 0,95.