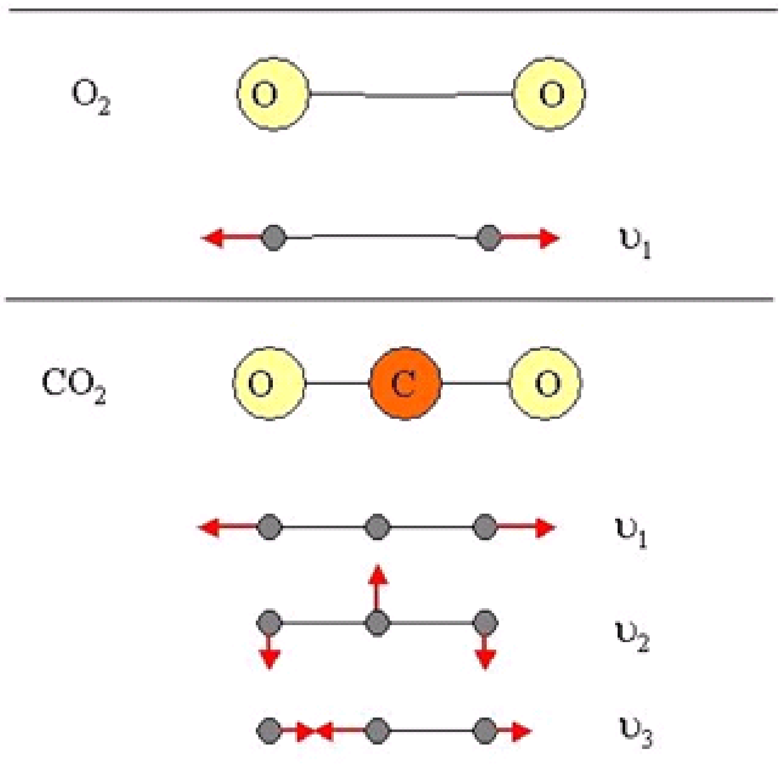
Kousek symetrie

Libor Šmejkal

Kvantová fyzika atomárních soustav

Kde navazujeme - Vibrace víceatomových molekul



$$(\upsilon_1 + 2\upsilon_2 + \upsilon_3) = 4$$

nejmenší molekula:

$n = 2$ atomy

má $3n - 5 = 1$ vibrační mód,

ve směru vazby

první netriviální molekula:

$n = 3$ atomy

má $3n - 5 = 4$ vibrační módy,

ve směru vazby i napříč

náš koncový dnešní cíl

Ukázka z M

$$x + y + z = 3$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$$

$$xyz = 1$$

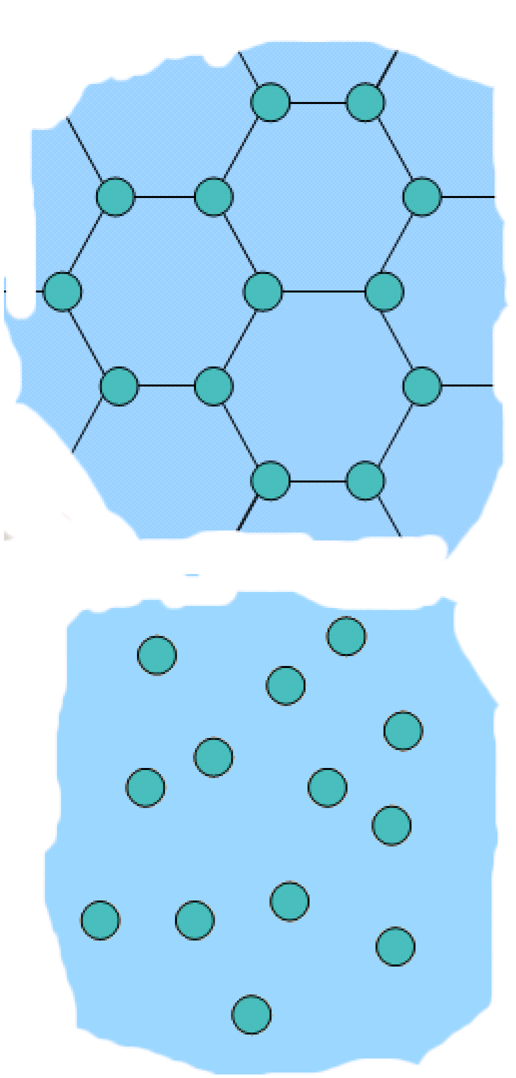
Symetrické polynomy - Vietovy vztahy!

Co je více symetrické?

Ukázka z F

Led

Voda



Přehled

- Zkoumání symetrie
- Teorie grup
  - Matematika
  - Fyzika
- Aplikace - příklady
- Shrnutí

Matematický pohled

+   *

Grupa

Grupou nazveme množinu G spolu s binární operací $\bullet$ splňující:

- Uzavřenost $a,b \in G \Rightarrow a \bullet b \in G$
- Neutrální prvek $\exists e \in G : a \bullet e = a$
- Inverzní prvek $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \bullet a^{-1} = e$
- Asociativita $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) \forall a,b,c \in G$

Příklad

- Cyklická grupa s generátorem i
- Multiplikativní tabulka

	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Jiný příklad - reprezentace

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

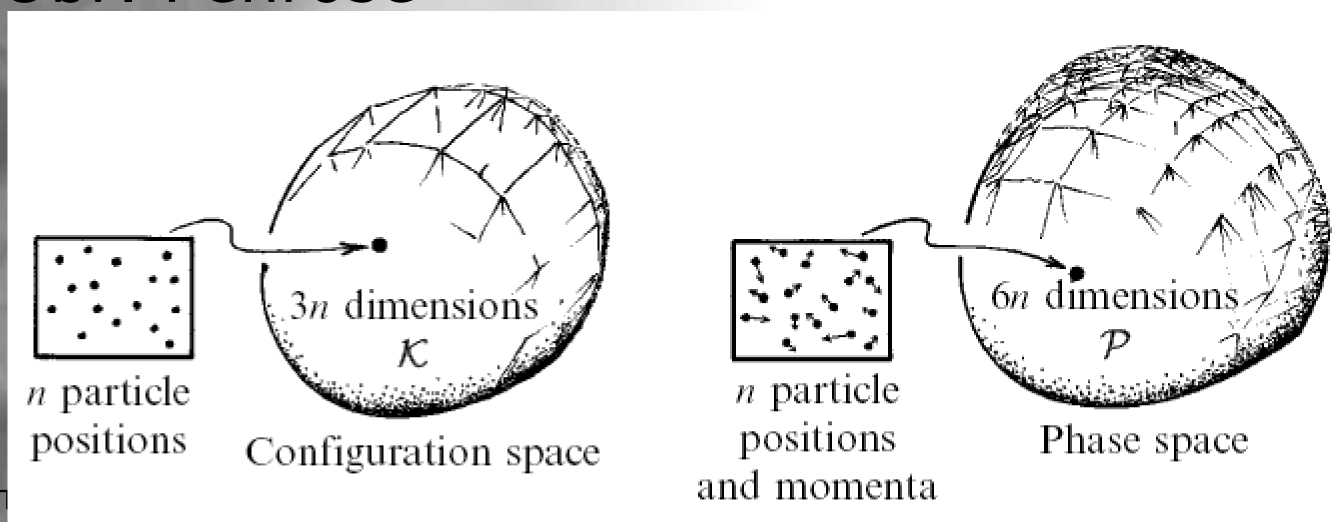
Reprezentace relevantní grupy může být nalezena obecnou matematickou metodou, výsledek je vlastní symetrii a nezávislý na detailech fyzikálního systému

Grupoid

- základní algebraická struktura s jednou operací. množina *A*, na které je definována jedna binární operace •.
  - Množina *A* je vzhledem k operaci • uzavřená, tj. výsledkem operace provedené na libovolných prvcích množiny *A* je prvek množiny *A*.
- **Příklady**
  - (**N**; +) - operace sčítání na množině přirozených čísel.
  - (**N**; ·) - operace násobení na množině přirozených čísel.
- **Protipříklady**
  - (**N**; -) - operace odčítání na množině přirozených čísel není uzavřená.
  - (**N**; :) - operace dělení na množině přirozených čísel není uzavřená.

Variety

- Abstraktní prostor lokálně podobný Euklidovskému. Např. Země
  - Minkovského ČP 4D
  - Obr. Penrose



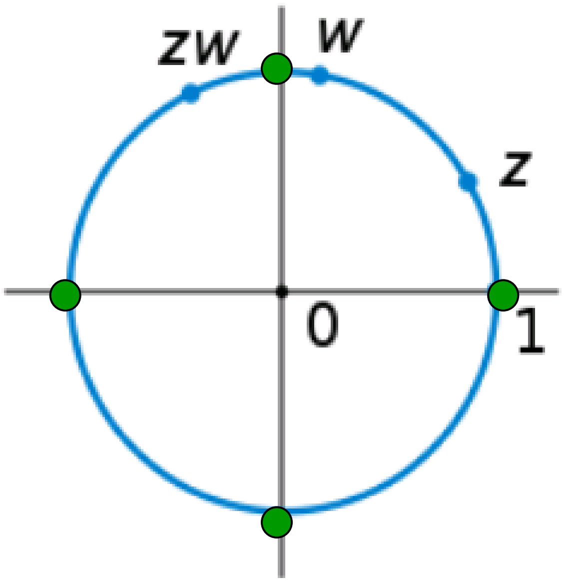
  - T
    - Např.: HE, 10D, grupová symetrie E8xE8

Lieovy grupy

- Reálná **Lieova grupa** je grupa, která je konečně dimensionální reálná hladká varieta, ve které je grupová operace násobení hladké zobrazení.

$$\mu : G \times G \to G \quad \mu(x, y) = xy$$

- Kružnice se středem v počátku gaussovy je Liovou grupou s komplexním násoben



Příklady

- 2 2 reálné invertibilní matice, násobení, GL2(**R**):

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \det A = ad - bc \neq 0 \right\}$$

- Rotační matice tvoří podgrupu GL2(**R**), značíme SO2(**R**). Sčítání úhlů odpovídá násobení prvků SO2(**R**),

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}$$

Fyzikální pohled

- Operace symetrie
- INVARIANCE
- Diskrétní/bodové - krystalografie …
  Spojité grupy

- Permutační
- Gaugeho invariance a zachování náboje
- Grupy v částicové fyzice

Zákony zachování

1918 – Emma Noetherová

Každé spojité lokální symetrii, vůči které jsou invariantní rovnice popisující fyzikální systém, přísluší veličina, která se zachovává

- **Homogenita prostoru** → p
- **Izotropie prostoru** → L
- **Homogenita času** → nejužitečnější skalární veličina E

Souřadnicová inverze	prostorová parita
Časová inverze	časová parita

Spojité

- Posunutí v prostrou a čase
- Rotace v 3D prostoru
- Lorentzova transformace

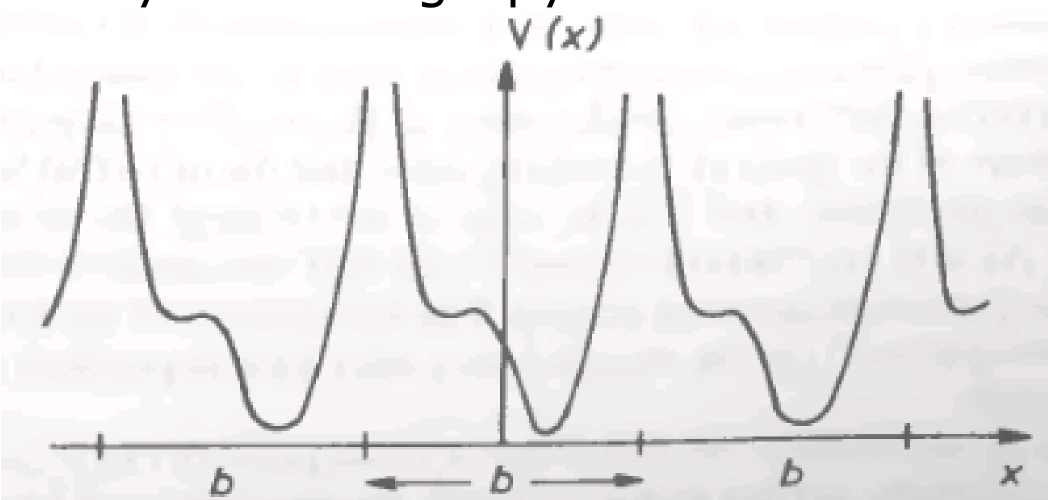
$$\begin{bmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} \to \Lambda \begin{bmatrix} t' \\ \boldsymbol{x}' \end{bmatrix}$$

Diskrétní

- Prostorová inverze (Parity transformation) x→-x
  - Reflexe v rovině
  - Většina interakcí obsahuje, ale slabá NE
- Časová inverze t→-t
- Translační transformace v mřížce
- Rotační

Př. Částice v 1D mřížce

- H je invariantní vůči operacím symetrie, H komutuje se všemi grupovými symetrickými operátory, vlastní stavy H jsou také bázovými reprezentatnty symetrické grupy



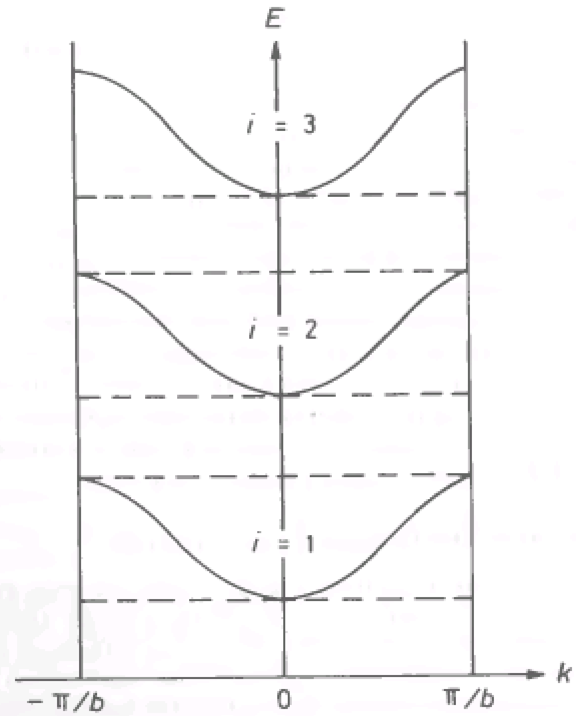


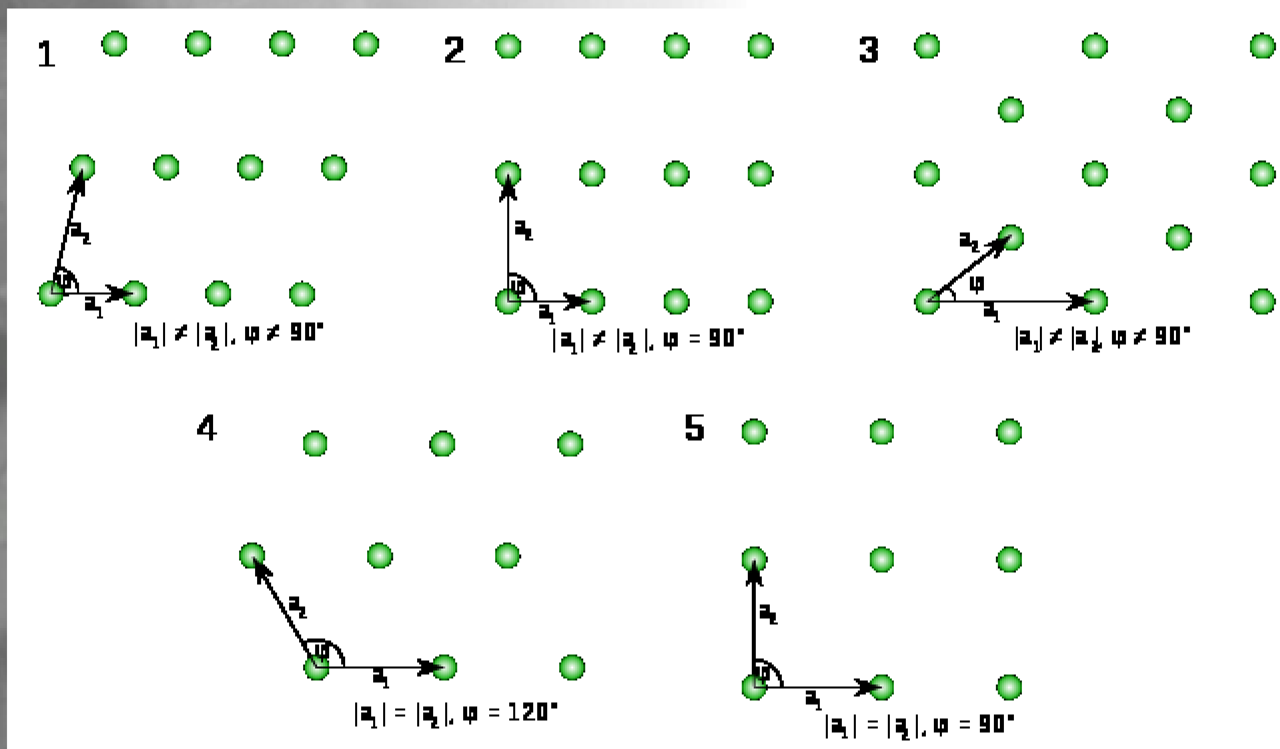
Fig. 1.2 Energy spectrum of a typical one-dimensional lattice system. The energy depends on the wave vector and on i, which labels the bands.

Fyzikální interpretace výsledku GT vede k cenným informacím o energiových spektrech

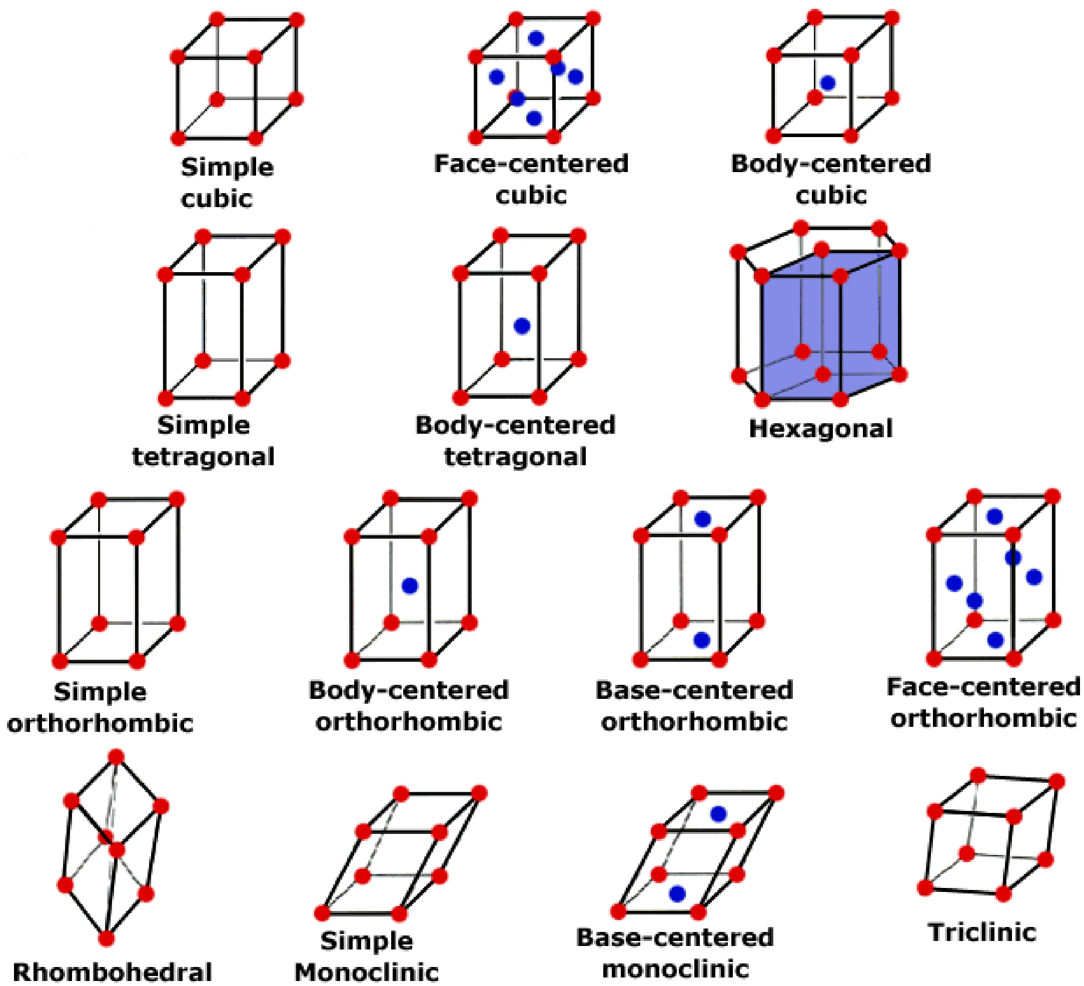
Příklad

- 5 – 14 - 52

Bravais mřížky



Bravais mřížky



Proč 14?!

System	Group	Number of lattices in system	Bravais lattices	Numberof arith-metical crystal classes in system
triclinic	S_2	1	P	2
monoclinic	C_{2h}	2	P, C	6
orthorhombic	D_{2h}	4	P, C, I, F	13
tetragonal	D_{4h}	2	P, I	16
cubic	O_h	3	P, I, F	15
trigonal	D_{3d}	1	P	5
hexagonal	D_{6h}	1	P	16

Shrnutí

- Přirozenost, geometrie
- Nástroj k hádání výsledku – sem tam může pomoci
- Trošičku hloubější přiblížení porozumění fundamentálním principům
- Užitečnost - zkoumání časoprostorových symetrií vedlo např. k vybudování OTR (placatá – kulatá)

Na závěr

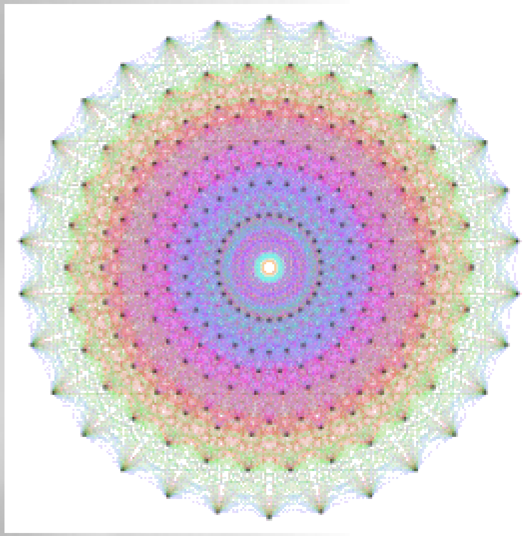
- Klasická hudba – Bach používal koncept symetrie permutace a invariance.
- PW Anderson 1972

Literatura, doporučená četba

- Landau. Lifshitz: Course of theoretical physics, Vol. 4: Quantum mechanics
- **Sternberg: Group theory and physics**
- Tung: Group theory in physics
- Rosický: Algebra
- Motl&Zahradník: Pěstujeme LA
- http://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group
- http://www.math.harvard.edu/people/SternbergShlomo.html

Děkuji za pozornost

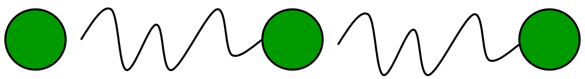
- Diskuze!



Apendix 1.

Class	Invariance	Conserved quantity
Proper orthochronous Lorentz symmetry	translation in time (homogeneity)	energy
	translation in space (homogeneity)	linear momentum
	rotation in space (isotropy)	angular momentum
Discrete symmetry	P, coordinate inversion	spatial parity
	C, charge conjugation	charge parity
	T, time reversal	time parity
	CPT	product of parities
Internal symmetry (independent of spacetime coordinates)	U(1) gauge transformation	electric charge
	U(1) gauge transformation	lepton generation number
	U(1) gauge transformation	hypercharge
	$U(1)_Y$ gauge transformation	weak hypercharge
	U(2) [U(1)xSU(2)]	electroweak force
	SU(2) gauge transformation	isospin
	$SU(2)_L$ gauge transformation	weak isospin
	PxSU(2)	G-parity
	SU(3) "winding number"	baryon number
	SU(3) gauge transformation	quark color
	SU(3) (approximate)	quark flavor
	S((U2)xU(3)) [U(1)xSU(2)xSU(3)]	Standard Model

Malé oscilace a teorie grup



$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = k(q_2 - q_1)$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = k(q_3 - q_2) - k(q_2 - q_1)$$

$$m\frac{d^2q_3}{dt^2} = -k(q_3 - q_2)$$

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + F\mathbf{q} = 0$$

$$F = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalue	Eigenvector	Mode
0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	uniform translation
$\frac{k}{m}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	symmetric vibration
$\frac{3k}{m}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	anti-symmetric vibration