Modely konfliktů

1 Bimaticové hry

Definice 1. *Konečná hra dvou hráčů v normálním tvaru* (*bimaticová hra*) je uspřádaná čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.

Množina X, resp. Y, je *množina strategií prvního,* resp. *druhého, hráče.* Funkce u, resp. v, je *výplatní funkce prvního,* resp. *druhého, hráče.*

Poněvadž množiny X, Y jsou konečné, lze položit $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$. Označme $a_{ij} = u(i, j)$, $b_{ij} = v(i, j)$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

a dále $\boldsymbol{e}_i$ vektor, jehož všechny složky jsou nulové s výjimkou i-té, která je rovna 1; jedná se tedy o i-tý prvek standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^k$, jehož dimenze k bude dána kontextem. Při tomto označení je

$$u(i, j) = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{B} \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j^{\mathsf{T}} \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{e}_i. \tag{1}$$

Bimaticová hra je tedy jednoznačně určena maticemi A a B. Můžeme ji zapisovat ve tvaru

		hráč 2			
		1	2	…	m
hráč 1	1	a_{11} b_{11}	a_{12} b_{12}	…	a_{1m} b_{1m}
	2	a_{21} b_{21}	a_{22} b_{22}	…	a_{2m} b_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	a_{n1} b_{n1}	a_{n2} b_{n2}	…	a_{nm} b_{nm}

Označme

$$S_k = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_k^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^k : x1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} x_k = 1 \right\}$$

k-rozměrný simplex.

Definice 2. *Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry* $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$ je uspořádaná čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$, kde $X^* = S_n$, $Y^* = S_m$ a u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}} \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}, \tag{2}$$

kde $\mathsf{A} = \big(u(i, j)\big)$, $\mathsf{B} = \big(v(i, j)\big)$.

Zobrazení $f : X \to X^*$ a $g : Y \to Y^*$ definovaná předpisy $f(i) = \boldsymbol{e}_i$, $g(j) = \boldsymbol{e}_j$ jsou prostá. Proto lze množinu X (resp. Y) považovat za podmnožinu množiny X^*, resp. Y^*. Porovnáním formulí (1) a (2) vidíme, že funkci u, resp. v lze považovat za zúžení zobrazení u^*, resp. v^*, na množinu X, resp. Y. Strategiím z množin X, Y budeme říkat *ryzí*, prvkům z množin X^*, Y^* budeme říkat *smíšené strategie.*

Definice 3. Buď $\mathcal{G} = (X, X, u, v)$ bimaticová hra s týmiž množinami strategií pro oba hráče. Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ se nazývá *rovnovážná (podle Nashe)*, jestliže pro každou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in X^*$ platí nerovnosti

$$u^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leq u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}), \qquad v^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) \leq v^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}).$$

Označení:

Pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ klademe

$$C(\boldsymbol{x}) = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_k > 0\};$$

množinu $C(\boldsymbol{x})$ nazýváme *nosič strategie* $\boldsymbol{x}$. Podobně zavádíme nosič strategie $\boldsymbol{y} \in Y^*$.

Kroneckerův symbol je definován jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

2 Vyjádření konfliktu pomocí systému obyčejných diferenciálních rovnic

Představme si dva účastníky konfliktní situace popsané bimaticovou hrou $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$, $u(i, j) = a_{ij}$, $v(i, j) = b_{ij}$. Budou se chovat podle následujícího scénáře:

Během časového intervalu délky Δt sehrají mnoho kol této hry tak, že budou používat pevně zvolené smíšené strategie

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\mathsf{T}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))^\mathsf{T},$$

tj. první hráč použije ryzí strategii i s relativní četností x_i atd. Tímto způsobem první hráč empiricky zjistí střední hodnotu výhry $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}$ a také střední hodnotu výhry při používání ryzí strategie i, tj.

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

(za první hodnotu může vzít celkovou výhru dělenou počtem sehraných kol, za druhou součet výher v kolech hraných se strategií i dělený jejich počtem). Po uplynutí času Δt změní první hráč svou smíšenou strategii tak, aby relativní změna frekvence používání strategie i byla úměrná odchylce výhry při používání strategie i a délce časového intervalu Δt, tj.

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{x_i(t)} = c\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j(t) - \boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\right)\Delta t. \tag{3}$$

Odtud plyne

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t)\left(1 + c\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j(t) - \boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\right)\Delta t\right).$$

Poněvadž $\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^{\mathsf{T}} \in X^*$, platí $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$ a tedy také

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i(t) + c \left(\sum_{j=1}^{m} x_i(t) a_{ij} y_j(t) - \boldsymbol{x}(t)^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}(t) x_i(t) \right) \Delta t \right) =$$
$$= 1 + c \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i(t) a_{ij} y_j(t) - \boldsymbol{x}(t)^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}(t) \right) \Delta t = 1 + c \cdot 0 \cdot \Delta t = 1$$

pro libovolnou konstantu c. Za koeficient úměrnosti můžeme tedy volit $c = 1$. Rovnici (3) nyní přepíšeme na tvar

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = x_i \left(\boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \right) = x_i \left(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x} \right)^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}.$$

Analogickou úvahou odvodíme pro druhého hráče rovnici

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta t} = y_j \left(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y} \right)^{\mathsf{T}} \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}.$$

Limitním přechodem $\Delta t \to 0$ dostaneme autonomní systém $n + m$ obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \left(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x} \right)^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \quad && i = 1, 2, \ldots, n \\ y_j' &= y_j \left(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y} \right)^{\mathsf{T}} \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{x}, \quad && j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Spolu s tímto systémem uvažujme počáteční podmínky

$$\begin{aligned} x_i(0) = x_{i,0} \geq 0, \quad & i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_j(0) = y_{j,0} \geq 0, \quad & j = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,0} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{m} y_{j,0} = 1. \tag{6}$$

Věta 1. *Systém rovnic (4) s počáteční podmínkou (5) splňující rovnosti (6) má jediné řešení definované na intervalu* $[0, \infty)$. *Množiny* $S_n \times S_m$, $\operatorname{int}(S_n \times S_m)$ *a* $\partial(S_n \times S_m)$ *jsou invariantními množinami systému (4).*

Důkaz. Jsou-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \left(x_1(t), \ldots, y_m(t)\right)^{\mathsf{T}}$ řešení systému (4), pak platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t) - \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(t) \mathsf{A} \boldsymbol{y}(t) \right) =$$
$$= \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(t) \mathsf{A} \boldsymbol{y}(t) \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \right).$$

To znamená, že funkce $z = z(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t) - 1$ splňuje lineární homogenní diferenciální rovnici

$$z' = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(t) \mathsf{A} \boldsymbol{y}(t) z,$$

takže

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(0) - 1 \right) \exp \left(\int_{t}^{0} \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}(s) \mathsf{A} \boldsymbol{y}(s) \mathrm{d}s \right).$$

Z první rovnosti (6) nyní plyne identita

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1 \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{7}$$

Analogicky odvodíme platnost rovnosti

$$\sum_{j=1}^{m} y_j(t) = 1 \quad \text{pro všechna } t \geq 0. \tag{8}$$

Pokud má tedy úloha (4), (5) řešení, pak řešení s počáteční podmínkou v množině $S_n \times S_m$ v této množině zůstává pro všechna $t > 0$, tedy $S_n \times S_m$ je invariantní množinou systému (4).

Dále pro všechna $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j, l \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{y}\right) = \left(\delta_{ik}(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T} - x_i \boldsymbol{e}_k^\mathsf{T}\right) \mathsf{A}\boldsymbol{y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l}\left(x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{y}\right) = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{e}_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T} \mathsf{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\right) = y_j\left(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y}\right)^\mathsf{T} \mathsf{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{e}_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l}\left(y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T} \mathsf{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}\right) = \left(\delta_{jl}(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}) - y_j \boldsymbol{e}_l^\mathsf{T}\right) \mathsf{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{x};$$

parciální derivace pravých stran systému (4) podle všech proměnných jsou na množině $S_n \times S_m$ ohraničené. Odtud a z Picardovy-Lindelöfovy věty plyne, že systém (4) je globálně jednoznačně řešitelný na množině $S_n \times S_m$.

Je-li $x_{i,0} = 0$, resp. $x_{i,0} > 0$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pak z jednoznačnosti řešení systému (4) plyne, že $x_i(t) = 0$, resp. $x_i(t) > 0$, pro všechna $t \geq 0$. Analogickou úvahu můžeme provést pro počáteční hodnotu $y_{j,0}$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Odtud plyne, že množiny $\partial(S_n \times S_m)$ a $\operatorname{int}(S_n \times S_m)$ jsou invariantní. □

3 Redukce dimenze systému (4)

Z invariance množiny $S_n \times S_m$ vzhledem k systému (4), tj. z rovností (7) a (8) plyne

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_j, \qquad y_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j$$

Odtud dále dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y} &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_l a_{lj} y_j = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij}y_j + a_{im}\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j\right) - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1} a_{lj}y_j + a_{lm}\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j\right)\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij} - a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj} - a_{lm})y_j + a_{lm}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij}-a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj}-a_{lm})y_j + a_{lm}\right] -$$

$$- \left(1-\sum_{l=1}^{n-1} x_l\right)\left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{nj}-a_{nm})y_j + a_{nm}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij}-a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{j=1}^{m-1}(a_{nj}-a_{nm})y_j - a_{nm} -$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj}-a_{lm}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij}-a_{im}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{im} - a_{nm} -$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj}-a_{lm}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\delta_{il}\left[(a_{lj}-a_{lm}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] -$$

$$- \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} x_l \left[(a_{lj}-a_{lm}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(\delta_{il}-x_l)\left[(a_{lj}-a_{lm}-a_{nj}+a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right].$$

Označme nyní

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{im} - a_{nj} + a_{nm}, \quad \hat{a}_i = a_{nm} - a_{im}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ a dále

$$\tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1(m-1)} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{(n-1)1} & \tilde{a}_{(n-1)2} & \ldots & \tilde{a}_{(n-1)(m-1)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Analogickým výpočtem lze ukázat, že

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}(\delta_{lj}-y_j)\left[(b_{lj}-b_{lm}-b_{nj}+b_{nm})x_l + b_{nj} - b_{nm}\right]$$

a potom označit

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - b_{im} - b_{nj} + b_{nm}, \quad \hat{b}_j = b_{nm} - b_{nj}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ a dále

$$\tilde{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \ldots & \tilde{b}_{1(m-1)} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \ldots & \tilde{b}_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{(n-1)1} & \tilde{b}_{(n-1)2} & \ldots & \tilde{b}_{(n-1)(m-1)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Provedená úvaha a výpočet ukazují, že $(n+m)$-rozměrný systém (4) lze zredukovat na systém $(n+m-2)$-rozměrný

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{a}}\right), & i &= 1,2,\ldots,n-1, \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\left(\tilde{\mathsf{B}}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{b}}\right), & j &= 1,2,\ldots,m-1. \end{aligned} \tag{9}$$

Nyní označujeme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})^\mathsf{T}$.

4 Konflikty se dvěma strategiemi

Nechť $n = m = 2$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Pak systém rovnic (9) je tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2), \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2), \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$, $\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{21}$. Fázovým prostorem je množina $[0,1] \times [0,1]$. Systém má stacionární řešení $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ odpovídající ryzím strategiím. V případě, že

$$\alpha_1 \neq 0, \quad 0 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1, \qquad \beta_1 \neq 0, \quad 0 < \frac{\beta_2}{\beta_1} < 1,$$

má také vnitřní stacionární řešení

$$\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

odpovídající smíšeným strategiím. Variační matice systému je

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2x)(\alpha_1 y - \alpha_2) & \alpha_1 x(1-x) \\ \beta_1 y(1-y) & (1-2y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{pmatrix},$$

takže

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \qquad J(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad J(1,0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad J\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_1\beta_2(\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1^2} \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že stacionární řešení odpovídající ryzím strategiím jsou sedla nebo uzly, stacionární řešení odpovídající smíšeným strategiím je sedlo nebo nestabilní ohnisko.

5 Symetrické konflikty

Definice 4. Řekneme, že konečná hra dvou hráčů $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$ je *symetrická,* pokud $X = Y$ a $u(i,j) = v(j,i)$ pro každé dvě ryzí strategie $i, j \in X$.

Pro symetrickou hru platí $a_{ij} = u(i,j) = v(j,i) = b_{ji}$, tedy $\mathsf{A} = \mathsf{B}^\mathsf{T}$. To znamená, že symetrická hra je jednoznačně určena maticí A.

Poznámka 1. Nechť matice A určuje výplatní funkce v symetrické konečné hře. Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ je rovnovážnou strategií (podle Nashe) právě tehdy, když $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$ pro všechny smíšené strategie $\boldsymbol{x} \in X^*$, tj. $\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \max\left\{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} \in X^*\right\}$.

Důkaz. Nechť $\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ je rovnovážná strategie. Pak pro libovolnou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in X^*$ platí

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = u^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \leq u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}.$$

Nechť naopak platí $\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \max\left\{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} \in X^*\right\}$. Pak pro libovolnou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in X^*$ platí

$$\begin{aligned} u^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) &= \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}), \\ v^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = v^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}). \end{aligned}$$

□

Věta 2. *Nechť $\mathcal{G}$ je symetrická konečná hra určená maticí A. Smíšená strategie*

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)^\mathsf{T} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i \in X^*$$

je rovnvážná právě tehdy, když

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \textit{pro všechna } i \notin C(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{10}$$

a

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \textit{pro všechna } i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{11}$$

Důkaz. Nechť $\bar{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážná strategie. Podle předchozí poznámky platí

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Připusťme, že existuje $k \in C(\bar{\boldsymbol{x}})$ tak, že $\boldsymbol{e}_k^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} < \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Pak

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}})} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{x}_k \boldsymbol{e}_k^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}) \setminus \{k\}} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} < \\ &< \bar{x}_k \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}) \setminus \{k\}} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}, \end{aligned}$$

což je spor, který dokazuje nutnost podmínek.

Nechť platí podmínky (10) a (11). Pak pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Je-li nyní $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in X^*$ libovolná smíšená strategie, pak

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}},$$

takže podle předchozí poznámky je $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnovážnou strategií. Podmínky jsou tedy i dostatečné. □

Poznámka 2. Ryzí strategie $\boldsymbol{e}_i \in X^*$ je rovnovážnou strategií symetrické konečné hry s výplatními funkcemi určenými maticí A právě tehdy, když $a_{ji} \leq a_{ii}$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Důkaz. V tomto případě je $C(\boldsymbol{e}_i) = \{i\}$, $\boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ji}$, $\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ii}$. □

Buď $\mathcal{G}$ konečná hra určená kladnou maticí A, tj. $a_{ij} > 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Podmínka kladnosti čísel a_{ij} není újmou na obecnosti; její splnění lze pro libovolnou matici dosáhnout přičtením vhodné konstanty ke všem jejím prvkům. Budeme hledat rovnovážnou strategii $\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ takovou, že její používání dává ze všech rovnovážných strategií největší výhru, tj.

$$v = \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \tilde{\boldsymbol{x}} = \max \left\{ \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in X^* \text{ je rovnovážná strategie} \right\}.$$

Předpokládejme, že $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^{\mathsf{T}}$ je strategie požadované vlastnosti. Pak platí

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_i a_{ij} \tilde{x}_j > 0.$$

Položme

$$\xi_i = \frac{\tilde{x}_i}{v}.$$

Pro libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ podle věty 2 platí

$$v \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j = \boldsymbol{e}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \tilde{\boldsymbol{x}} \leq \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \tilde{\boldsymbol{x}} = v,$$

takže

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq 1.$$

Dále

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j = \frac{1}{v}.$$

Má-li být kladné číslo v maximální, musí být jeho převrácená hodnota minimální; má-li být hodnota $\sum_{j=1}^{n} \xi_i$ minimální, musí být opačná hodnota maximální. Hledání rovnovážné strategie dávající největší výhru je tedy ekvivalentní hledání maxima lineárního výrazu

$$-\sum_{j=1}^{n} \xi_i$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq 1, \quad \xi_i \geq 0 \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n,$$

což je úloha lineárního programování.

V symetrické hře je $m = n$, strategie obou hráčů jsou stejné, tj. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ a $\mathsf{B}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A}$. To znamená, že systém diferenciálních rovnic (4) se skládá ze dvou shodných subsystémů. Jinak řečeno, symetrickou hru můžeme vyjádřit systémem n obyčejných diferenciálních rovnic

$$x_i' = x_i \left(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x} \right)^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Z věty 1 plyne, že systém (12) je jednoznačně řešitelný na n-rozměrném simplexu S_n a že množiny S_n, $\operatorname{int} S_n$ a ∂S_n jsou vzhledem k němu invariantní.

Věta 3. *Je-li $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnovážnou strategií symetrické konečné hry určené maticí A, pak $\bar{\boldsymbol{x}}$ je stacionárním bodem autonomního systému (12).*

Důkaz. Plyne bezprostředně z věty 2 a z toho, že podmínky (10) a (11) lze přepsat na tvar

$$(\boldsymbol{e}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^\mathsf{T} \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \le 0 \quad \text{pro všechna } i \notin C(\bar{\boldsymbol{x}}), \qquad (\boldsymbol{e}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^\mathsf{T} \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = 0 \quad \text{pro všechna } i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

□

Obrácené tvrzení neplatí; každá ryzí strategie $\boldsymbol{e}_i$ je stacionárním bodem systému (12), ale ryzí strategie obecně není rovnovážná.

Věta 4. *Je-li $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)^\mathsf{T} \in X^*$ stabilním stacionárním bodem systému (12), pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií symetrické konečné hry určené maticí A.*

Důkaz. Označme

$$F_i(\boldsymbol{x}) = x_i \left(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x}\right)^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{x} = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_l x_k \right).$$

Pak

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}x_l x_k \right) + x_i \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - \sum_{l=1}^{n} a_{lj}x_l \right) =$$

$$= \delta_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{x} \right) + x_i \left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{e}_j \right).$$

Prvky variační matice systému (12) v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$ tedy jsou

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \hat{x}_i \left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{e}_j \right), & \hat{x}_i \ne 0, \\ \delta_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \right), & \hat{x}_i = 0. \end{cases}$$

Vlastní čísla variační matice splňují rovnici

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \delta_{ij}\lambda \right) = 0.$$

Buď i takové, že $\hat{x}_i = 0$. Determinant rozvineme podle i-tého řádku:

$$\left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda \right) \cdot (\text{příslušný algebraický doplněk}).$$

Odtud plyne, že pro každé i takové, že $\hat{x}_i = 0$, je číslo $\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ vlastní hodnotou variační matice. Ze stability stacionárního řešení $\hat{\boldsymbol{x}}$ plyne

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \le 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i = 0.$$

Současně platí

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i \ne 0,$$

neboť $\hat{\boldsymbol{x}}$ je stacionární řešení systému (12). Celkem tedy

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \le 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Je-li nyní $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \in X^*$ libovolná smíšená strategie, pak platí

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \le \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}},$$

což znamená, že $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií. □

Obrácené tvrzení opět neplatí. Uvažme například konečnou symetrickou hru s maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak strategie $\bar{\boldsymbol{x}} = (0, 1)^\mathsf{T}$ je rovnovážná, neboť

$$(x, 1-x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro libovolné $x \in [0, 1]$. Příslušný systém diferenciálních rovnic je

$$x' = x \left[(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = x(x - x^2) = x^2(1 - x),$$

$$y' = y \left[(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = y(-x^2) = -x^2 y.$$

Stacionární body tedy jsou $(0, y)$, $(1, 0)$ pro libovolné $y \in [0, 1]$. Variační matice ve stacionárním bodě (x, y) je tvaru

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 & 0 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Zejména tedy

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice má dvojnásobný kořen $\lambda = 0$, což znamená, že stacionární řešení $(0, 1)$ není stabilní.

Věta 5. *Pro $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ položme $b_{i,j} = a_{nj} - a_{ij}$, $r_i = a_{in} - a_{nn}$ a*

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots b_{1,n-1} & \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots b_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots b_{n-1,n-1} & \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pak systém (12) na množině $\operatorname{int} S_n$ a Lotkův-Volterrův systém

$$y_j' = y_j \left(r_j - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{y} \right), \qquad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{13}$$

na množině $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^{n-1} = \left\{ (y_1, y_j, \dots, y_{n-1})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n-1} : y_1 > 0, y_2 > 0, \dots, y_{n-1} > 0 \right\}$ jsou topologicky ekvivalentní, tj. existuje difeomorfismus $F : \operatorname{int} S_n \to \operatorname{int} \mathbb{R}_+^{n-1}$, který zobrazí trajektorie systému (12) na trajektorie systému (13).

Důkaz. Pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\mathsf{T} \in \operatorname{int} S_n$ a pro $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ položme $y_i = \dfrac{x_i}{x_n}$. Pak

$$\sum_{j=1}^{n-1} y_j = \frac{1}{x_n} \sum_{j=1}^{n-1} x_i = \frac{1}{x_n}(1 - x_n) = \frac{1}{x_n} - 1.$$

Odtud dostaneme

$$x_n = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j} \quad \text{a} \quad x_i = \frac{y_i}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

To znamená, že zobrazení $F : \operatorname{int} S_n \to \operatorname{int} \mathbb{R}_+^{n-1}$ dané předpisem

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left((x_1, x_2, \dots, x_n)^\mathsf{T}\right) = \left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^\mathsf{T}$$

je bijekce. Toto zobrazení je zřejmě spojité.

Nechť nyní $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešení systému (12) takové, že $x_n(0) > 0$, tedy $x_n(t) > 0$ pro všechna $t > 0$. Položme

$$\tau = \int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s.$$

Pak τ je rostoucí funkcí proměnné t, $\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = x_n$ a dále

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}\dfrac{x_j}{x_n}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{x_j' x_n - x_j x_n'}{x_n^2}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n^2}\left(x_j' - x_j\frac{x_n'}{x_n}\right) = \\
&= \frac{1}{x_n^2}\left(x_j(\boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}) - x_j(\boldsymbol{e}_n^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x})\right) = \frac{x_j}{x_n^2}\left(\boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_n^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right) = \\
&= \frac{x_j}{x_n^2}\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k - \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k\right) = \frac{x_j}{x_n^2}\sum_{k=1}^n (a_{jk} - a_{nk})x_k = \\
&= \frac{x_j}{x_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(a_{jk} - a_{nk})x_k + (a_{jn} - a_{nn})x_n\right) = \frac{x_j}{x_n}\left(a_{jn} - a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{nk} - a_{jk})\frac{x_k}{x_n}\right) = \\
&= y_j\left(r_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_{j,k}y_k\right) = y_j\left(r_j - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{y}\right).
\end{aligned}$$

□