30.3.1993

ÚLOHA BODOVÉHO ODHADU

ZÁKLADNÍ INGREDIENTY

$\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$

(i) $g(\theta) : \Theta \to R^1$ odhadovaná fce (estimand) kterou chceme odhadnout (neznámá, nepozorovatelná)

(ii) $\underset{\sim}{X}$ náhodný vektor pozorovatelný, $\underset{\sim}{X} \in \mathcal{X}$
$\underset{\sim}{X} \sim P_\theta \in \mathcal{P}$

Pozorované hodnoty $\underset{\sim}{x}$ vektoru $\underset{\sim}{X}$ tvoří data

Úkolem je stanovit vhodný odhad (estimátor) tj. reálnou fci $T(\underset{\sim}{x}) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^1$ o které doufáme, že je blízko $g(\theta)$.

Jestliže obor hodnot $g(\theta)$ je nějak omezen (kladné, celočíselné) pak totéž chceme od odhadu T.

Protože $T(\underset{\sim}{X})$ je náhodná veličina, může být blízká $g(\theta)$ jen v průměru apod.
Obecně ztrátu, kterou utrpíme, odhadneme-li

(iii) $g(\theta)$ hodnotou t měříme ztrátovou fcí $L(\theta, t)$.
a požadujeme

$$L(\theta, t) \geq 0 \quad \forall\ \theta, t$$
$$L(\theta, g(\theta)) = 0 \quad \forall \theta$$

Nepřesnost (nebo přesnost) odhadu je pak měřena rizikovou fcí (rizikem)

$$R(\theta, T) = E_\theta\{L(\theta, T(\underset{\sim}{X}))\}$$

Cíl: budeme najít stejnoměrně nejlepší odhad, tj.
$R(\theta, T) = \min$ stejnoměrně v $\theta \in \Theta$.
vzhledem k T

Takový odhad neexistuje, protože v bodě θ_0 dosáhneme minima ~~pro~~ odhadem $T(x) \equiv g(\theta_0)$ (neboli existuje jen v triviálním případě $g(\theta) \equiv$ konst.).

Proto omezujeme třídu odhadů, přes kterou minimalizujeme riziko: např. uvažujeme $\boxed{\text{nestranné odhady / nevychýlené}}$

$$E_\theta T(\underset{\sim}{X}) - g(\theta) = 0$$

bias (jednostrannost, vychýlení

Nebo $\boxed{\text{mediánově nestranné odhady}}$

$$P_\theta[T(\underset{\sim}{X}) < g(\theta)] = P_\theta[T(\underset{\sim}{X}) > g(\theta)]$$

Jestliže se např. jedná o parametr posunutí $g(\theta)=\theta$ a $L(\theta, t) = L(|\theta - t|)$, pak se omezujeme na $\boxed{\text{ekvivariantní odhady}}$ $T(X_1+c, \dots, X_n+c) = T(\underset{\sim}{X}) + c$

Místo toho abychom minimalizovali riziko stejnoměrně přes $\theta \in \Theta$, můžeme buď

a) minimalizovat průměrné riziko

$$\int_\Theta R(\theta, T)\, w(\theta)\, d\theta \qquad (*)$$

vzhledem k váhové fci w. ~~Speci~~ Odhady které minimalizují $(*)$ jsou tzv. $\boxed{\text{formálně bayesovské}}$ odhady vzhledem k apriorní (zobecněné) hustotě $w(\theta)$.

b) Nebo můžeme minimalizovat maximální dosažitelné riziko

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, T)$$

$\boxed{\text{minimaxový odhad.}}$

Odpovídá-li to povaze problému, je vhodné volit konvexní ztrátovou fci. Řada problémů vede ke stejným řešením pro lib. konvexní ztrátovou fci $L(\theta, t)$, konvexní v t.

KONVEXNÍ ZTRÁTOVÁ FUNKCE.

Definice. Fce $\Phi : I \to \mathbb{R}^1$, kde $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ se nazývá konvexní, jestliže $\forall$ x, y, $a < x < y < b$ a $\forall\, 0 < \lambda < 1$ platí

$$\Phi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \Phi(x) + (1-\lambda) \Phi(y) \qquad (1)$$

Fce se nazývá ryze konvexní, jestliže nerovnost v (1) je nahrazena ostrou. Fce Φ se nazývá konkávní, jestliže $(-\Phi)$ je konvexní.

Konvexita je velmi silná vlastnost ze které plyne spojitost a existence pravostranných a levostranných derivací (Rockafellar)

Vlastnosti konvexních fcí:

(I) Jestliže Φ je diferencovatelná na (a, b), pak Φ je konvexní $\iff$

$$\Phi'(x) \leq \Phi'(y) \quad \forall\ a < x < y < b \qquad (2)$$

Φ je ryze konvexní jestliže nerovnost (2) je ostrá.

(II) Jestliže Φ je dvakrát diferencovatelná, pak (2) platí $\Longleftrightarrow$

$$\Phi''(x) \geq 0 \quad \forall\ a<x<b. \qquad (3)$$

Ostrá nerovnost ve (3) je postačující (ale nikoliv nutná) pro ryzí konvexitu.

Poznámka: Φ ~~ne~~ je konvexní ale ne ryze $\Longleftrightarrow$ Φ je lineární na nějakém podintervalu (a,b). Přesněji jestliže nerovnost (1) platí jako rovnost pro nějaká x, y a λ, pak Φ je lineární na $[x,y]$.

(III) Nechť Φ je konvexní na $I=(a,b)$ a t_0 je pevný bod I. Pak existuje přímka

$$y = L(x) = c(x-t_0) + \Phi(t_0)$$

bodem $[t_0, \Phi(t_0)]$ taková, že

$$L(x) \leq \Phi(x) \qquad \forall x \in I.$$

VĚTA (JENSENOVA NEROVNOST)

Jestliže Φ je konvexní na otevř. intervalu I a X je náhodná veličina taková, že $P(X\in I) = 1$ a $|EX| < \infty$, pak

$$\Phi(EX) \leq E\Phi(X) \qquad (5)$$

Jestliže Φ je ryze konvexní a neplatí $X = \text{konst}$ s pstí 1, pak nerovnost (5) je ostrá.

Důkaz. Nechť $L(x)$ je přímka procházející bodem $[t_0, \Phi(t_0)]$, $\qquad t_0 = EX$

a $L(x) \leq \Phi(x)$. Pak

$$E\,\Phi(X) \geq E\,L(X) = E(c(X-EX)) + \Phi(EX) = \Phi(EX)$$

Jestliže Φ je ryze konvexní, pak přímka se dotýká Φ jen bodu t, jinak $L(x) < \Phi(x)$.

~~$\Rightarrow E L X$~~

Věta nevylučuje možnost $E\,\Phi(X) = \infty$ $\square$

VĚTA (RAO - BLACKWELLOVA).

Nechť X je pozorovatelný náh. vektor s rozdělením $P_\theta \in \mathcal{P} = \{P_{\theta'} : \theta' \in \Theta\}$ a nechť S je postačující ~~statistika~~ pro $\mathcal{P}$.

Nechť T je odhad fce $g(\theta)$ a nechť ztrátová fce $L(\theta, t)$ je ryze konvexní fce t. Pak, má-li T konečnou střední hodnotu a riziko,

tj. $R(\theta, T) = E_\theta L(\theta, T(X)) < \infty \quad \forall \theta$

a označíme-li

$$T^*(s) = E\{T(X) \mid S(x) = s\}$$

pak riziko odhadu $T^*(S(X))$ vyhovuje

$$R(\theta, T^*) < R(\theta, T)$$

pokud neplatí $T(X) = T^*(S(X))$ s psti 1.

Důkaz. Položme $\Phi(t) = L(\theta, t)$.

Pak

$$\Phi(T^*(s)) = L(\theta, T^*(s)) = L[\theta, E(T \mid S=s)] =$$

$$= \Phi(E(T \mid s)) < E(\Phi(T) \mid S=s) =$$

$$= E[L(\theta, T(X)) \mid S=s] \quad \text{pokud není } T(X) = T^*(S(X)) \text{ s.j.}$$

$$\Longrightarrow R(\theta, T^*) = E_\theta L[\theta, T^*(S(X))] < E_\theta L(\theta, T(X))$$

Poznámky: (i) Postačitelnost S je nutná jen k tomu, že $T^*(S)$ ~~nezávisí na~~ $= E(T(X) \mid S)$ nezávisí na θ a tedy že je to odhad.

(ii) Pokud $L(\theta, t)$ je ryze konvexní, věta platí s neostrou nerovností.

(iii) Pokud L není konvexní, existují protipříklady.

$\boxed{\text{DEFINICE.}}$ Odhad T se nazývá $\boxed{\text{nepřípustný}}$, jestliže existuje jiný odhad T' který dominuje T, tj.

$$R(\theta, T') \leq R(\theta, T) \quad \forall \theta \quad \text{s ostrou ner. pro alespoň jedno } \theta.$$

Odhad T se nazývá $\boxed{\text{přípustný}}$ (vzhl. k L), jestliže neexistuje žádný jiný odhad, který ho dominuje!

VĚTA (JEDNOZNAČNOST). ~~Jestliže~~ Nechť L je ryze konvexní a T je přípustný odhad $g(\Theta)$ a nechť T' je jiný odhad se stejným rizikem, tj.

$$R(\Theta, T) = R(\Theta, T') \quad \forall \Theta \in \Theta .$$

Pak $T(X) = T'(X)$ s pstí 1.

Důkaz. Jestliže $T^* = \frac{1}{2}(T + T')$, pak pokud není $T = T'$ [-]

$$R(\Theta, T^*) < \frac{1}{2}[R(\Theta, T) + R(\Theta, T')] = R(\Theta, T) \ \forall \Theta$$

pokud není $T = T'$ s pstí 1. To je však ve sporu s přípustností T.

Příklady konvexní ztráty:

(i) Kvadratická chyba $\quad L(\Theta, t) = [t - g(\Theta)]^2$

(ii) Vážená kvadratická chyba:

$$L(\Theta, t) = w(\Theta)(t - g(\Theta))^2$$

(iii) Absolutní chyba (neryze konvexní)

$$L(\Theta, t) = |t - g(\Theta)|$$

(iv) Huberova ztrátová fce

$$L(\Theta, t) = \begin{cases} (t - g(\Theta))^2 & \dots \ |t - g(\Theta)| \le k \\ 2k|t - g(\Theta)| - k^2 & \dots \ |t - g(\Theta)| > k \end{cases} \qquad k > 0$$

(v) L_p-chyba $\quad L(\Theta, t) = |t - g(\Theta)|^p \quad 1 < p < 2$

VEKTOROVÁ ODHADOVÁ FCE:

$$g(\theta) = (g_1(\theta), \dots, g_k(\theta))$$

Odhad $T(X)$ je také k-rozměrný vektor.

Reálná fce $\Phi : E \to \mathbb{R}^1$, kde $E \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená konvexní množina, se nazývá konvexní, když

$$\Phi(\lambda \underset{\sim}{x}_1 + (1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2) \leq \lambda \Phi(\underset{\sim}{x}_1) + (1-\lambda)\Phi(\underset{\sim}{x}_2)$$

$$\forall \; \underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2 \in E \text{ a } 0 \leq \lambda \leq 1$$

→ Jestliže Φ je dvakrát diferencovatelná v E, ~~jestliže~~ pak Φ je konvexní $\Longleftrightarrow$

$$\underset{\sim}{H} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

(Hessova matice)

je pozitivně semidefinitní

a Φ je ryze konvexní $\Longleftrightarrow$ H je pozitivně definitní

→ Jestliže Φ je konvexní definovaná na otevřené konvexní množině $E \subset \mathbb{R}^k$, $\underset{\sim}{t}^0 \in E$ pevný bod, pak existuje nadrovina

$$y = L(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_i (x_i - t_i^0) + \Phi(\underset{\sim}{t}_0)$$

procházející bodem $(\underset{\sim}{t}^0, \Phi(\underset{\sim}{t}^0))$ a vyhovující

$$L(\underset{\sim}{x}) \leq \Phi(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \in E.$$

→ Jestliže $\underset{\sim}{X}$ je náhodný vektor, $P(\underset{\sim}{X} \in A) = 1$ pro nějakou otevřenou konvexní množinu ~~A, pak~~ a jestliže existuje $E\underset{\sim}{X}$, pak $E\underset{\sim}{X} \in A$

Důkaz indukcí a sporem. X je OČM jednorozměrných fcí

NESTRANNÉ ODHADY.

$$E_\theta(T(\underset{\sim}{X})) = g(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Nestranný odhad nemusí existovat : Příklad

$X \sim b(n,p)$, $g(p) = 1/p$

Nestrannost $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} T(k)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1/p \quad \forall p \in (0,1)$

Jestliže $p \to 0$, pak levá strana $\to T(0)$ a pravá strana $\to \infty$

Jestliže existuje nestranný odhad $g(\theta)$, pak g nazveme (odhadnutelnou fcí θ (nestranně))

LEMMA (struktura třídy nestranných odhadů)

Jestliže T_0 je nestranný odhad $g(\theta)$ ~~a~~, pak třída vš. nestranných odhadů je charakterizována vztahem

$$\boxed{T = T_0 - U}$$

kde U je libovolný nestranný odhad nuly, tj.

$$E_\theta U = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

Jestliže $L(\theta, t) = (t - g(\theta))^2$, pak $R(\theta, T) =$
$= E_\theta (T - g(\theta))^2 = var_\theta T(X)$ pro nestranné odhady.

Jestliže T^0 minimalizuje $var_\theta T(X)$ ~~na~~ $\forall \theta$ mezi všemi nestrannými odhady T, pak T^0 se nazývá ~~stejn.~~ nejlepší nestranný odhad SNNO

Označme Δ = množina nestranných odhadů T splňujících $E_\theta T^2 < \infty \; \forall \theta \in \Theta$

VĚTA Nechť $\underset{\sim}{X} \sim P_\theta, \theta \in \Theta$, nechť $T \in \Delta$ a nechť $\mathcal{U}$ označuje množinu všech nestranných odhadů 0, které patří do Δ. Pak

T je SNNO (NOMR) své střední hodnoty $g(\theta) \iff$

$$\boxed{E_\theta \left(T(\underset{\sim}{X}) . U(\underset{\sim}{X}) \right) = 0} \quad \forall U \in \mathcal{U} \text{ a } \theta \in \Theta$$

Důkaz. (i) Nutnost: Nechť T je SNNO, $E_\theta T(\underset{\sim}{X}) = g(\theta)$.

Nechť ~~Nak~~ $U \in \mathcal{U}$ ($U \neq 0$) a položme $T' = T + \lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

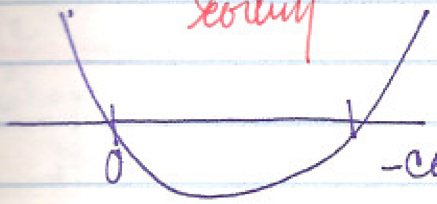
Pak
$$E_\theta T'(\underset{\sim}{X}) = E_\theta T(X) = g(\theta) \quad \forall \theta$$
$$\Longrightarrow var_\theta (T'(\underset{\sim}{X})) \geq var_\theta T(\underset{\sim}{X}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow E_\theta T'^2 \geq E_\theta T^2$$

Tj.
$$E_\theta T^2 + \lambda^2 E_\theta U^2 + 2\lambda E_\theta (T.U) \geq E_\theta T^2$$
$$\Longrightarrow \lambda^2 E_\theta U^2 + 2\lambda E_\theta (T.U) \geq 0 \quad \forall \lambda \quad (*)$$

~~Tato rovnice má~~ Řešíme kvadratickou rovnici $(*)$

$$\cancel{D = (\mathrm{var}_\theta U)^2 - 4(\mathrm{cov}_\theta(T,U))^2 - 4}$$

$$\underbrace{\lambda = 0 \qquad \lambda = -2\,\mathrm{cov}_\theta(T,U)/\mathrm{var}_\theta U}_{\text{kořeny}}$$



Konvexní fce, která má jediné minimum v $\lambda = 0 \iff E(TU) = 0$ jinak může být $E_\theta T'^2 > E_\theta T^2$

a tedy kvadratická fce ~~může nabývat~~ nabývá záporných hodnot pokud není $\mathrm{cov}_\theta(T,U) = 0$

(ii) Postačitelnost. Nechť $E_\theta(T.U) = 0 \;\forall\, U \in \mathcal{U}$.

Nechť T' je nestranný odhad $E_\theta T' = g(\theta)$. Jestliže $\mathrm{var}_\theta T' = \infty$, nemůže být lepší než T.

Nechť $\mathrm{var}_\theta T' < \infty$. Pak $\mathrm{var}_\theta(T^* - T') < \infty$ a $T^* - T' \in \mathcal{U} \implies$

$$\implies E_\theta\big(T(T-T')\big) = 0 \implies$$

$$\implies E_\theta T^2 = E_\theta(TT') \implies E_\theta T^2 - g^2(\theta) = E_\theta(TT') - g^2(\theta)$$

$$\implies \mathrm{var}_\theta T = \mathrm{cov}_\theta(T, T')$$

$$\implies 0 \leq \mathrm{var}_\theta(T - T') = \mathrm{var}_\theta T + \mathrm{var}_\theta T' - 2\,\mathrm{var}_\theta T$$

$$\implies \mathrm{var}_\theta T \leq \mathrm{var}_\theta T'. \qquad \square$$

VĚTA (jednoznačnost ~~SNNO~~ nestranného odhadu)

Nechť $X \sim P_\theta \in \mathcal{P}$ a nechť S je úplná postačující statistika pro $\mathcal{P}$. Pak každá nestranně odhadnutelná fce $g(\theta)$ má právě jeden nestranný odhad, který je funkcí S.

Důkaz:

Nechť T je nestranný odhad $g(\theta) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ ~~podle Rao-Blackwell~~ $T^*(S(X)) = E(T(X) | S(X))$ je nestranný a je fcí S.

Nechť $T_1(S)$ a $T_2(S)$ jsou 2 nestranné odhady. Pak

$$E_\theta(T_1 - T_2) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta, \; S \text{ úplná} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T_1 - T_2 = 0 \quad \text{s.j. } [P_\theta], \theta \in \Theta \qquad \square$$

VĚTA (Lehmann-Scheffé).

Nechť $X \sim P_\theta \in \mathcal{P} = \{P_{\theta'} : \theta' \in \Theta\}$. Nechť S je úplná postačující pro $\mathcal{P}$.

(i) Pro každou nestranně odhadnutelnou fci $g(\theta)$ a pro každou ztrátovou fci $L(\theta, t)$ konvexní v t existuje nestranný odhad který stejnoměrně minimalizuje riziko. Speciálně, tento odhad je také ~~SNNO~~ / NOMR

(ii) Tento SNNO je jediným nestranným odhadem, který je fcí S. Je to také jediný nestranný odhad s minimálním rizikem, pokud je riziko konečné a L je ryze konvexní v t!

~~Důkaz~~ Důkaz. (i) R.B. věta platí pro lib. ~~ztrátovou~~ fci. Podle předcházející věty je T^* určeno jednoznačně s.j. a $T^*(S) = E_\theta(T|S)$ minimalizuje riziko vzhledem k libovolné ~~ke~~ konvexní ztrátě.

Důsledek Jestliže $\mathcal{P}$ je exponenciální systém plné hodnosti (tj. $f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \cancel{\exp\left\{\sum_{j=1}^{p} c_j(\underset{\sim}{\theta}) T_j(\underset{\sim}{x}) + A(\underset{\sim}{\theta}) + B(\underset{\sim}{x})\right\}}$
$\exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \theta_j S_j(\underset{\sim}{x}) + A(\theta) + B(\underset{\sim}{x})\right\}$, $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta$ } kde Θ obsahuje neprázdný p rozměrný interval, pak tvrzení Lehmann–Scheffého věty platí pro $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ a $\underset{\sim}{S} = (S_1, \dots, S_p)$.

HLEDÁNÍ SNNO: Nechť $S(\underset{\sim}{x})$ je úplná postač.

(i) SNNO ~~je~~ odhadnutelné fce $g(\theta)$ je lib. fce $T(S)$ taková, že

$$(*) \quad E_\theta T(S) = g(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

Příklad. $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$, $i = 1, \dots, n$
$S(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Položme $g(p) = p(1-p)$. Pak rovnice $(*)$ má tvar

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T(s)\, p^s (1-p)^{n-s} = p(1-p) \qquad \forall\, 0 < p < 1$$

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T(s) \left(\frac{p}{1-p}\right)^{s} \cdot (1-p)^{n} = p(1-p)$$

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T(s) \left(\frac{p}{1-p}\right)^{s} = \frac{p}{(1-p)^{n-1}}$$

Položme $\frac{p}{1-p} = \rho \Rightarrow p = (1-p)\rho \Rightarrow p = \frac{\rho}{1+\rho}$

$$1-p = \frac{1}{1+\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T(s)\, \rho^{s} = \frac{\rho}{1+\rho} \cdot (1+\rho)^{n-1} = \rho \cdot (1+\rho)^{n-2}$$

binomická

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \rho^{i+1} = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n-2}{s-1} \rho^{s}, \quad 0 < \rho < \infty$$

binomická řada

$i+1=s$

porovnáme koeficienty

$T(0) = 0, \quad T(n) = 0$

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} T(s) \rho^{s} = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n-2}{s-1} \rho^{s}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{s} T(s) = \binom{n-2}{s-1}$$

$$T(s) = \frac{\binom{n-2}{s-1}}{\binom{n}{s}} = \frac{(n-2)\cdots(n-s)\, s!}{(s-1)!\, n \cdots (n-s+1)} =$$

$$= \frac{s(n-s)}{n(n-1)}$$

SNNO

Odhad $p(1-p)$: $\boxed{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n(n-1)}}$

(ii) $\boxed{\text{Metoda dvě: Podmiňování.}}$

Vyjdeme od lib. nestranného odhadu $T(\underset{\sim}{X})$. Pak

$$T'(\underset{\sim}{X}) = E\left(T(X) \,\middle|\, S\right) \text{ je SNNO}$$

Příklad. $X_1, \dots, X_n \sim R(0, \theta)$

$$g(\theta) = \frac{\theta}{2}$$

Pak $S = X_{(n)}$ je úplná postačující

$$EX_1 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta x \, dx = \frac{\theta}{2} \Rightarrow X_1 \text{ je nestranný}$$

$$\boxed{f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \dots \quad 0 < x < \theta \\ 0 & \dots \quad \text{jinak} \end{cases}}$$

$$E\left[X_1 \,\middle|\, S = s\right] = \cdot$$

~~Jestliže $S = X_{(n)} = s$ pak $(n-1)$ pozorování leží nalevo od s a má hustotu~~ $\dfrac{f(x,\theta)}{1 - F(x,\theta)}$

Jestliže $S = X_{(n)} = s$ pak buď $X_1 = s$ s pstí $\frac{1}{n}$ a $X_1 \sim R(0, s)$ s pstí $1 - \frac{1}{n}$.

$$E(X_1 | s) = \frac{1}{n} s + \frac{n-1}{n} \frac{s}{2} = \frac{s}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Tedy $\frac{S}{2} \frac{n+1}{n}$ je SNNO pro $\frac{\theta}{2}$

RAO-CRAMÉROVA DOLNÍ HRANICE

Uvažujme pstřední rozdělení pstí $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ s hustotami $p(x,\theta)$ vzhl. k μ.

Předpokládejme, že

(A.1) Θ je otevřený interval

(A.2) $B = \{x : p(x,\theta) > 0\}$ nezávisí na $\theta \in \Theta$.

(A.3) $\frac{\partial p(x,\theta)}{\partial \theta} = p'(x,\theta)$ existuje a je konečná pro $x \in B$, $\theta \in \Theta$. Položme

$$I(\theta) = E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta)\right]^2 = \int\left(\frac{p'(x,\theta)}{p(x,\theta)}\right)^2 p(x,\theta)\,d\mu$$

FISHEROVA MÍRA INFORMACE, kterou $\underset{\sim}{X}$ obsahuje o θ.

VĚTA 1. Nechť X a Y jsou nezávislé s hustotami p_θ a q_θ vzhledem k μ a ν, vyhovujícími (A.1)–(A.3). Nechť $I_1(\theta)$, $I_2(\theta)$ jsou Fisherovy informace X, Y a $I(\theta)$ je Fisherova míra (X,Y). Pak

$$I(\theta) = I_1(\theta) + I_2(\theta).$$

Důkaz. Hustota (X,Y) je $p_\theta(x)\cdot q_\theta(y) = h_\theta(x,y)$

$$\frac{\partial \log h_\theta(x,y)}{\partial\theta} = \frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial\theta} + \frac{\partial \log q_\theta(y)}{\partial\theta}$$

VĚTA (INFORMAČNÍ NEROVNOST)

Nechť platí (A.1)-(A.3), $I(\theta) > 0$ a $\int p(x,\theta)\,d\mu$ lze derivovat za integrálem. ~~Pak~~ Nechť $T(X)$ je libovolná statistika (taková, že $E_\theta T^2 < \infty$ a ~~Pak~~ $E_\theta T(X)$ ~~existuje a~~ lze derivovat za integrálem.

Pak

$$\mathrm{var}_\theta T(X) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta T\right)^2}{I(\theta)}$$

Důkaz: ~~Podle (*) $\mathrm{var}_\theta T =$~~

$$\mathrm{cov}_\theta\left(T(X), \frac{\partial \log p(X,\theta)}{\partial\theta}\right) \leq \left(\mathrm{var}_\theta T \cdot I(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Položme $g(\theta) = E_\theta T(X) = \int T(x)\, p(x,\theta)\,d\mu$

$$(g'(\theta))^2 = \left(\int T(x)\, p'(x,\theta)\, d\mu\right)^2 = \left(\int (T(x) - g(\theta))\, p'(x,\theta)\, d\mu\right)^2$$

$$\leq \mathrm{var}_\theta T \cdot I(\theta) \Rightarrow \mathrm{var}_\theta T \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)}$$

Jestliže T je odhad $g(\theta)$ a $E_\theta T = g(\theta) + b(\theta)$ pak

$$\mathrm{var}_\theta T \geq \frac{(b'(\theta) + g'(\theta))^2}{I(\theta)}$$

VEKTOROVÝ PARAMETR

$X \sim p(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, odhadujeme $q(\underset{\sim}{\theta})$

(B.1) Θ otevř. interval

(B.2) $A = \{x : p(x, \theta) > 0\}$ nez. na θ

(B.3) $\dfrac{\partial p(x,\theta)}{\partial \theta_i}$ ex. a je konečná $\forall \theta \in \Theta$, $x \in A$, $i = 1, \dots, k$.

Informační matice: $\underset{\sim}{I}(\theta) = (I_{ij}(\theta))_{ij=1,\dots,k}$

$$I_{ij}(\underset{\sim}{\theta}) = E\left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(x,\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p(x,\theta)\right]$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log p_\theta(x)\right]$$

Předpokládejme

(B.4) $I_{ij}(\theta)$ lze získat derivováním za integr.

a $E\left[\dfrac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(x,\theta)\right] = 0$

~~$\underset{\sim}{X} \sim p_\theta(x)$, chceme odhadnout $g_1(\theta), \dots, g_r(\theta)$, $\theta_1, \dots, \theta_k$~~

VĚTA (INFORMAČNÍ NEROVNOST)

Nechť platí (B.1)–(B.4) a nechť $\underset{\sim}{I}(\theta)$ je pozitivně definitní $\forall \theta$. Nechť $T(\underset{\sim}{X})$ je lib. statistika taková, že $E_\theta T^2(X) < \infty$, $E_\theta T(X)$ existuje a lze ji derivovat za integrálním znamením podle $\theta_1, \dots, \theta_k$. Označme

$$\alpha_i(\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} E_\theta (T(X)), \quad i = 1, \dots, k, \quad \underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$$

Pak

$$\boxed{\operatorname{var}_\theta T(X) \geq (\underset{\sim}{\alpha}(\theta))' I^{-1}(\theta)\, \underset{\sim}{\alpha}(\theta)}.$$

Důkaz: Položme

$$\psi_i(\underset{\sim}{X}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p_\theta(X), \quad i = 1, \dots, k.$$

Uvažujme korelační koeficient

$$\operatorname{cor}_\theta\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \psi_i(X, \theta), T(X)\right) = \operatorname{cor}_\theta\left(T(X), \sum a_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log\right)$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{k} a_i \operatorname{cor}} \frac{\operatorname{cov}_\theta\left(\sum_i a_i \psi_i(X, \theta), T(\underset{\sim}{X})\right)}{\left(\operatorname{var}_\theta \sum a_i \psi_i(X, \theta) \cdot \operatorname{var}_\theta T(X)\right)^{1/2}}$$

který chceme maximalizovat vzhledem k $a_1, \dots, a_k$. Protože je ekvivariantní vzhl. k měřítku, nejsou a_i určena jednoznačně, a tedy je normujeme podmínkou

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i(X_i, \theta)\right) = \underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{I}(\theta) \underset{\sim}{a} = 1$$

$$a' I(\theta) a = 1$$

a hledáme maximum of

$$\frac{\mathrm{cov}_\theta\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \psi_i(X), T(X)\right)}{\left(\mathrm{var}_\theta T(X)\right)^{\frac{1}{2}}} = \max \quad \text{za podmínky}$$

$$\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{I}(\theta) \underset{\sim}{a} = 1$$

a i pro ~~toto~~ max platí Schwarzova nerovnost

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{\mathrm{cov}_\theta\left(\psi_i(X,\theta), T(X)\right)}_{=\alpha_i} = \max$$

$$\Rightarrow \sum_i a_i \alpha_i - \frac{1}{2}\lambda\left(\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{I}(\theta) \underset{\sim}{a} - 1\right) = \max$$

$$\underset{\sim}{a}' \underset{\sim}{I}(\theta)\, a = 1$$

$$\alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^{k} I_{ij} a_j = 0 \qquad \alpha_i - \lambda \sum_{j=1}^{k} I_{ij} a_j = 0$$

$$\underset{\sim}{\alpha} - \lambda \underset{\sim}{I}(\theta) \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{a} = \frac{1}{\lambda} \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha} \quad = \frac{1}{\lambda} \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}$$

$$a'\alpha = \lambda a' I a = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha} = 1, \quad \lambda^2 = \quad = \underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}$$

$$a = \quad = \frac{\pm \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}}{\sqrt{\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}}}$$

$$\max \mathrm{cor} = \frac{\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}}{\sqrt{\alpha' I^{-1} \alpha}} \Big/ \left(\mathrm{var}_\theta T(X)\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}_\theta T(X) \geq \underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{I}^{-1} \underset{\sim}{\alpha}$$

Jestliže $E_\theta T(X) = \underset{\sim}{q}(\theta) + \underset{\sim}{b}(\theta)$, pak

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(b(\theta) + q(\theta)\right)$$

ODHAD PARAMETRU POLOHY

$X_1, \dots, X_n$ iid, $\sim F(x-\theta)$

Hustota $X_1, \dots, X_n \sim \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \theta)$ (1) Chceme odhadnout θ

Předpokládejme, že ztráta $L(\theta, t) = L(\theta + c, t + c)$ je invariantní. Pak $L(\theta, t) = L(0, t-\theta) \Rightarrow$ (2)

$\Longrightarrow$ ztráta závisí jen na odchylce $t - \theta$.

a problém odhadu θ nazveme invariantní vzhledem k posunutí. Jestliže $T(X)$ je odhadem θ, pak přirozeným odhadem $\theta + c$ bude $T(X) + c$

Omezíme se na ekvivariantní odhady

$$T(X_1 + c, \dots, X_n + c) = T(X_1, \dots, X_n) + c \quad \forall c$$

LEMMA 1. Vychýlení, riziko a rozptyl ekvivariantního odhadu nezávisí na θ (a tedy jsou konstantní).

Důkaz. $X_1 \sim f(x-\theta) \Rightarrow P(X_1 - \theta < z) = P(X_1 < z + \theta)$
$= F(z)$

$\Longrightarrow X_1 - \theta \sim f(x)$

$b(\theta) = E_\theta(T(X)) - \theta = E_\theta T(X-\theta) = E_0(T(X)) = b$

$var_\theta T(X) = E_\theta (T(X) - E_\theta T(X))^2 =$

$X-\theta = X_0 \qquad E_\theta (T(X-\theta) + \theta - E_\theta T(X))^2 =$

$= E_\theta (T(X-\theta) - b)^2 = E_0 (T(X) - b)^2$

$r(T,\theta) = E_\theta L(T(X) - \theta) = E_\theta L(T(X-\theta)) =$

$= E_0 L(T(X))$

Budeme hledat ekvivariantní odhad s minimálním rizikem. (MRE)

LEMMA 2. Nechť T_0 je ekvivariantní odhad. Pak $T(X)$ je ekvivariantní $\Longleftrightarrow$ (3) $T(\underset{\sim}{X}) = T_0(\underset{\sim}{X}) + U(X)$

kde $U(\underset{\sim}{X})$ je lib. fce splňující

$U(X_1+c, \dots, X_n+c) = U(X_1, \dots, X_n) \; \forall \underset{\sim}{x}, c \in \mathbb{R}^1$ (4)

Důkaz.: Nechť platí (3) a (4). Pak

$T(\underset{\sim}{X}+c) = T_0(\underset{\sim}{X}+c) + U(\underset{\sim}{X}+c) = T_0(X) + c + U(\underset{\sim}{X})$

$= T(\underset{\sim}{X}) + c$

Nechť T je ekvivariantní; T_0 je ekvivariantní.
Položme $U(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{x}) - T_0(\underset{\sim}{x}) \Rightarrow U(\underset{\sim}{x}+c) = U(\underset{\sim}{x})$

LEMMA. Fce $U(\underset{\sim}{x})$ je invariantní $\iff$ U je pouze fcí rozdílů $y_i = x_i - x_n$, $i=1,\dots,n-1$ pokud $n \geq 2$; U je konst. pokud $n=1$.

$$U(\underset{\sim}{x}+c) = U(\underset{\sim}{x}) \quad \Rightarrow \quad U(x_1,\dots,x_n) = U(x_1-x_n,\dots,x_{n-1}-x_n)$$

$$U(x_1,\dots,x_n) = U^*(y_1,\dots,y_{n-1})$$

$$\Rightarrow U(x_1+c,\dots,x_n+c) = U^*(y_1,\dots,y_{n-1}).$$

LEMMA. Jestliže T_0 je ekvivariantní, pak T je ekvivariantní $\iff$ $T(X) = T_0(X) - U^*(\underset{\sim}{Y})$.

VĚTA. Nechť $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n) \sim (1)$
$Y_i = X_i - X_n$, $i=1,\dots,n-1$

$L(\theta, t) = L(t-\theta)$

Nechť T_0 je ekvivariantní odhad s konečným rizikem.
Jestliže $\forall y$ existuje číslo $v(y) = v^*(y)$ které minimalizuje

$$E_0\{L(T_0(X) - v(y)) \mid Y = y\}$$

pak MRE existuje a je rovno

$$T^*(\underset{\sim}{X}) = T_0(\underset{\sim}{X}) - v^*(\underset{\sim}{Y})$$

Důkaz. $T(X) = T_0(X) - v(Y)$

$$R_\theta(T(\underset{\sim}{X}), \theta) = E_\theta L[T_0(X) - v(Y) - \theta]$$

$$= R_0(T) = E_0 L(T_0(X) - v(\underset{\sim}{Y})) = E_0 E_0\{L(T_0(X) - v(Y)) | Y=y\}$$

$$= \int E_0 \left(L(T_0(X) - v(y)) \,|\, y \right) dP_0(y) = \min$$

vzhledem k $v(y)$. $R_0(T)$ je minimální jestliže integrand je minimalizován $\forall y$ $\square$

~~**Důsledek**. Předpokládejme, že $L(t)$ je konvexní a nemonotonní, $t>0$. Pak existuje MRE a je určen jednoznačně pokud L je ryze ~~monotonní~~ konvexní.~~

~~Důkaz~~

$$\cancel{E_0 \left[L(T_0(X) - v(y)) \,|\, y \right] \stackrel{!}{=} \min}$$

$$\cancel{E_0 \left[L(T_0(X) - v(y)) \,|\, y \right] \geq}$$

$$\cancel{\geq L\, E[T_0(X) - v(y) \,|\, y] =}$$

$$\cancel{= L\{E(T_0(\underset{\sim}{X}) \,|\, y) - v(y)\}}$$

Důsledek. a) Položme $L(t-\theta) = (t-\theta)^2$. Pak

$$v^*(y) = E_0(T_0(X) \,|\, \underset{\sim}{Y} = y)$$

b) Jestliže $L(t-\theta) = |t-\theta|$, pak $v^*(y)$ je medián $T_0(\underset{\sim}{X})$ vzhledem k podmíněnému rozdělení $X|y$