2. Poissonovo rozložení a jeho vlastnosti

2.1. Definice: Definice náhodné veličiny s Poissonovým rozložením.

2.2. Příklad: Pravděpodobnost závady na 1 km telefonního vodiče je 0,01. Kabel je složen ze 100 vodičů a bude plnit svůj účel, pokud aspoň 99 vodičů je v pořádku. Jaká je pravděpodobnost, že kabel délky 1 km bude plnit svůj účel?
Řešení: X – počet porouchaných vodičů v kabelu, X ~ Po(λ), kde λ = 100.0,01 = 1. Počítáme $P(X \le 1) = \pi(0) + \pi(1) = 0{,}3679 + 0{,}3679 = 0{,}7358$

2.3. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci Poissonova rozložení.

2.4. Příklad: Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozložení.
Řešení: $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda$.

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{d^2}{dz^2} e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

2.5. Věta: Věta o modu Poissonova rozložení.

2.6. Příklad: K holiči chodí průměrně 6 zákazníků za 1 h. Určete nejpravděpodobnější počet zákazníků u holiče během půl hodiny a dále určete pravděpodobnost tohoto počtu.
Řešení: Střední hodnota počtu zákazníků, kteří přijdou k holiči během půl hodiny, je rovna 3. Protože je to přirozené číslo, jsou nejpravděpodobnější hodnoty dvě, a to 2 a 3. Přitom P(X=2) = P(X=3) = 0,224.

2.7. Věta: Věta o konvergenci binomického rozložení k Poissonovu rozložení.

2.8. Příklad: Dělnice v přádelně obsluhuje 800 vřeten. Pravděpodobnost toho, že se příze přetrhne během časového intervalu délky t, je pro všechna vřetena stejná a je rovna 0,005. Určete pravděpodobnost, že během intervalu délky t dojde k nejvýše 10 přetržením.
Řešení: Y – počet přetržení v intervalu délky t, Y ~ Bi(800, 0,005).

Přesný výpočet: $P(Y \le 10) = \sum_{y=0}^{10} \binom{800}{y} 0{,}005^y 0{,}995^{800-y} = 0{,}997239$

Aproximace Poissonovým rozložením(podmínky dobré aproximace jsou splněny, protože $n = 800 > 30$ a $\vartheta = 0{,}005 < 0{,}1$): $\lambda = n\vartheta = 4$, $P(Y \le 10) \approx \sum_{y=0}^{10} \frac{4^y}{y!} e^{-4} = 0{,}9971602$

2.9. Věta: Věta o aproximaci Poissonova rozložení normálním rozložením

2.10. Příklad: Nechť X ~ Po(λ), λ = 12. Pomocí aproximace normálním rozložením stanovte $P(8 \le X \le 20)$.
Řešení:

$$P(8 \le X \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20{,}5 - 12}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{7{,}5 - 12}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(2{,}45) - \Phi(-1{,}3) = \Phi(2{,}45) - 1 + \Phi(1{,}3) =$$

$$= 0{,}99286 - 1 + 0{,}9037 = 0{,}89606$$

Přesný výpočet: $P(8 \le X \le 20) = \sum_{x=8}^{20} \frac{12^x}{x} e^{-12}$ =0,8989

2.11. Věta: Věta o rozložení součtu dvou stochasticky nezávislých náhodných veličin s Poissonovým rozložením.

2.12. Poznámka: Zobecnění věty 2.11.

2.13. Věta: Věta o 100(1-α)% přibližném empirickém intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení.

2.14. Příklad: Předpokládejme, že při výrobě určité tkaniny je počet kazů na 100 m této tkaniny náhodná veličina s rozložením Po(λ). Při kontrole 25 stometrových balíků tkaniny bylo zjištěno, že průměrný počet kazů je 30. Najděte 95% přibližný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů.
Řešení: n = 25, n.m = 30, α = 0,05

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2n.m) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,025}(60) = \frac{1}{50}40,48 = 0,81$$

$$h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2(n.m+1)) = \frac{1}{50}\chi^2_{0,975}(62) = \frac{1}{50}85,654 = 1,71$$

0,81 < λ < 1,71 s pravděpodobností aspoň 0,95.

2.15. Poznámka: Je-li počet stupňů volnosti rozložení $\chi^2(n)$ dostatečně velký (n > 30), lze kvantily $\chi^2_\alpha(n)$ aproximovat pomocí vzorce: $\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1} + u_\alpha\right)^2$.

V našem případě:

$$\chi^2_{0,025}(60) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{119} + u_{0,025}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{119} - u_{0,975}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{119} - 1,96\right)^2 = 40,04$$

$$\chi^2_{0,975}(62) \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{123} + u_{0,975}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{123} + 1,96\right)^2 = 85,16$$

2.16. Poznámka: Pro dostatečně velká n (n > 30) lze rozložení $\chi^2(n)$ aproximovat rozložením N(n, 2n). Pak $\chi^2_\alpha(n) \approx \sqrt{2n} \cdot u_\alpha + n$ a meze 100(1-α)% přibližného empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení budou:

$$d = \frac{1}{n}\left(n \cdot m - u_{1-\alpha/2}\sqrt{n \cdot m}\right),\ h = \frac{1}{n}\left(n \cdot m + 1 + u_{1-\alpha/2}\sqrt{n \cdot m + 1}\right)$$

2.17. Příklad: Pro údaje z příkladu 2.14. vypočtěte 95% přibližný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu kazů pomocí aproximace normálním rozložením.
Řešení:

$$d = \frac{1}{25}\left(30 - 1,96\sqrt{30}\right) = 0,77,\ h = \frac{1}{25}\left(31 + 1,96\sqrt{31}\right) = 1,68$$

0,77 < λ < 1,68 s pravděpodobností aspoň 0,95.

2.18. Poznámka: Je-li rozsah výběru n > 20, lze meze 100(1-α)% přibližného empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení počítat podle vzorců:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}\,, \; h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$$

V našem případě: $d = \frac{30}{25} - \sqrt{\frac{30}{25 \cdot 25}} \cdot 1{,}96 = 0{,}75\,,\; h = \frac{30}{25} + \sqrt{\frac{30}{25 \cdot 25}} \cdot 1{,}96 = 1{,}65$

$0{,}75 < \lambda < 1{,}65$ s pravděpodobností aspoň 0,95.