Lineární proces vzniku a zániku, Erlangův proces

Definice: Lineární proces vzniku a zániku je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (0, 1, 0, …) a matici intenzit přechodu $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(2\lambda+2\mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Konstanty $\lambda > 0$, $\mu > 0$ se nazývají intenzity vzniku resp. zániku.

Vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku (pro $\lambda \neq \mu$)**:**

a) Je-li k_0 rozsah souboru v čase 0, pak pro střední hodnotu a rozptyl rozsahu souboru v čase t platí: $E(X_t) = k_0 e^{(\lambda-\mu)t}$, $D(X_t) = k_0 \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right]$.

b) Pravděpodobnost zániku souboru v čase t je dána vztahem $p_0(t) = \mu \frac{1 - e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}}$.

Úkol:
Napište v MATLABu funkci, která bude ilustrovat vlastnosti lineárního procesu vzniku a zániku.
Vstupní parametry:
lambda – intenzita vzniku
mi – intenzita zániku
tau – konečný čas
k0 – rozsah souboru v čase t = 0
Výstupní parametry:
M – vektor středních hodnot v čase t = 0 až tau
S – vektor směrodatných odchylek v čase t = 0 až tau
P – vektor pravděpodobností zániku souboru v čase t = 0 až tau
Funkce bude graficky znázorňovat závislost parametrů M, S, P na čase t= 0 až tau.

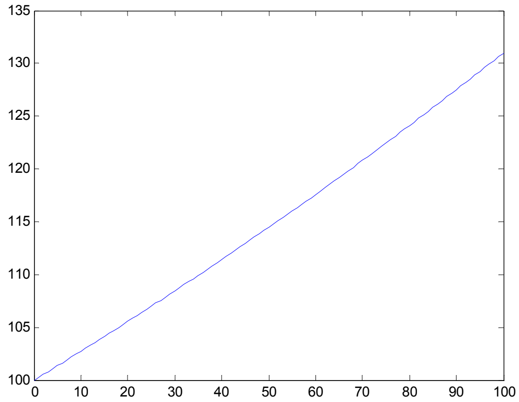
Návod:

```
function [M,S,P]=lpvz(lambda, mi, tau,k0)
% funkce lpvz ilustruje vlastnosti linearniho procesu vzniku a zaniku
% lambda je intenzita vzniku, mi intenzita zaniku
% tau je konecny cas, k0 rozsah souboru v case t=0
% M je vektor strednich hodnot rozsahu souboru v case t=0 az tau
% S je vektor smerodatnych odchylek rozsahu souboru v case t=0 az tau
% P je pravdepodobnost zaniku souboru v case t=0 az tau
t=[0:tau]';
M=k0*exp((lambda-mi).*t);
S=sqrt(k0*((lambda+mi)/(lambda-mi))*exp((lambda-mi).*t).*(exp((lambda-mi).*t)-1));
P=mi*((1-exp((lambda-mi).*t)))./(mi-lambda*exp((lambda-mi).*t));
plot(t,M)
figure
plot(t,S)
figure
plot(t,P)
```

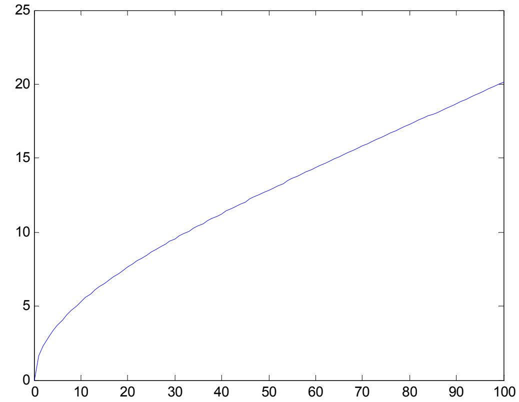
Praktická aplikace:
Nechť je dán lineární proces vzniku a zániku, v němž intenzita vzniku odpovídá roční míře porodnosti v ČSSR v r. 1983 ($\lambda = 0{,}0148$) a intenzita zániku odpovídá roční míře úmrtnosti v ČSSR v r. 1983 ($\mu = 0{,}0121$). Předpokládáme, že v čase $t = 0$ má soubor rozsak $k_0 = 100$.

a) Pro $t = 0, 1, 2, \ldots, 100$ vypočtěte a graficky znázorněte střední hodnotu a směrodatnou odchylku rozsahu souboru.
b) Pro $t = 0, 1, 2, \ldots, 100$ vypočtěte a graficky znázorněte pravděpodobnost vyhynutí.

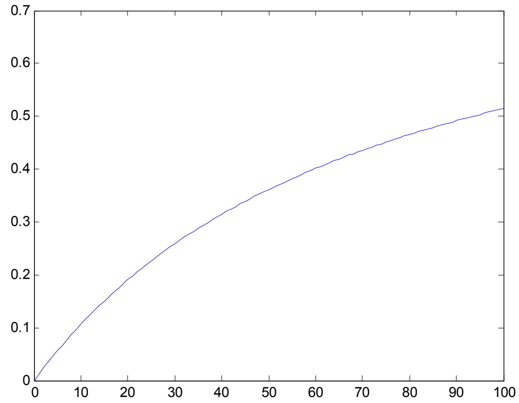
Výsledek:
Graf závislosti střední hodnoty rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti směrodatné odchylky rozsahu souboru na čase:



Graf závislosti pravděpodobnosti vyhynutí na čase



Definice: Erlangův proces je HMŘ se spojitým časem, který má množinu stavů J = {0, 1, 2, …, m}, vektor počátečních pravděpodobností **p**(0) = (1, 0, …, 0) a matici intenzit přechodu

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\lambda+(m-1)\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}.$$

Věta: Stacionární rozložení Erlangova procesu je dáno vzorcem:

$$a_j = \frac{\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}, \ j = 0, 1, \dots, m$$

Úkol:
Napište v MATLABu funkci, která bude počítat stacionární rozložení Erlangova procesu.
Vstupní parametry:
m … nejvyšší pořadové číslo v množině stavů J = {0, 1, …, m}
lambda … intenzita vstupu
mi … intenzita výstupu
Výstupní parametr:
vektor **a** … stacionární vektor

Návod:
```
function [a]=Erlang(m,lambda,mi)
% Stacionarni rozlozeni Erlangova procesu
a0=1/sum(((lambda/mi).^(0:m)).*(1./(factorial(0:m))));
a=((lambda/mi).^(1:m)).*(1./(factorial(1:m)))*a0;
a=[a0 a];
```

Praktická aplikace: Je dán Erlangův proces s množinou stavů J = {0, 1, …, 4} a parametry λ = 2, μ = 3. Najděte jeho stacionární rozložení.
Výsledek:

$$a_0 = \frac{243}{473} = 0{,}5137, a_1 = \frac{162}{473} = 0{,}3425, a_2 = \frac{54}{473} = 0{,}1142, a_3 = \frac{12}{473} = 0{,}0245, a_4 = \frac{2}{473} = 0{,}0042$$