

Není-li stanoveno jinak, dostává první, kdo odevzdá správně vyřešený úkol, uvedený počet bodů, každý další vždy o bod méně než předchozí.

1. (2b.) Dokažte, že pro $a, b \in \mathbb{N}$ platí: $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{(a,b)} - 1$.
2. (5b.) Dokažte, že pro každé liché prvočíslo p existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n , splňujících $p \mid n \cdot 2^n + 1$.
3. (2b. — *nutný i algoritmus*) Najděte nejmenší prvočíslo větší než 3 tvaru $n \cdot 2^n + 1$.
4. (5b.) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho lichých přirozených čísel k s vlastností, že čísla $2^{2^n} + k$ jsou složená pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
5. (5b.) Dokažte, že pro každé celé číslo $k \neq 1$ existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n s vlastností, že číslo $2^{2^n} + k$ je složené.
6. (8b.) Dokažte, že pro žádné $n \in \mathbb{N}, n > 1$ neplatí $n \mid 2^n - 1$.