F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2009 - 2010

XIII.
Chladné atomy a BEC

KOTLÁŘSKÁ 19. KVĚTNA 2010

Fyzika nízkých teplot (připomínka)

Naše hlavní téma

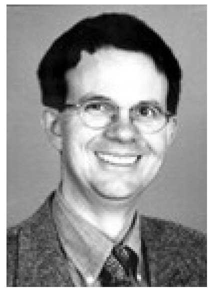
K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	1877 *Pictet* kapalný kyslík?		
77	**1895 *von Linde* kap. vzduch**		
22	**1898 *Dewar* kapalný vodík**		
	1905 *von Linde* kap. dusík		
4,2	**1908 *Kamerlingh-Onnes* kapalné helium**	**1911 *Kamerlingh-Onnes* supravodivost kovů**	
			1924 *Einstein* Bose-Einsteinova kondensace
0,3	**odsávané helium**	**odsávané helium**	
mK	**1933 paramagn. demagnet.**	**1937 *Kapica* supratekutost Helia-4**	**1939 *Landau* teorie supratekutosti**
	1951 *H. London* rozpouštěcí refrigerátor		**1947 *Bogoljubov* teorie supratekutosti**
μK	**1956 *Kurti* NDR (jaderná …)**	**1972 *Osheroff* supratekutost Helia-3**	**1956 *BCS* * teorie supravodivosti**
	1985 *Hänsch, Schawlow* laserové chlazení (princip)	**1986 *Müller a Bednorz* vysokoteplot. supravodivost**	**1975 *Leggett* teorie supratekutosti Helia-3**
nK			
pK		**1995 *Wieman, … Ketterle* BEC v atomových parách**	

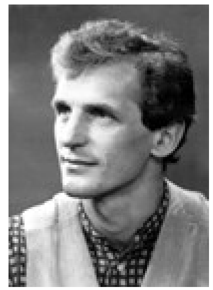
**Bardeen, Cooper a Schrieffer*

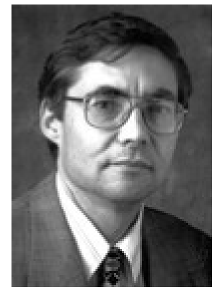
Nobelisté II.

The Nobel Prize in Physics 2001

"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"







Eric A. Cornell	**Wolfgang Ketterle**	**Carl E. Wieman**
1/3 of the prize	1/3 of the prize	1/3 of the prize
USA	Federal Republic of Germany	USA
University of Colorado, JILA Boulder, CO, USA	Massachusetts Institute of Technology (MIT) Cambridge, MA, USA	University of Colorado, JILA Boulder, CO, USA
b. 1961	b. 1957	b. 1951

Bosony a Fermiony

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou **nerozlišitelné**

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

nedají se očíslovat

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

nedají se očíslovat

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2)$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \to \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \to \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin

přichází

odnikud

"empirický

fakt"

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází

odnikud

"empirický

fakt"

Bosony a Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \to \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\boxed{\lambda^2 = 1}$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
fermiony	**bosony**
antisymmetrická Ψ	symmetrická Ψ
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

celkem dobře znáte *teď pro nás důležité*

přichází odnikud "empirický fakt"

Mnohačásticové stavy pro Bosony a Fermiony

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech

Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

Stav několika částic úplně popíšeme tak, že určíme

kolik částic se nachází v různých jednočásticových stavech

Podrobnější popis neexistuje, protože částice nejsou rozlišitelné

FORMÁLNÍ PROVEDENÍ ➔ ➔ ➔ ➔

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \qquad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

FOCKŮV PROSTOR prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy … symetrizované součiny jedno-částicových stavů pro bosony

… antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů pro fermiony

určeny posloupností obsazovacích čísel **0, 1, 2, 3, …** pro bosony

0, 1 **…** pro fermiony

Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (… **ne**interagující)

base jedno-částicových stavů (α úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \qquad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

FOCKŮV PROSTOR prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy … symetrizované součiny jedno-částicových stavů pro bosony

… antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů pro fermiony

určeny posloupností obsazovacích čísel **0, 1, 2, 3, …** pro bosony

0, 1 … pro fermiony

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \quad _p, \cdots$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |\, n_1, n_2, n_3, \cdots, \quad _p, \cdots$$

ısticový stav $n = \Sigma n_p$

Representace obsazovacích čísel pro fermiony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

…. pro **fermiony**

Pauliho princip

fermiony jsou distanční typ jako rackové

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\ \ {}_p\cdots$$

$\Psi_{\{n_\alpha\}} = | n_1, n_2, n_3, \cdots\ \ {}_p \cdots$ isticový stav $n = \Sigma n_p,\ n_p = 0,1$

$|0\rangle = |0\ ,0\ ,0\ ,\cdots\ \ \cdots$ isticový stav **vakuum**

$|1_p\rangle = |0\ ,0\ ,0\ ,\cdots\ \ \cdots$ ástic. $\varphi_{\alpha_p}(x)$

$|\cdots\ \ ,1\ ,1\ ,\cdots\ \ \cdots$ ástic. $\left(\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x')-\varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x)\right)/\sqrt{2}$

$|\cdots\ \ \cdots\ \ \cdots$. $\cancel{\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')}$ není dovoleno

$|F\rangle = |\underbrace{1\ ,1\ ,\cdots}_{N}\ \ \cdots$ sticový základní stav

…

Representace obsazovacích čísel pro bosony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

…. pro **bosony**

princip identity

bosony jsou kontaktní typ jako opice

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \quad {}_p, \cdots$

$\Psi_{\{n_\alpha\}} = \big| n_1, n_2, n_3, \cdots \quad {}_p, \cdots$ ısticový stav $n = \Sigma n_p, n_p = 0,1,2,3,\cdots$

$\big| 0 \big\rangle = \big| 0 \;, 0 \;, 0 \;, \cdots \quad \cdots$ ısticový stav **vakuum**

$\big| 1_p \big\rangle = \big| 0 \;, 0 \;, 0 \;, \cdots \quad \cdots$ ıstic. $\varphi_{\alpha_p}(x)$

$\big| \cdots \quad \cdots$ ástic. $\left(\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') + \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x)\right)/\sqrt{2}$

$\big| \cdots \quad \cdots \quad \cdots$:. $\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')$ je dovoleno

$\big| B \big\rangle = \big| N \;, 0 \;, 0 \;, \cdots \quad \cdots$ částicový základní stav

všechny na jednom orbitalu $\varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_1}(x_2)\cdots \quad \alpha_1 \quad {}_N)$

Které částice jsou Bosony

Příklady bosonů

bosony

částice -- kvanta
N se nezachovává

elementární částice

fotony

kvazičástice

fonony
magnony

komplexní částice
N se zachovává

atomy

$^{4}\mathrm{He},\ \underbrace{^{7}\mathrm{Li},\ ^{23}\mathrm{Na},\ ^{87}\mathrm{Rb}}_{\text{alkalické kovy}}$

excitované atomy

Příklady bosonů (rozšíření tabulky)

bosony

částice -- kvanta
N se nezachovává

elementární částice

fotony

kvazičástice

fonony
magnony

složené kvazičástice

excitony
Cooperovy páry

komplexní částice
N se zachovává

atomy

^{4}He, $\underbrace{^{7}Li, \; ^{23}Na, \; ^{87}Rb}_{\text{alkalické kovy}}$

excitované atomy

ionty

molekuly

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

  definována vztahem

$$\tfrac{1}{2} m \left\langle \upsilon^2 \right\rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováze)

- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (3. zákon termodyn.)

$$S \to 0, \quad C_v \to 0, \quad \cdots \quad \to 0$$

- Zvláštní jevy, makroskopické kvantové jevy, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“ ? Vysokoteplotní supravodivost, život, …

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

$k_B T$ □ vazeb	$_B$ □ Excit
nový řád	vymrzání

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

$k_B T$ □ vazeb	B □ Excit
nový řád	vymrzání

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$$^{23}_{11}\mathrm{Na}$$

$$[\mathrm{Ne}]3s^1$$

$$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$$

$$I = \frac{3}{2}$$

$$^{87}_{37}\mathrm{Rb}$$

$$[\mathrm{Kr}]5s^1$$

$$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$$

$$I = \frac{3}{2}$$

pro tyto atomy pozorována BEC

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$^{23}_{11}\mathrm{Na}$	$^{87}_{37}\mathrm{Rb}$
$[\mathrm{Ne}]3s^1$	$[\mathrm{Kr}]5s^1$
$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$	$\boldsymbol{^2S_{\frac{1}{2}}}$
$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{3}{2}$

A

Z

elektronová konfigurace

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$

$$^{2S+1}L_J$$

$$\vec{J} = \vec{L} + S$$

$$J = |S - L|, \cdots \qquad = \frac{1}{2}$$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$	${}^{87}_{37}\mathrm{Rb}$
$[\mathrm{Ne}]3s^1$	$[\mathrm{Kr}]5s^1$
${}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{S}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$	${}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{S}_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$
$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{3}{2}$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\text{37 protonů}\\ \text{50 neutronů}\end{array}\right\}$ *celk. jaderný spin* $I = \frac{3}{2}$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$	${}^{87}_{37}\mathrm{Rb}$
$[\mathrm{Ne}]3s^1$	$[\mathrm{Kr}]5s^1$
$\boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}}$	$\boldsymbol{{}^2S_{\frac{1}{2}}}$
$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{3}{2}$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l}\text{37 protonů}\\ \text{50 neutronů}\end{array}\right\}$ *celk. jaderný spin* $I = \frac{3}{2}$

celkový spin atomu

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$F = |S - I|, \cdots \qquad = 1, 2$$

Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson

ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

$^{23}_{11}\mathrm{Na}$	$^{87}_{37}\mathrm{Rb}$
$[\mathrm{Ne}]3s^1$	$[\mathrm{Kr}]5s^1$
$^2S_{\frac{1}{2}}$	$^2S_{\frac{1}{2}}$
$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{3}{2}$

Rubidium

37 elektronů — *celk. elektronový spin* $S = \frac{1}{2}$

37 protonů, 50 neutronů — *celk. jaderný spin* $I = \frac{3}{2}$

celkový spin atomu

$$\vec{F} = S + \vec{I}$$

$$F = \left|S - I\right|, \cdots \quad = 1, 2$$

Koexistují dvě rozlišitelné odrůdy; mohou být odděleny sdruženým působením hyperjemných interakcí a Zeemanova štěpení v magnetickém poli

Ideální kvantové plyny

Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

$$\boxed{T = 0}$$

Fermiony

elektrony

Bosony N=const.

atomy

Bosony

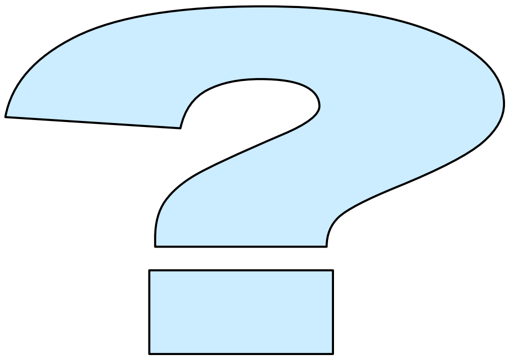
fotony

$$|F\rangle = |1, 1, \dots \quad \dots$$

Ideální klasický plyn

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn



$$\boxed{T = 0}$$

Fermiony — elektrony

Bosony N=const. — atomy

Bosony — fotony

$\left|F\right\rangle = \left|1, 1, \dots \right.$ $\dots$ $\dots$ $\dots$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje
střední počet částic

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\boldsymbol{\mu})} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\boldsymbol{\mu})} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

$T \to 0$

$T \to 0$

$$|F\rangle = |1, 1, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Ideální kvantové plyny

$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$T \to 0$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$T \to 0$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$\left|F\right\rangle = \left|1, 1, \dots, \dots\right.$$

Ideální kvantové plyny

$\left\langle n \right\rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\left\langle n \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

bosony

N

BE

$$\left\langle n \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$T \to 0$

$$\left\langle n \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$\left| F \right\rangle = \left| 1, 1, \dots, \dots, \dots, \dots \right.$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

N

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

$T \to 0$

?

$T \to 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, \dots$$

Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$ Boltzmannovo rozdělení

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

N

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$T \to 0$

Áufbau princip

bosony

N

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$T \to 0$

BEC

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \to 0$

vymrzání

$$\left| F \right\rangle = \left| 1, 1, \ldots, \ldots \right.$$

Bose-Einsteinova kondensace
BEC

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, N atomů v objemu V

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \text{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů N počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek $N - \mathcal{N}$ se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

Podstata BEC

Mějme homogenní plyn, N atomů v objemu V

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}\,(E < k_B T) = \mathrm{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů N počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek $N - \mathcal{N}$ se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

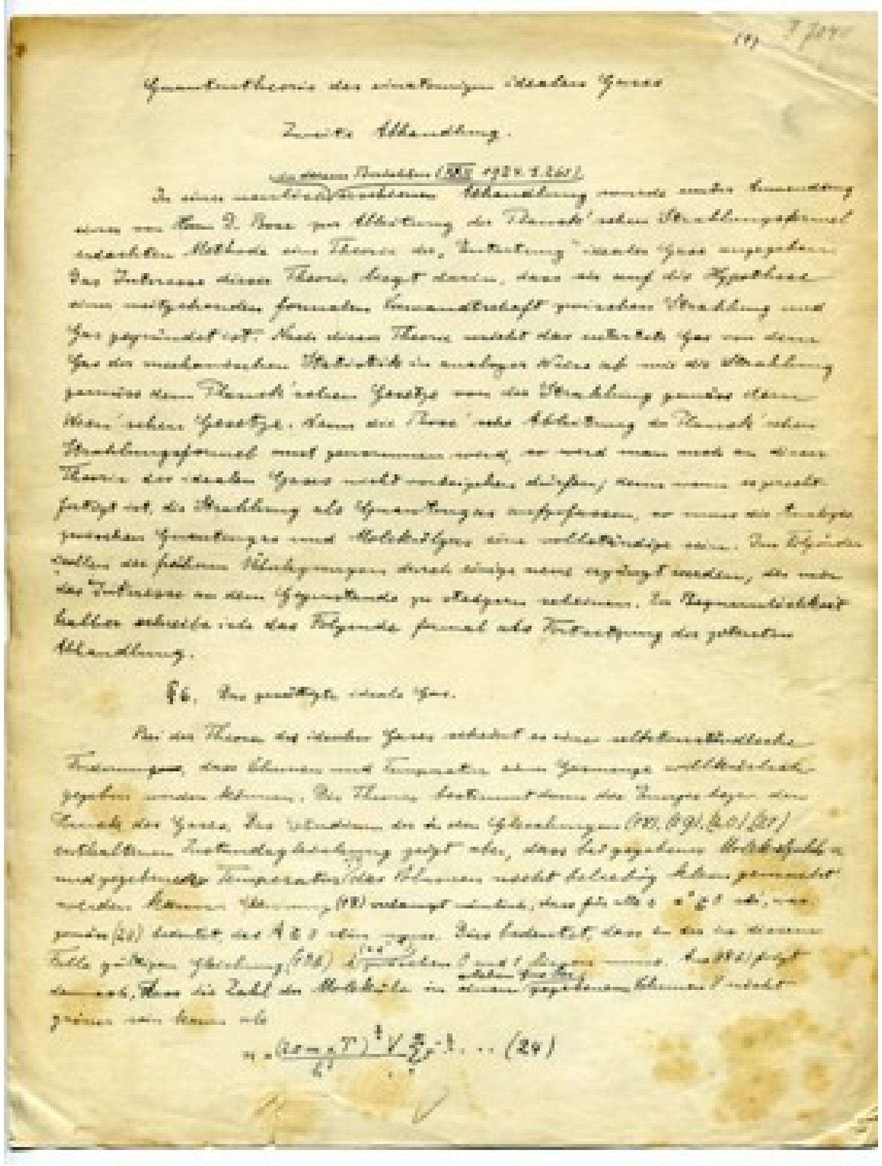
Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

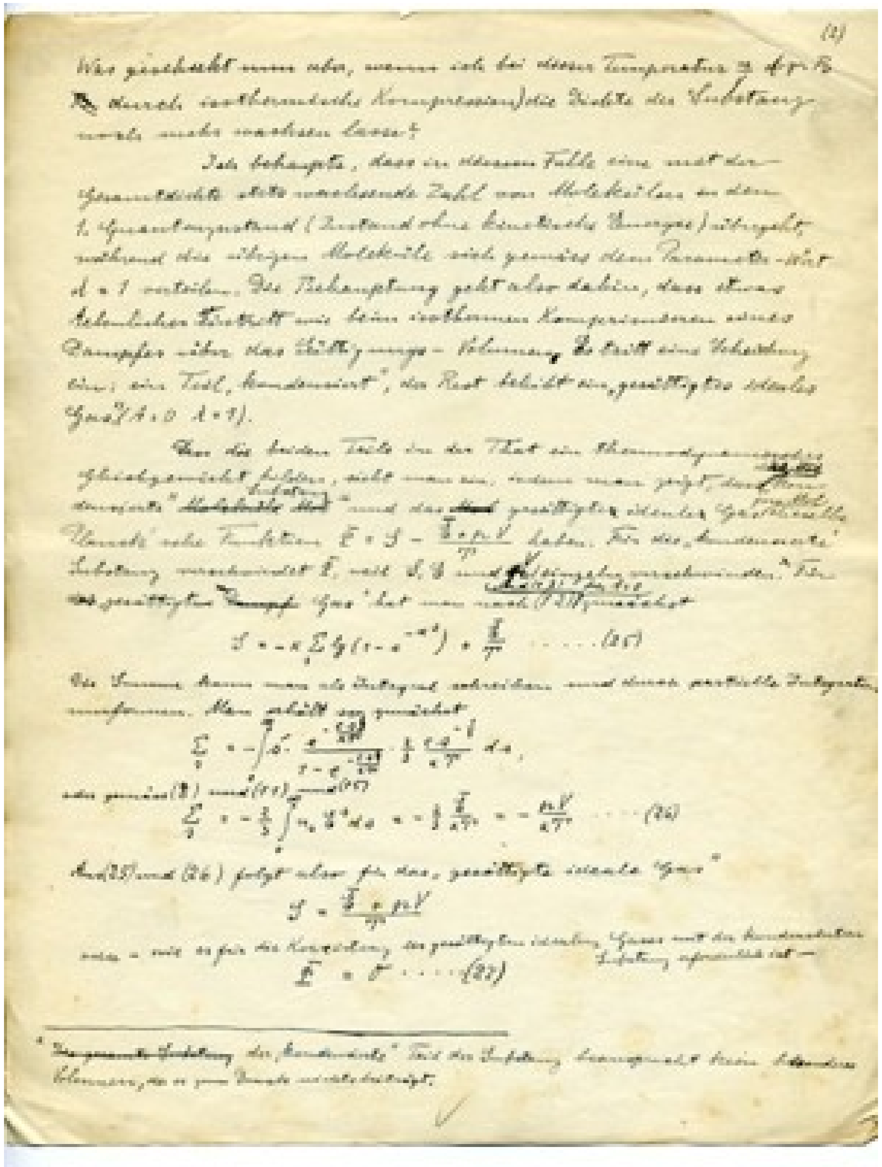
Tuto úvahu a přesný výpočet integrálů provedl Einstein
… *následující folie.*

Maximální počet atomů v plynné fázi při dané teplotě

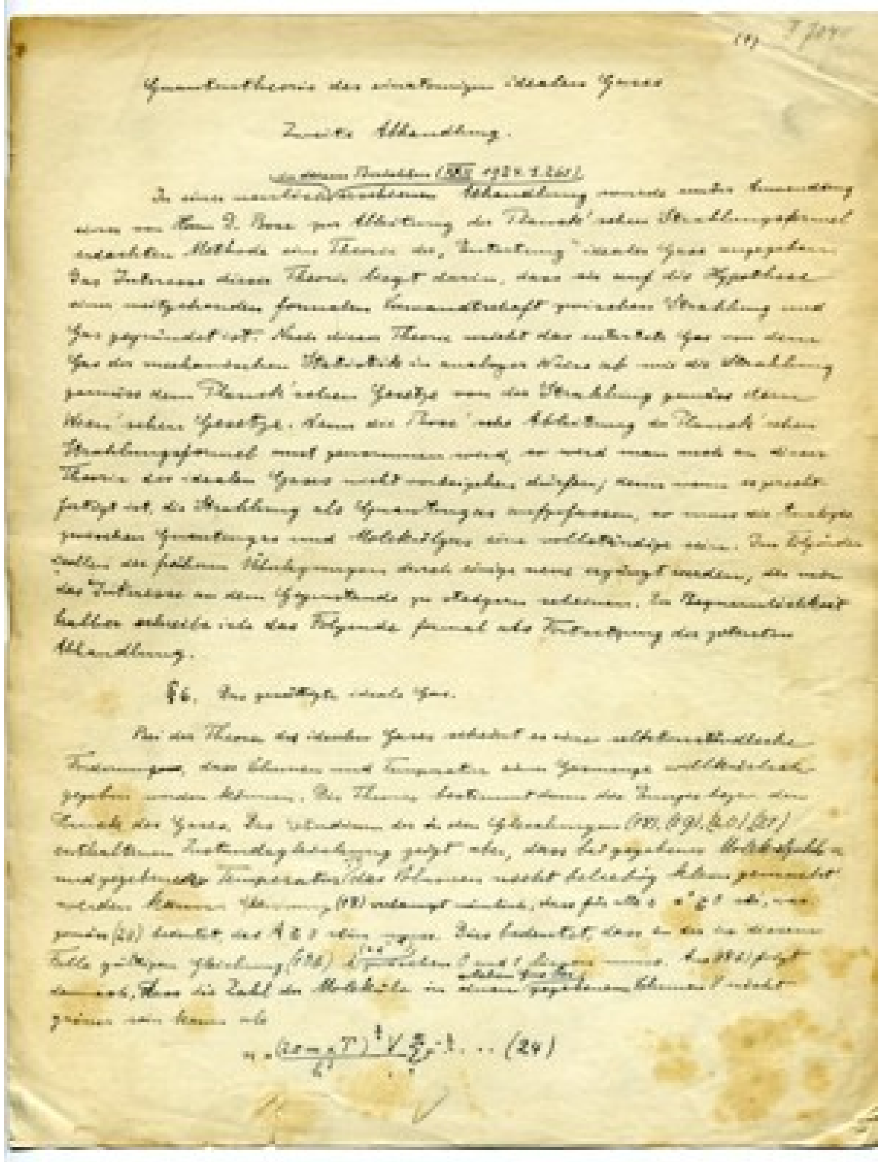
$$\tilde{\mathcal{N}}_{G}(T) = V \times 4\pi \left(\frac{2mk_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) \equiv B\,T^{\frac{3}{2}}$$

Einsteinův rukopis s odvozením BEC





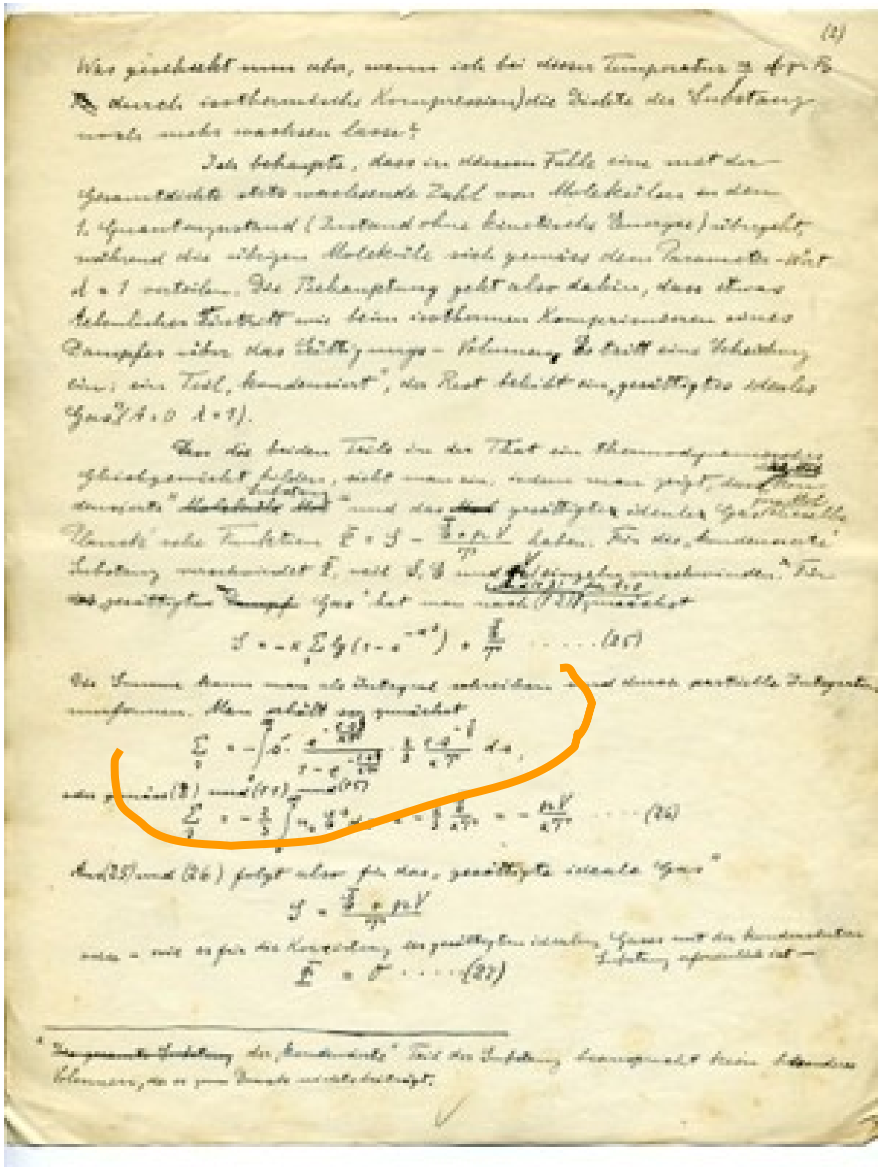
Einsteinův rukopis s odvozením BEC



Quantentheorie des einatomigen idealen Gases

Zweite Abhandlung.

§6. Das gesättigte ideale Gas.



KRITICKÁ TEPLOTA

nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$N = \tilde{\mathcal{N}}_{\mathrm{G}}(\mu_c) = V \times 4\pi \left(\frac{2 m k_B T_c}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A} = 8{,}0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A}$$

KRITICKÁ TEPLOTA

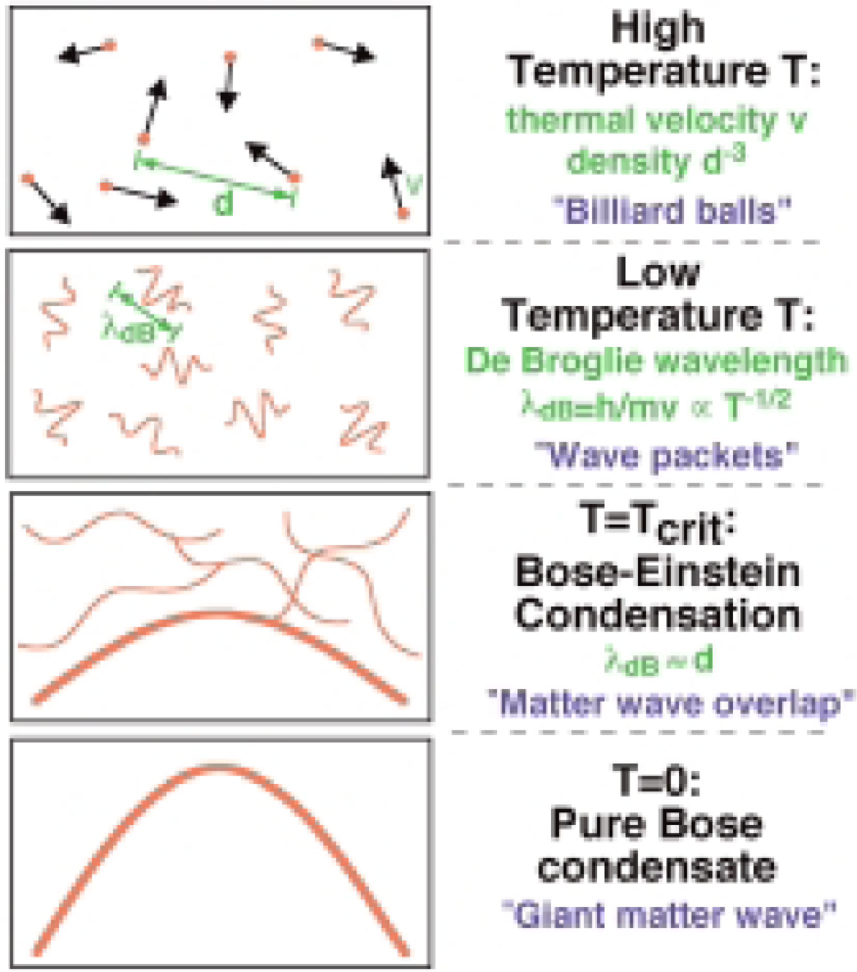
nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M} = 8{,}0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M}$$

Několik odhadů:

system	M	n	T_C
He-4 kapalné	4	2×10^{28}	1.47 K
Na past	23	2×10^{20}	1.19 μK
Rb past	87	2×10^{17}	3.16 nK

Ketterle vysvětluje BEC švédskému králi



Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\mathrm{kin}}}} \qquad m = A\,\mathrm{u}$$

V tepelné rovnováze ... rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m\,k_B T}} = 2{,}5\times 10^{-9}\cdot\frac{1}{\sqrt{AT}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{3}{2} T/11600 \quad \mathrm{eV} \quad \mathrm{K} \qquad \overline{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158\sqrt{\frac{T}{A}}$$

Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

❶

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\mathrm{kin}}}} \qquad m = A\,\mathrm{u}$$

V tepelné rovnováze ... rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m\,k_B T}} = 2{,}5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{A\,T}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{3}{2} T / 11600 \quad \mathrm{eV} \quad \mathrm{K} \qquad \overline{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158\sqrt{\frac{T}{A}}$$

Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

❶ $$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

❷ $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\mathrm{kin}}}}$$ $$m = A\mathrm{u}$$

V tepelné rovnováze … rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m\,k_B T}} = 2,5\times 10^{-9}\cdot\frac{1}{\sqrt{AT}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{3}{2} T / 11600 \quad \mathrm{eV} \quad \mathrm{K} \qquad \overline{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158\sqrt{\frac{T}{A}}$$

Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

❶ $$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

❷ $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}}$$

$$m = A\,\mathrm{u}$$

V tepelné rovnováze

… rel. at. (mol.) hmotnost

❸ $$\left\langle E_{\text{kin}} \right\rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m\,k_B T}} = 2{,}5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{3}{2} T / 11600 \quad \text{eV} \quad \text{K}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\left\langle v^2 \right\rangle} = 158 \sqrt{\frac{T}{A}}$$

Vzpomínka: de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly

❶ $$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}}$$

Tepelné energie jsou malé …. platí NR vzorce

❷ $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}}$$

$m = A\text{u}$ ... rel. at. (mol.) hmotnost

V tepelné rovnováze

❸ $$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová délka

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3m\,k_B T}} = 2{,}5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}}}$$

Dva užitečné vzorce

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{3}{2} T / 11600 \quad \text{eV} \quad \text{K} \qquad \bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158\sqrt{\frac{T}{A}}$$

Fyzikální interpretace T_C podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \; \square \; \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední
meziatomová
vzdálenost

tepelná
de Broglieova
vlnová délka

Fyzikální interpretace T_C podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední meziatomová vzdálenost

tepelná de Broglieova vlnová délka

I S KONSTANTAMI

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi \times 2.612^{\frac{2}{3}}}}\, \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T_c}}$$

Fyzikální interpretace T_C podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední meziatomová vzdálenost

tepelná de Broglieova vlnová délka

I S KONSTANTAMI

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T_c}}$$

Fyzikální interpretace T_C podrobně

Formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left(\frac{N}{2{,}612\, V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Upravíme na

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{h}{\sqrt{m k_B T_c}}$$

střední meziatomová vzdálenost

tepelná de Broglieova vlnová délka

Kvantový přechod nastane když

vlnová oblaka atomů se začnou překrývat

Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad T < T_C$$

Hustota kondensátu

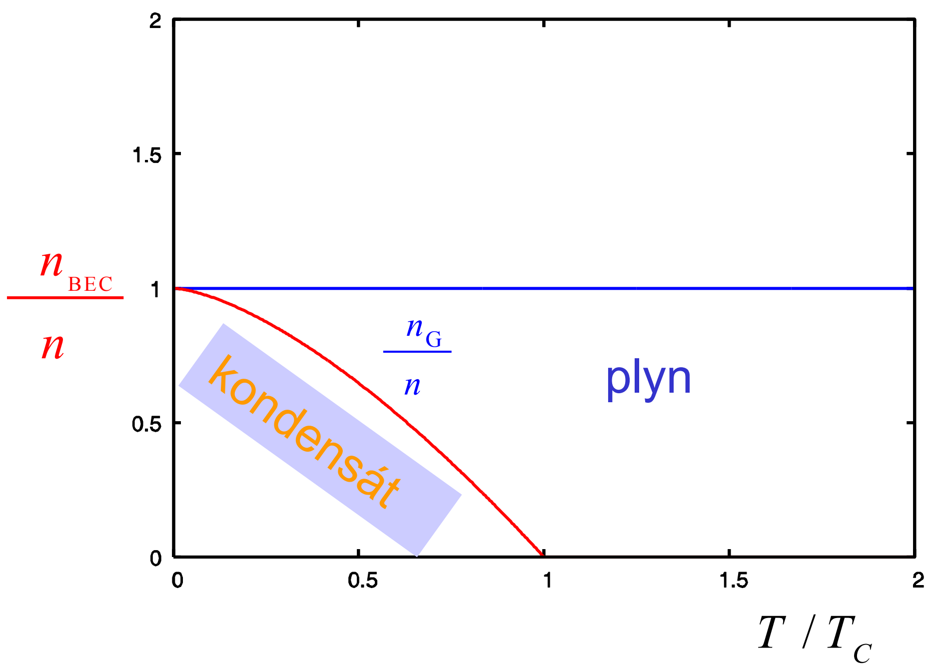
$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} + n\cdot\left[1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B\,T^{\frac{3}{2}} = B\,T_C^{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} = n\cdot\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{pro} \quad T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n\cdot\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} + \boxed{n\cdot\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$



Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

Podrobnější rozbor BEC

• Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný

• Čistě kvantový efekt

• Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

• BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.

• BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve

Podrobnější rozbor BEC

- Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam

Podrobnější rozbor BEC

• Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný

• Čistě kvantový efekt

• Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

• BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.

• BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam

• I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna

Podrobnější rozbor BEC

• Termodynamicky … fázový přechod, i když podivný

• Čistě kvantový efekt

• Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

• BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.

• BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve. Experimentální objev BEC má proto zásadní význam

• I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna

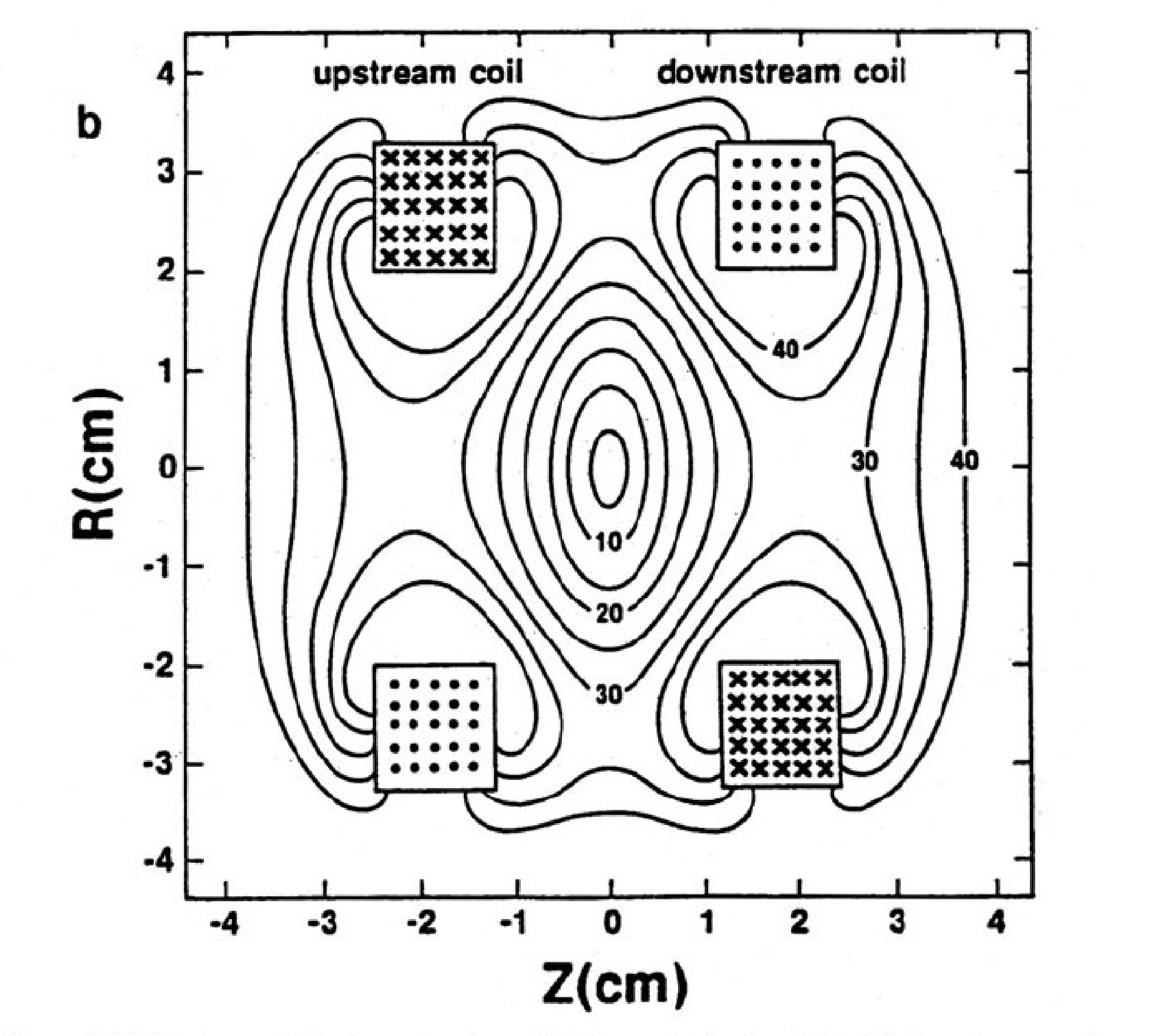
• BEC je **makroskopický kvantový jev** ve dvou ohledech:

♠ korelace makroskopické frakce všech atomů

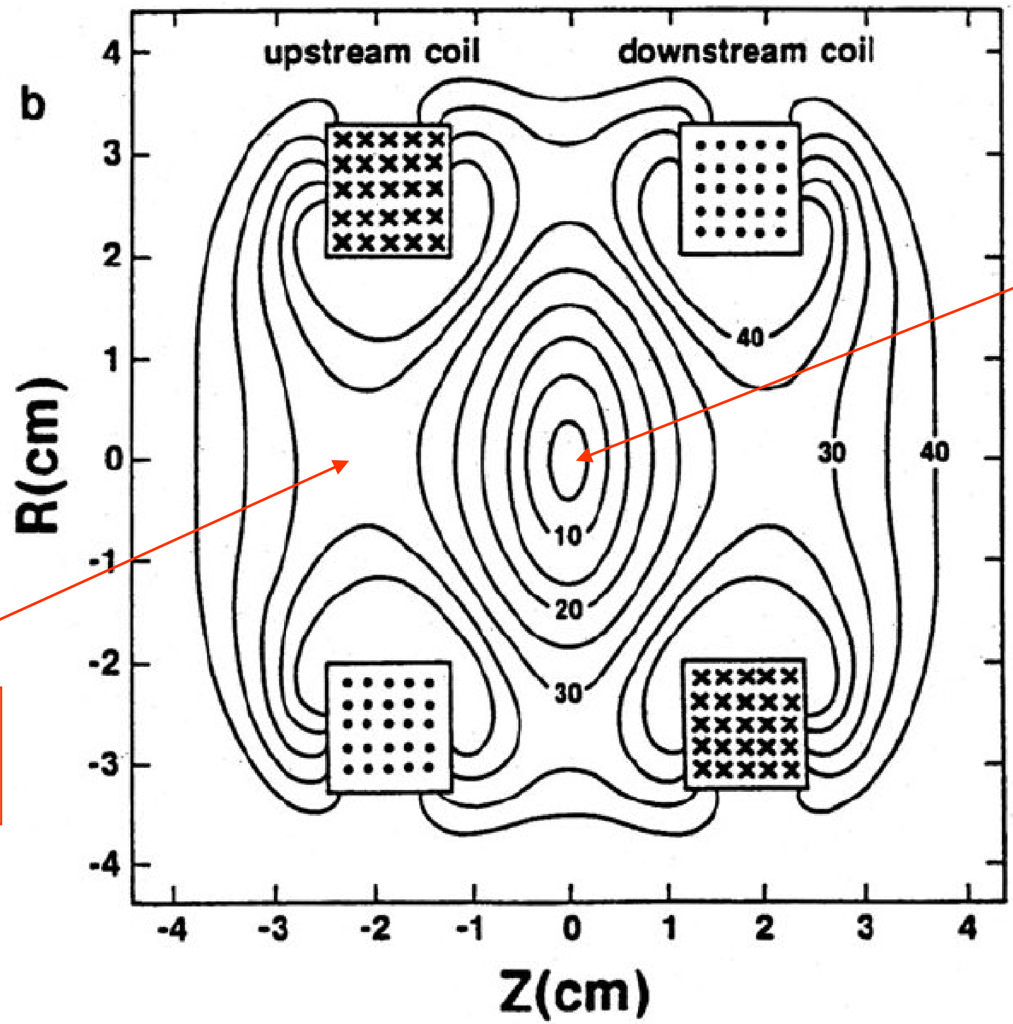
♠ odpovídající koherence prochází celým makroskopicky rozlehlým vzorkem

BEC v atomových pastech

Kvadrupólová magnetická past



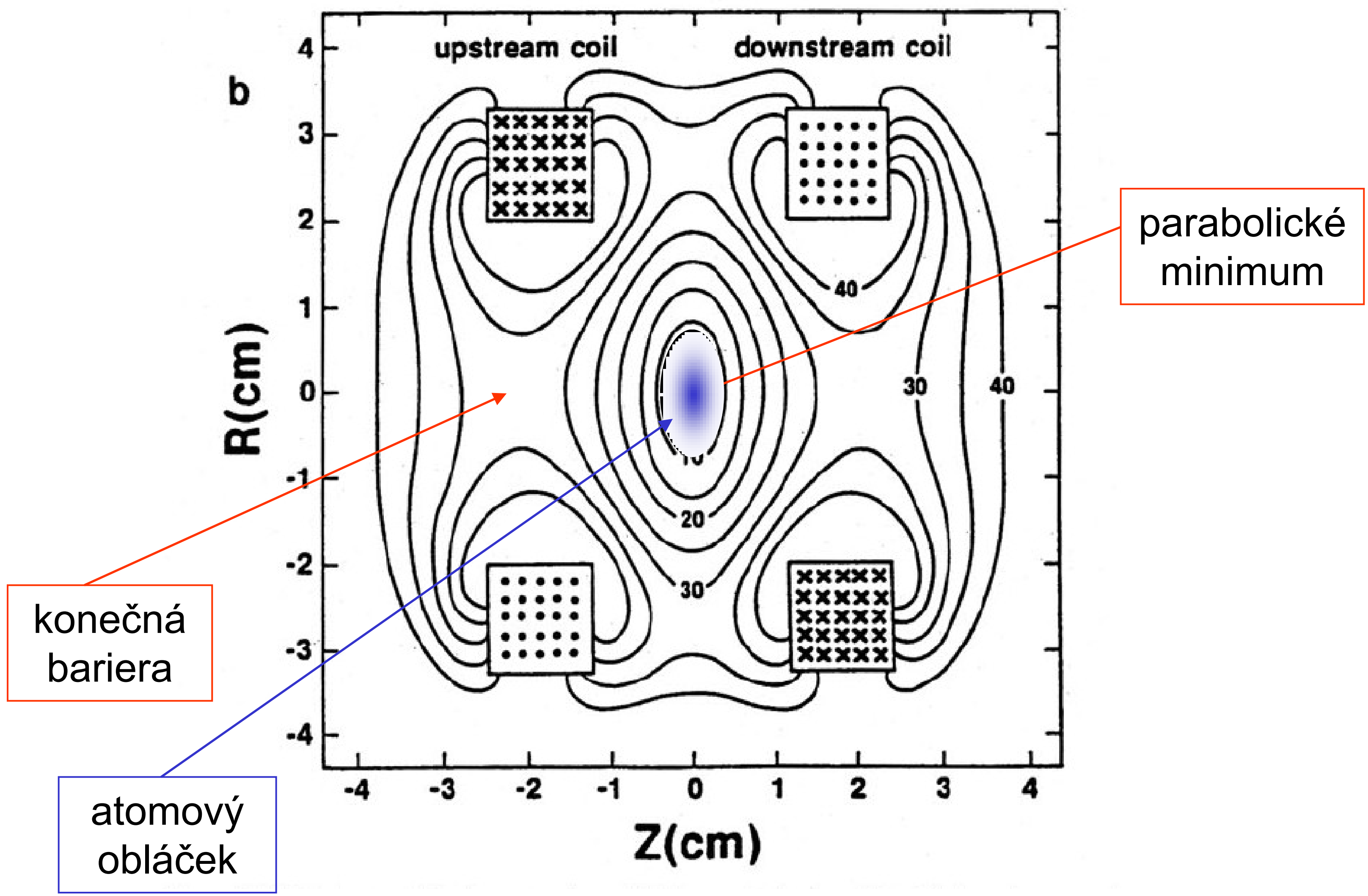
Kvadrupólová magnetická past



parabolické minimum

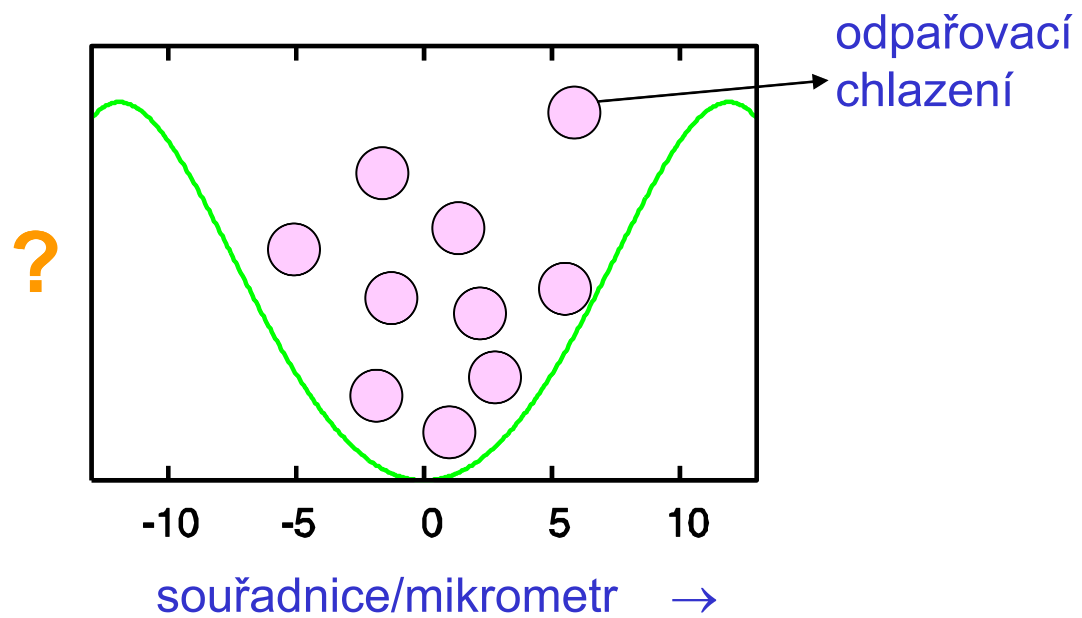
konečná bariera

Kvadrupólová magnetická past



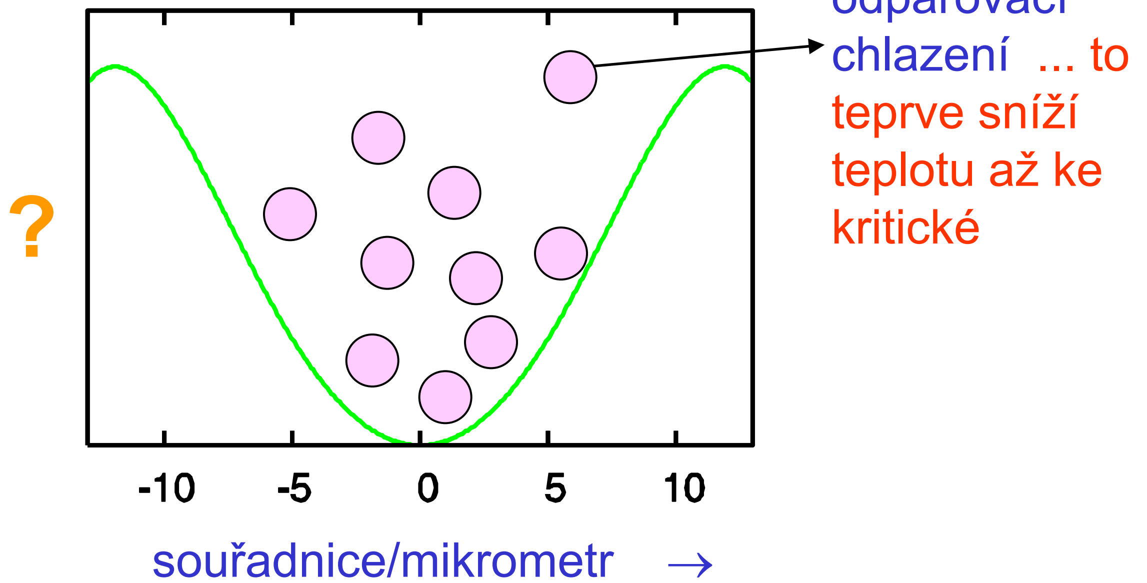
Potenciál pasti

Typický profil



Potenciál pasti

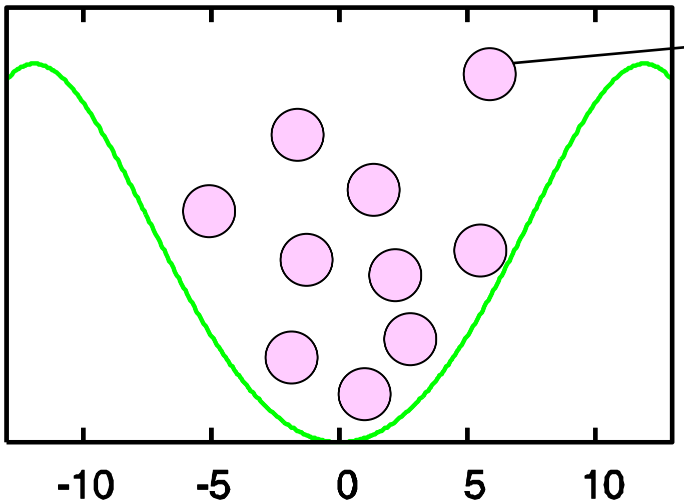
Typický profil



Potenciál pasti

Typický profil

?



souřadnice/mikrometr →

odpařovací chlazení ... to teprve sníží teplotu až ke kritické

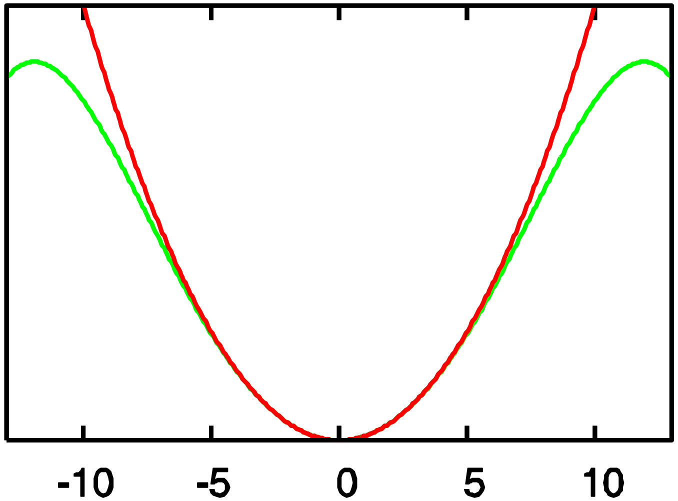
Jeden směr

past zpravidla 3D, tvaru protáhlého elipsoidu

Pasti jsou z reálného světa, obláčky víceméně viditelné okem

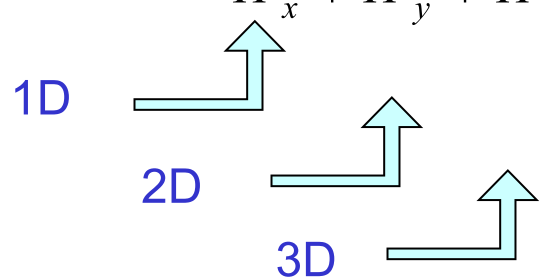
Parabolická approximace

zpravidla anisotropní harmonický oscilátor *s axiální symetrií*

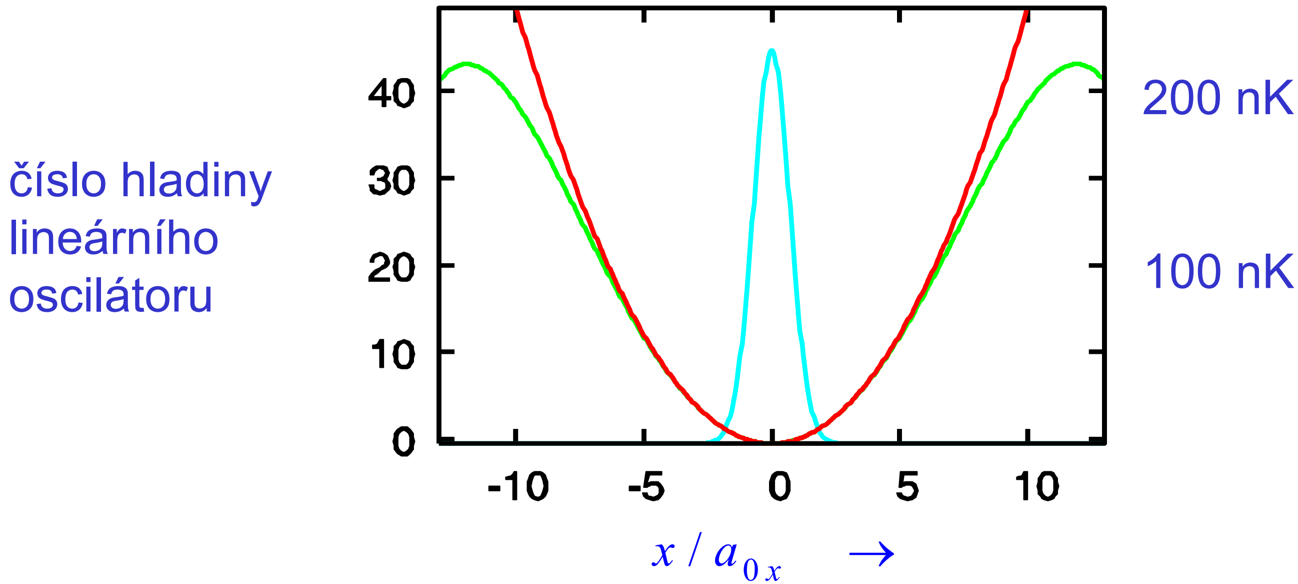


$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

$$= H_x + H_y + H_z$$



Základní stav a potenciál



$^{87}\mathrm{Rb}$

$a_0 = 1\,\mu\mathrm{m}$

$\hbar$

N

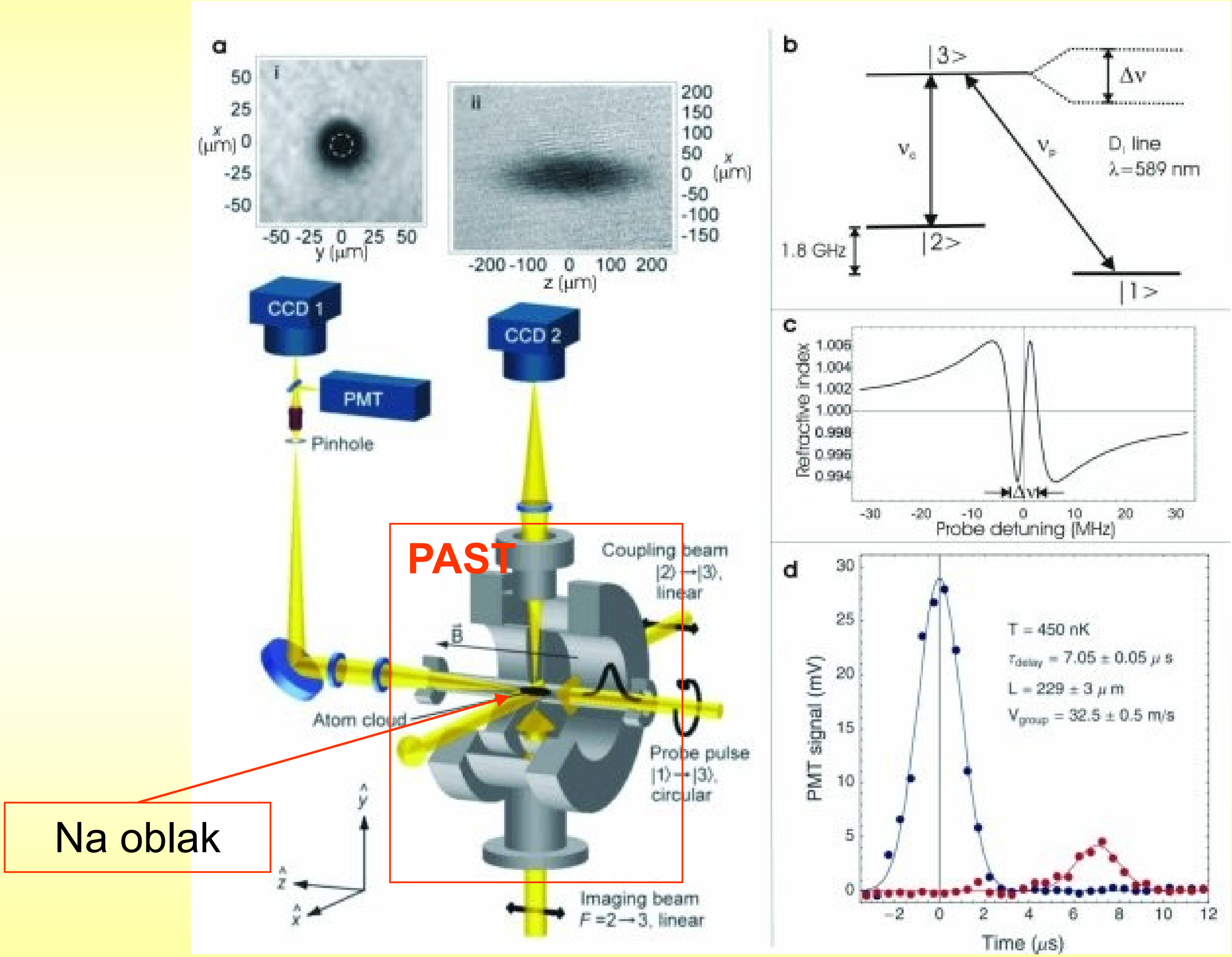
$$\psi_0(x,y,z) = \phi_{0x}(x)\,\phi_{0y}(y)\,\phi_{0z}(z)$$

$$\phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{a_0\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2a_0^2}}, \quad \boxed{a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}, \quad E_0 = \frac{}{2}\hbar$$

$$2 \quad \frac{\hbar}{m a_0^2} = \frac{}{2}\cdot\frac{\hbar}{M u_m a_0^2}$$

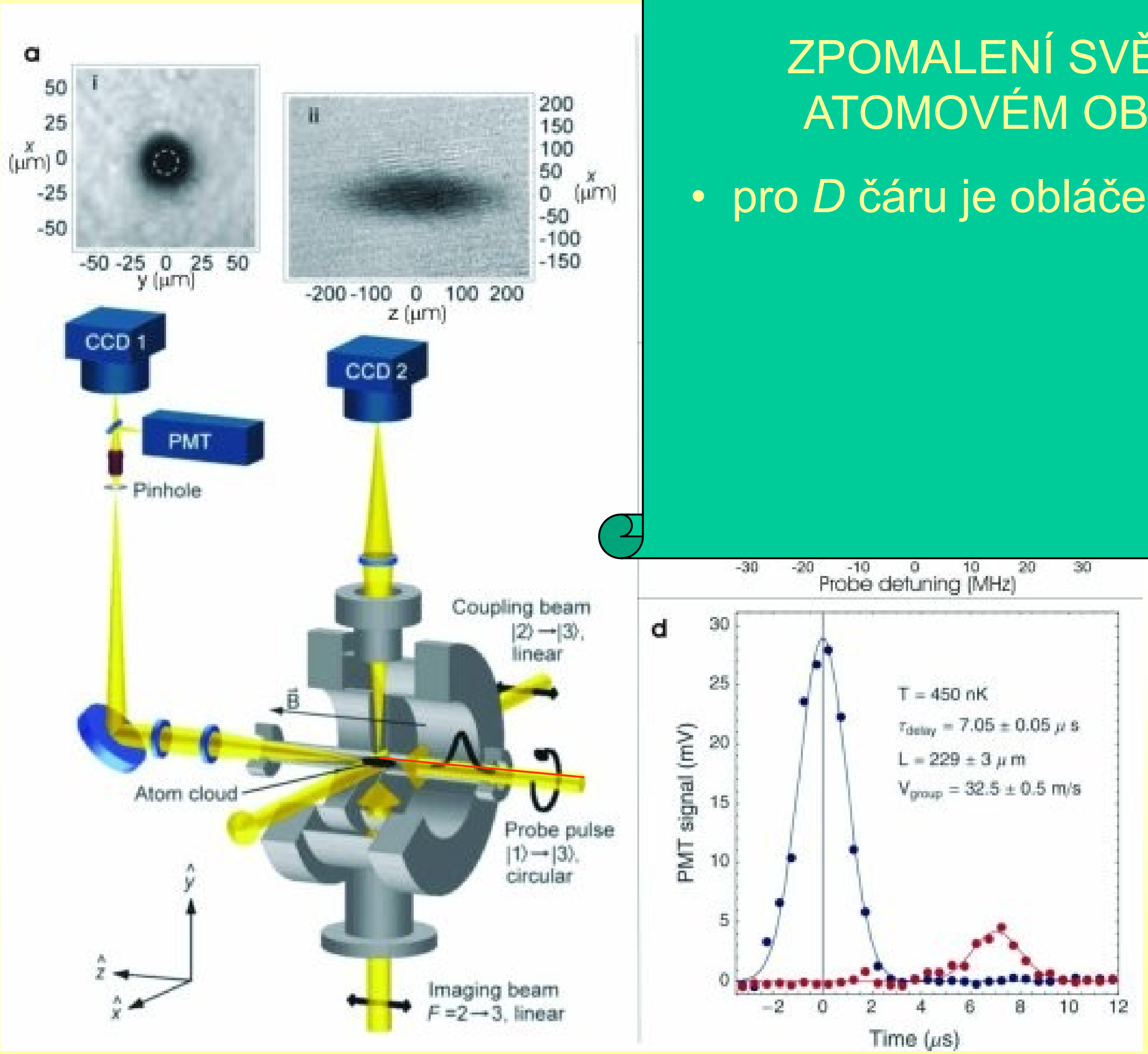
$$\boxed{V(u) = \frac{1}{2} m\omega^2 u^2 = \frac{1}{2}\hbar \left(\frac{u}{a_0}\right)^2}$$

Ukázka: Pomalé světlo ve studených parách sodíku



Intermezzo:
zpomalené světlo

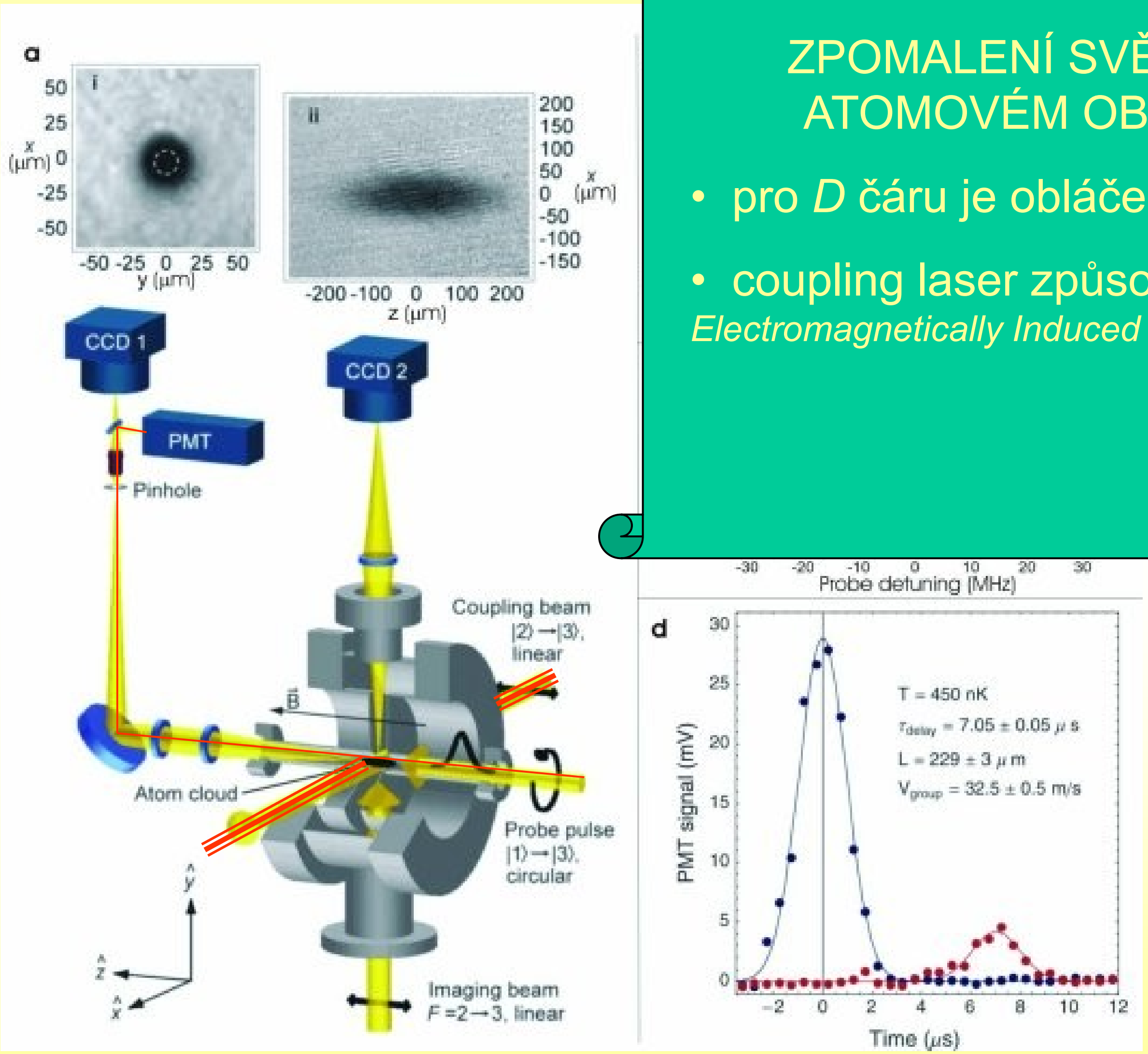
Pomalé světlo ve studených parách sodíku



ZPOMALENÍ SVĚTLA V ATOMOVÉM OBLAKU

- pro *D* čáru je obláček opakní

Pomalé světlo ve studených parách sodíku

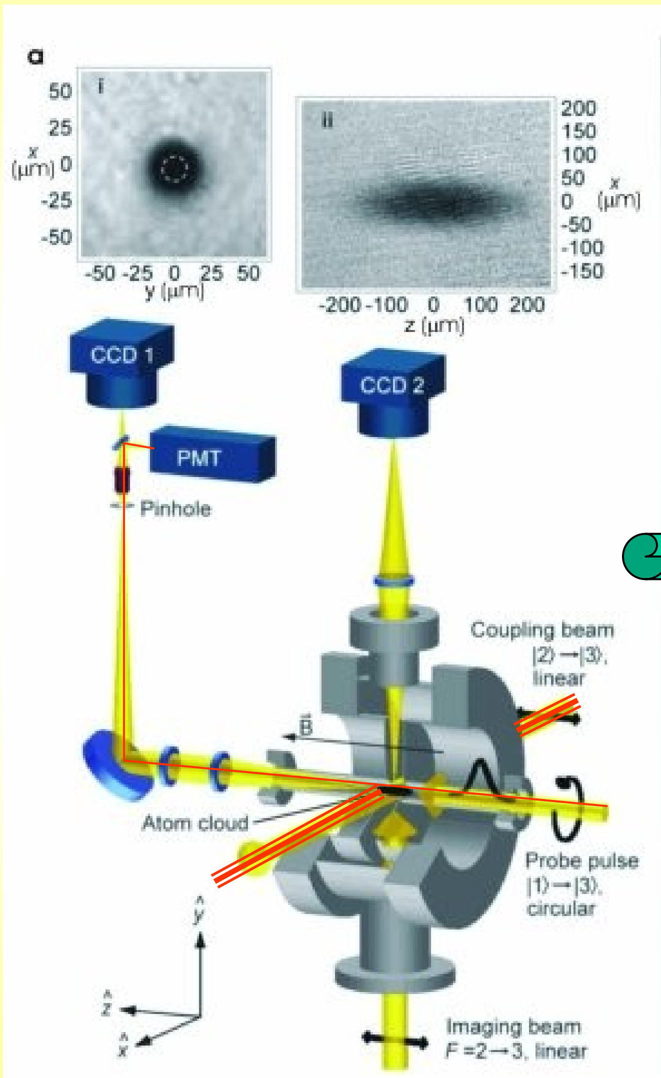


ZPOMALENÍ SVĚTLA V ATOMOVÉM OBLAKU

- pro *D* čáru je obláček opakní
- coupling laser způsobí *EIT*

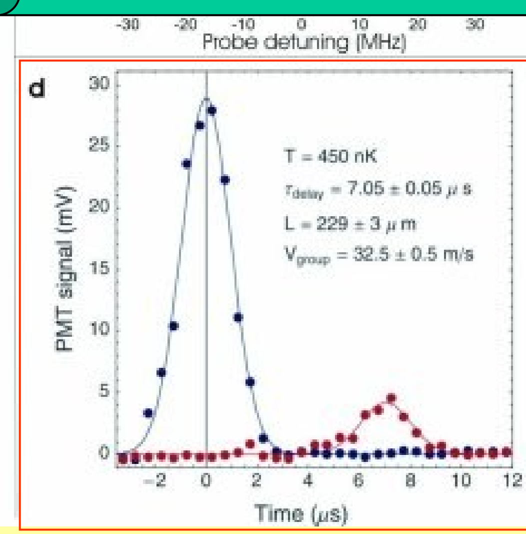
Electromagnetically Induced Transparency

Pomalé světlo ve studených parách sodíku



ZPOMALENÍ SVĚTLA V ATOMOVÉM OBLAKU

- pro *D* čáru je obláček opakní
- coupling laser způsobí *EIT*
  Electromagnetically Induced Transparency
- průchod světelného pulsu je ale zpomalen



1999

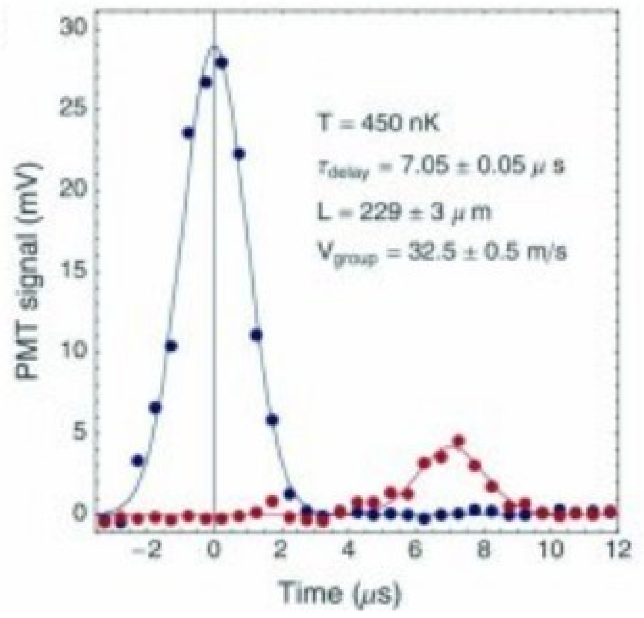
1999 - Nature 18 Feb.,(Vol.397, p.594)

L.V.Hau, S.E.Harris, Z.Dutton, C.H.Behrozi

Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas

Na - atomy, $T = 450$ nK (15 nK nad T_c), 17 m/s (32 m/s)

sodíková *D*-čára



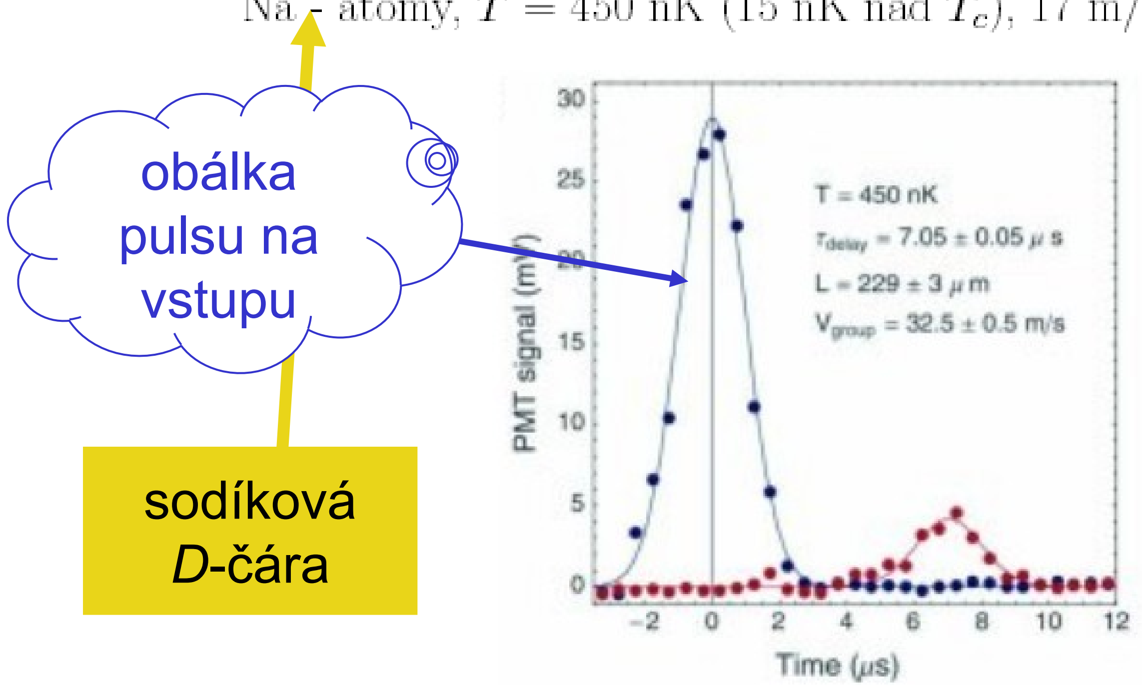
1999

1999 - Nature 18 Feb.,(Vol.397, p.594)

L.V.Hau, S.E.Harris, Z.Dutton, C.H.Behrozi

Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas

Na - atomy, $T = 450$ nK (15 nK nad T_c), 17 m/s (32 m/s)



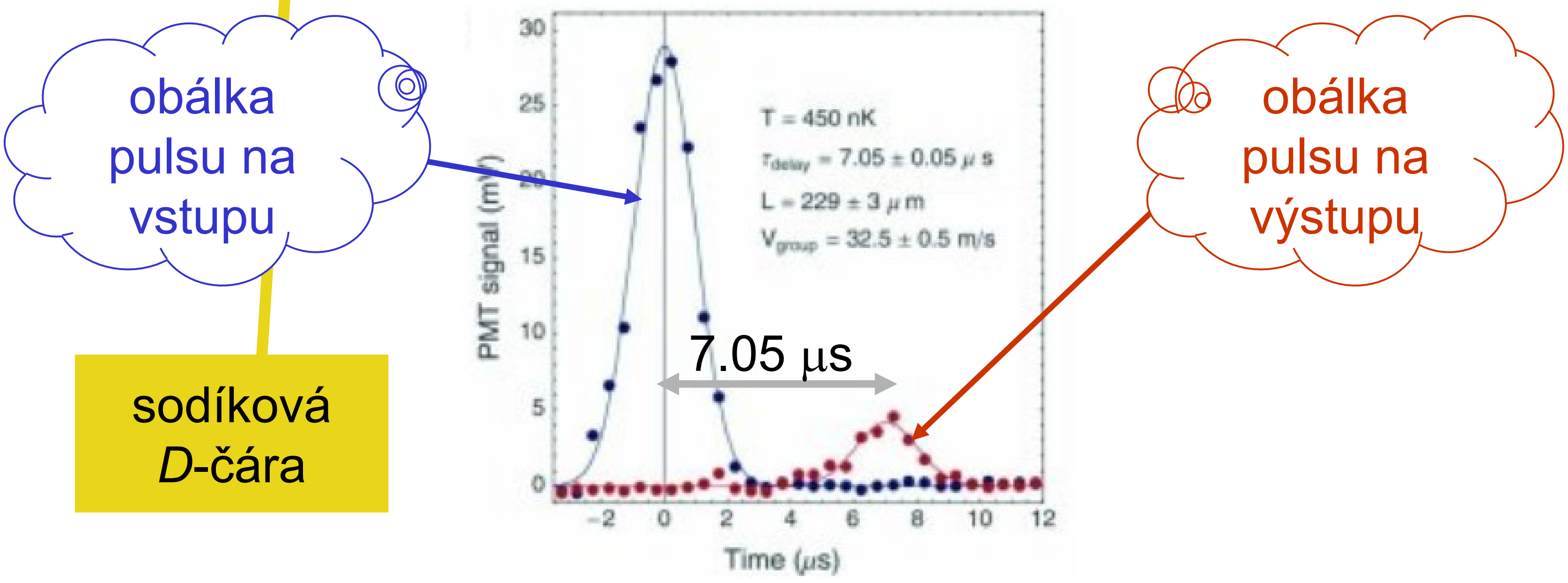
1999

1999 - Nature 18 Feb.,(Vol.397, p.594)

L.V.Hau, S.E.Harris, Z.Dutton, C.H.Behrozi

Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas

Na - atomy, $T = 450$ nK (15 nK nad T_c), 17 m/s (32 m/s)



1999

1999 - Nature 18 Feb.,(Vol.397, p.594)

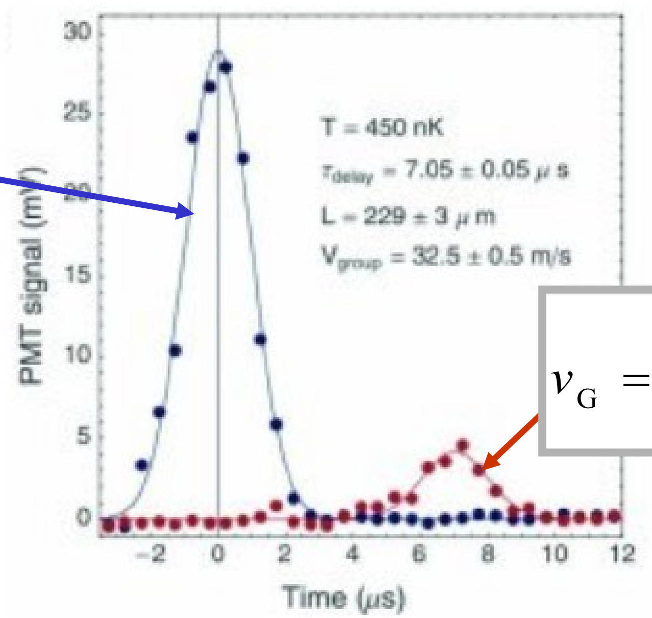
L.V.Hau, S.E.Harris, Z.Dutton, C.H.Behrozi

Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas

Na - atomy, $T = 450$ nK (15 nK nad T_c), 17 m/s (32 m/s)

obálka pulsu na vstupu

sodíková *D*-čára



obálka pulsu na výstupu

$$v_G = \frac{229 \times 10^{-6}\ \text{m}}{7.05 \times 10^{-6}\ \text{s}} = 32.5\ \text{m s}^{-1}$$

Podrobnosti o studených parách sodíku v pasti

OBLAK STUDENÝCH SODÍKOVÝCH ATOMŮ

- obláček je *makroskopický*
- vidíme *tepelné rozdělení*
- cigárový tvar: *protažený rotační elipsoid*
- difusní obrysy: *Maxwellovo–Boltzmannovo rozdělení*
- *prostorová hustota v parabolickém potenciálu*

Hustota částic v prostoru: I. Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$\boxed{\begin{aligned} f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) &= \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))} \\ n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\ &\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)} \end{aligned}}$$

Hustota částic v prostoru: I. Boltzmannova limita

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\ &\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)} \end{aligned}$$

Vzpomínka na Perrina a barometrickou formuli

Hustota částic v prostoru: II. BE kondensát při $T = 0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$\boxed{\begin{aligned} n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) &= \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1} \\ &= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1} \end{aligned}}$$

Hustota částic v prostoru: II. BE kondensát při $T=0$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1}$$

$$= \frac{1}{a_{0x}a_{0y}a_{0z}\pi^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2}-\frac{y^2}{a_{0y}^2}-\frac{z^2}{a_{0z}^2}}\ \boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu}-1} \to N \quad \text{při} \quad T \to 0}$$

Hustota částic v prostoru: III. srovnání obou limit

Aproximace skutečného rozdělení Boltzmannovou limitou
(pro vysoké teploty, hodně částic)

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$n_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}$$

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$= \frac{1}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

BE kondensát při $T = 0$ *a makroskopická vlnová funkce*

Částice kondensátu jsou všechny v základním stavu

$$n_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{r}) = N \cdot \left|\phi_{0x}(x)\right|^2 \left|\phi_{0y}(y)\right|^2 \left|\phi_{0z}(z)\right|^2$$

$$= \frac{N}{a_{0x} a_{0y} a_{0z} \pi^3} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a_{0x}^2} - \frac{y^2}{a_{0y}^2} - \frac{z^2}{a_{0z}^2}}$$

$$= N \varphi^*(\boldsymbol{r}) \varphi(\boldsymbol{r}) \equiv \Psi^*(\boldsymbol{r}) \Psi(\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{N} \varphi(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \equiv \sqrt{N} \sqrt{n(\boldsymbol{r})} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}}$$

Jediná vlnová funkce normovaná ne na 1, ale na *N*, popisuje chování kondensátu ... ***extrémní koherence*** *("zpívají unisono")*

ALE → → →

F.Laloë: Do we really understand Quantum mechanics, Am.J.Phys.**69**, 655 (2001)

In passing, and as a side remark, it is amusing to notice that the recent observation of the phenomenon of Bose–Einstein condensation in dilute gases (Ref. 25) can be seen, in a sense, as a sort of realization of the initial hope of Schrödinger: This condensation provides a case where the many-particle matter wave does propagate in ordinary space. Before condensation takes place, we have the usual situation: The atoms belong to a degenerate quantum gas, which has to be described by wave functions defined in a huge configuration space. But, when they are completely condensed, they are restricted to a much simpler many-particle state that can be described by the same wave function, exactly as a single particle. In other words, the matter wave becomes similar to a classical field with two components (the real part and the imaginary part of the wave function), resembling an ordinary sound wave for instance. This illustrates why, somewhat paradoxically, the "exciting new states of matter" provided by Bose–Einstein condensates are not an example of an extreme quantum situation; they are actually more classical than the gases from which they originate (in terms of quantum description, interparticle correlations, etc.). Conceptually, of course, this remains a very special case and does not solve the general problem associated with a naive view of the Schrödinger waves as real waves.

Studium BEC metodou TOF
(time of flight -- doby letu)

BEC pozorovaná metodou TOF

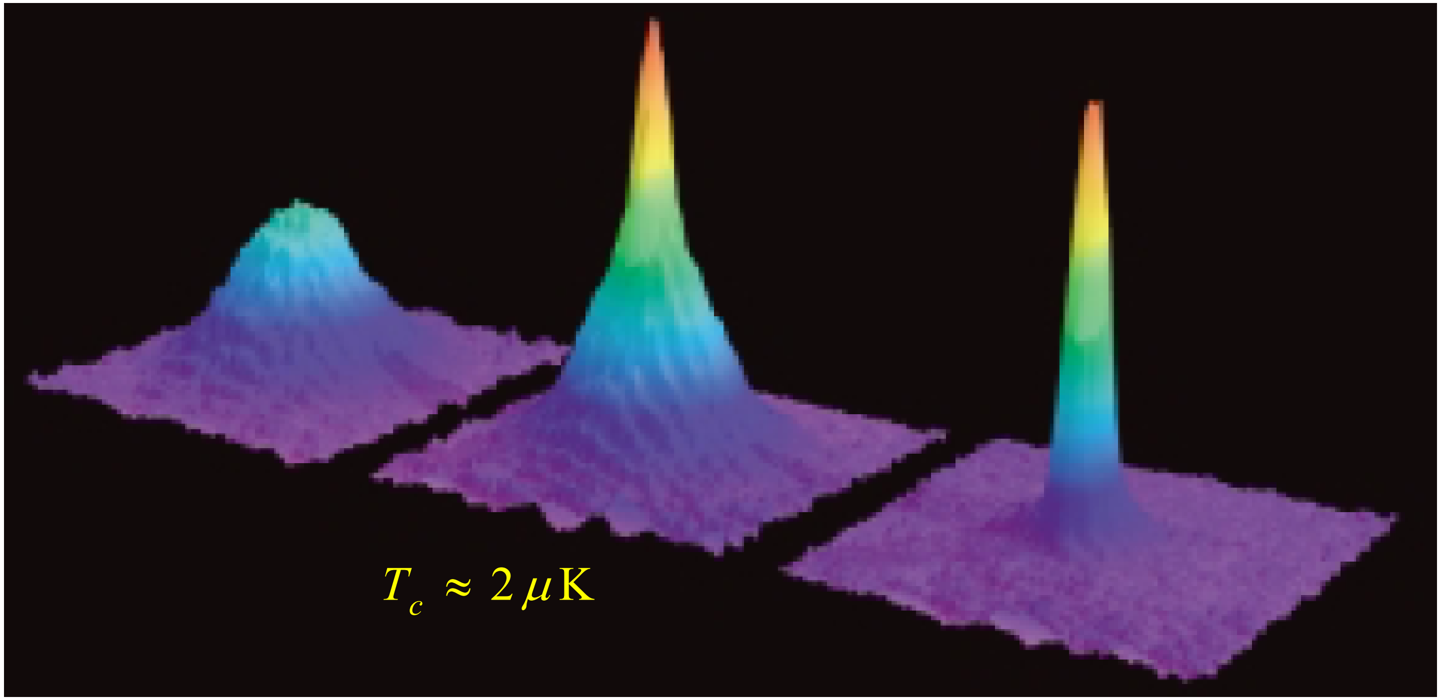


Figure 7. Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about 7×10^5, the temperature at the transition point is 2 μK.

BEC pozorovaná metodou TOF

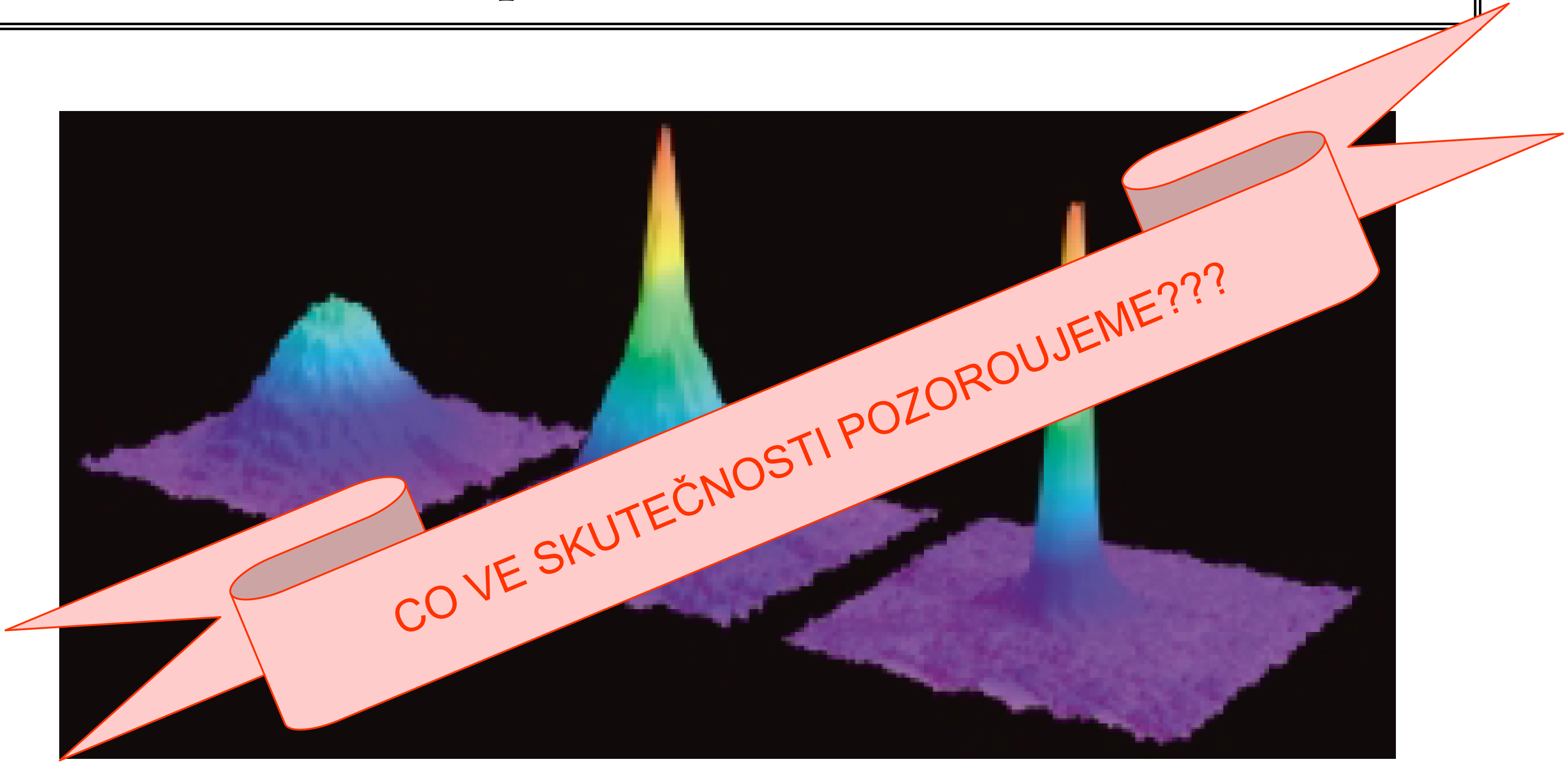


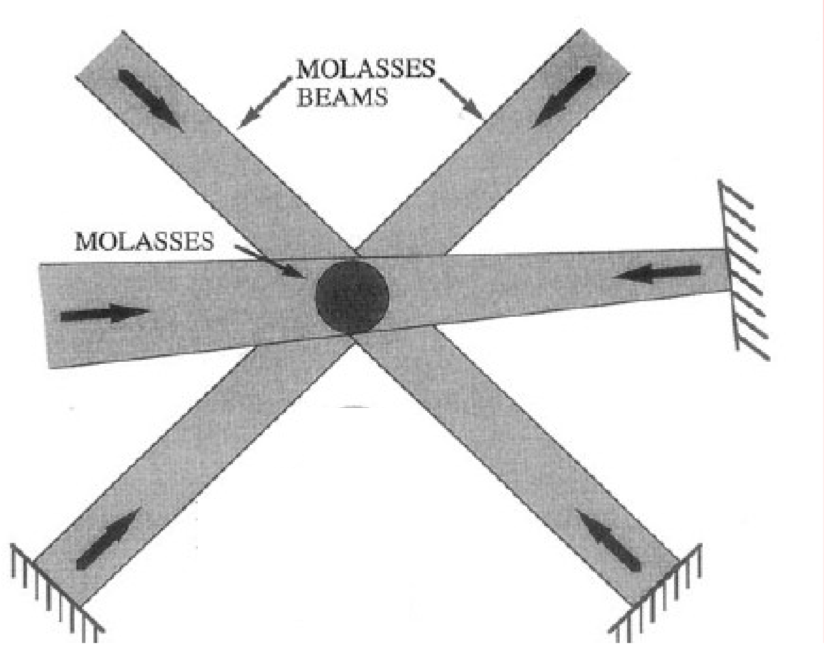
Figure 7. Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about 7×10^5, the temperature at the transition point is 2 μK.

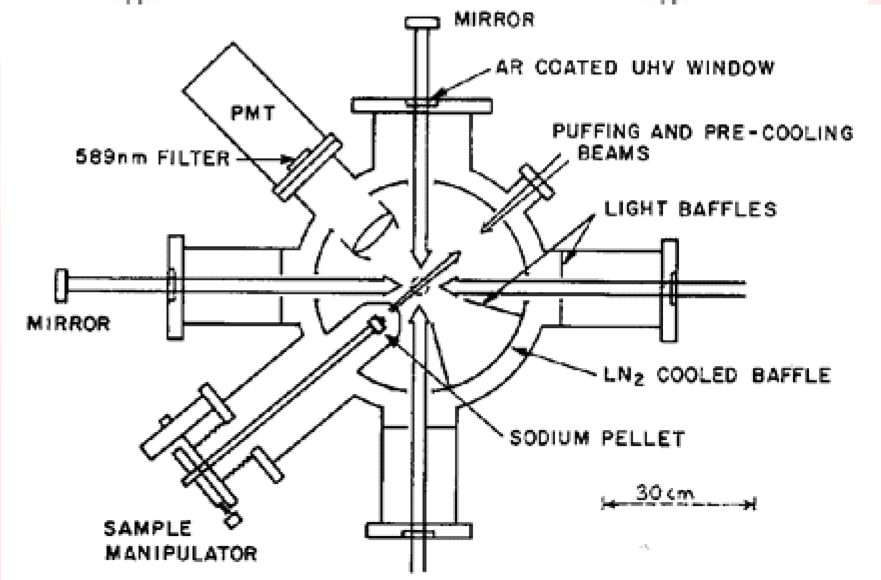
Tři zkřížené svazky: 3D Dopplerovo chlazení podle Chu

je třeba 20 000 fotonů k zastavení z pokojové teploty

brzdná síla je pak úměrná rychlosti: viskózní prostředí, „syrup“

Pro intensivní laser je to otázka milisekund



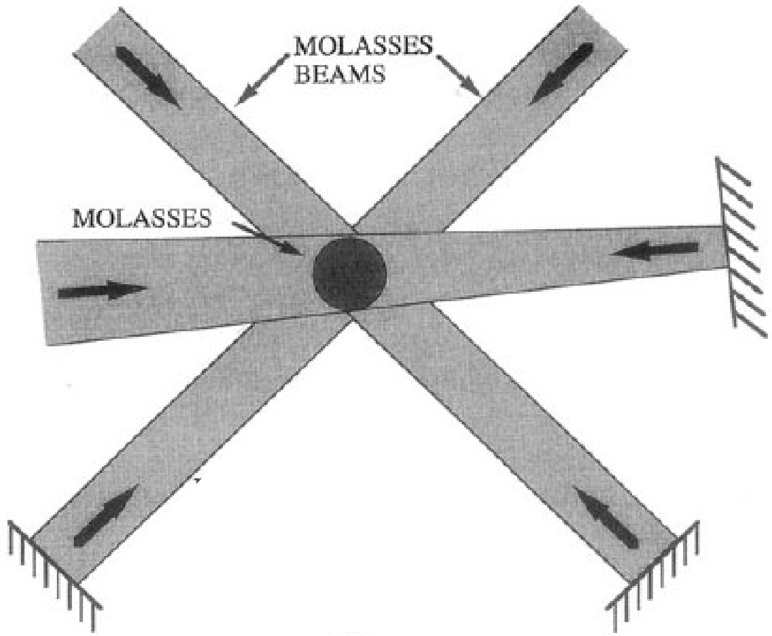


TOF experiment: příprava oblaku

20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund



TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku

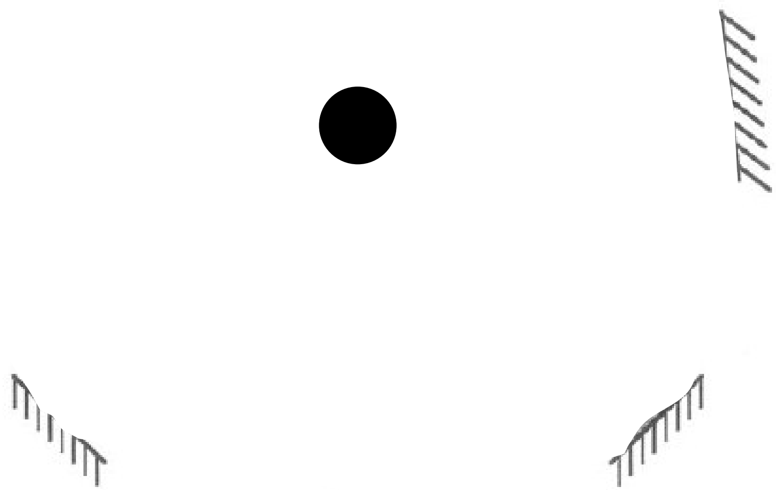
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku

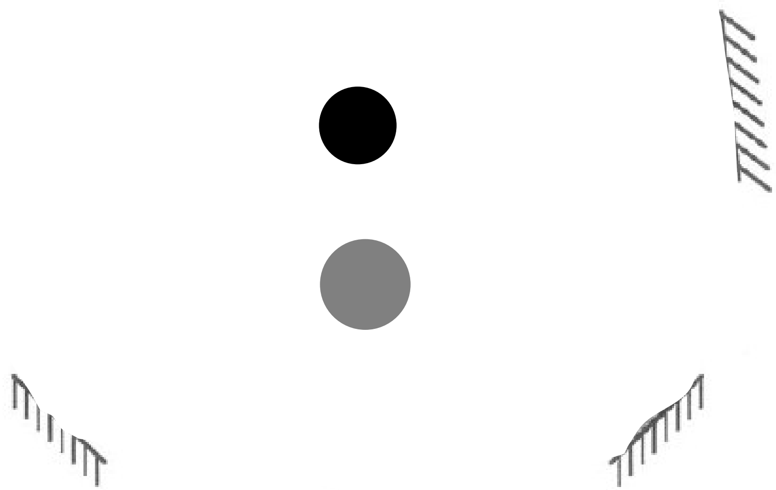
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku

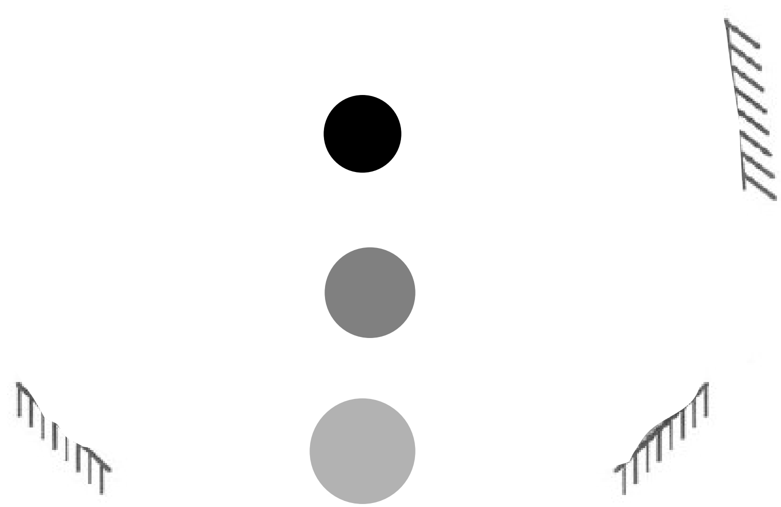
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



TOF experiment: měření distribuce (hybností)

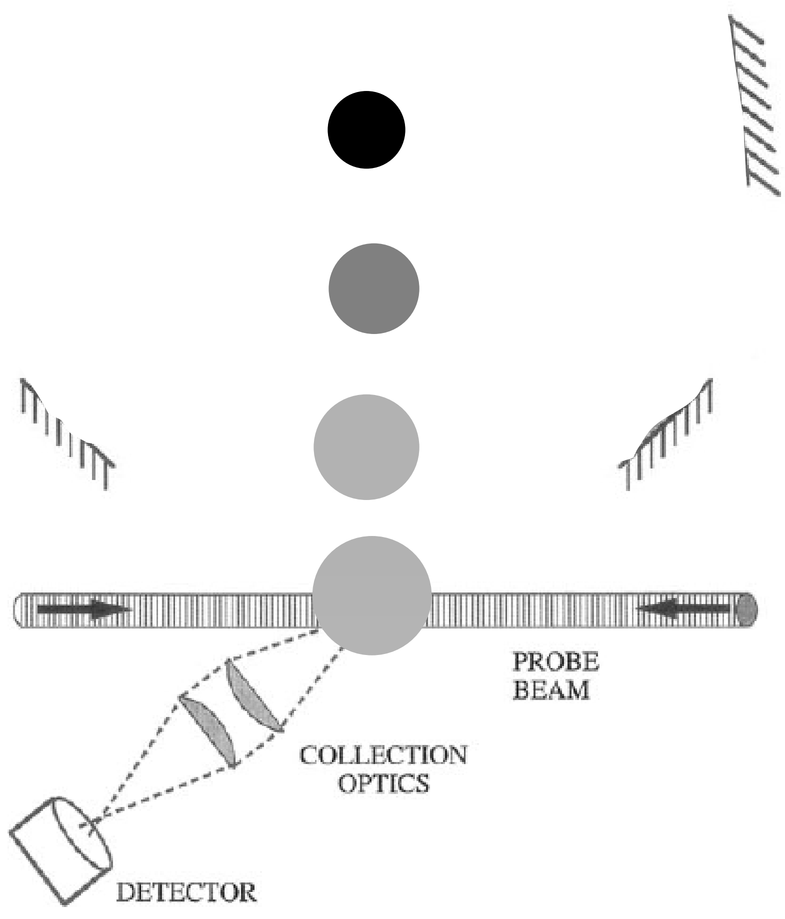
20 000 fotonů je třeba k zastavení atomu z pokojové teploty

brzdná síla úměrná rychlosti, připomíná viskosní prostředí, "sirup"

Pro silné lasery záležitost milisekund

měření tepelného rozdělení: vypneme lasery. Atomy klesají v tíhovém poli

Zároveň se rozletují balistickým způsobem



sondovací laserový svazek vyvolá fluorescenci atomů

z tvaru a velikosti obláčku je určeno rychlostní rozdělení

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) &= \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))} \\
f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\
&\propto \mathrm{e}^{-\beta W} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}
\end{aligned}
}
$$

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{THERM}}(\boldsymbol{p}) &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\ &\propto \mathrm{e}^{-\beta W} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} \end{aligned}$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$\begin{aligned} f_{\text{BEC}}(\boldsymbol{p}) &= \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right| \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right| \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right| \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1} \\ &\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}} \end{aligned}$$

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right| \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right| \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right| \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

Dvojí přímo měřitelné charakteristické délky

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{a_0},$$

$$B_T = \sqrt{m/\beta}$$

$$= b_0 \sqrt{k_B T / \hbar}$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right|^2 \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right|^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

Rozdělení rychlostí (hybností) v oblaku

Vysokoteplotní rozdělení aproximujeme klasickým rozdělením

Boltzmannovo rozdělení v poli pasti:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \Rightarrow \sqrt{m} = \frac{\hbar}{a_0}\sqrt{\frac{\quad}{\hbar}}$$

$$f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \mathrm{e}^{\beta(\mu - W - U(\boldsymbol{r}))}$$

$$f_{\mathrm{THERM}}(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \cdot f_B(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\beta W}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta m^{-1}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$$

isotropní

$$b_0 = (b_{0x} b_{0y} b_{0z})^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar}{a_0},$$

$$B_T = \sqrt{m/\beta}$$

$$= b_0\sqrt{k_B T/\hbar}$$

Vlnová funkce kondensátu v impulsové representaci – také "Gaussovka"

$$f_{\mathrm{BEC}}(\boldsymbol{p}) = \left|\breve{\phi}_{0x}(p_x)\right| \left|\breve{\phi}_{0y}(p_y)\right| \left|\breve{\phi}_{0z}(p_z)\right| \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}$$

$$\propto \mathrm{e}^{-\frac{p_x^2}{b_{0x}^2} - \frac{p_y^2}{b_{0y}^2} - \frac{p_z^2}{b_{0z}^2}} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1}, \qquad \boxed{b_{0w} = \frac{\hbar}{a_{0w}}}$$

anisotropní

BEC pozorovaná v rozdělení rychlostí metodou TOF

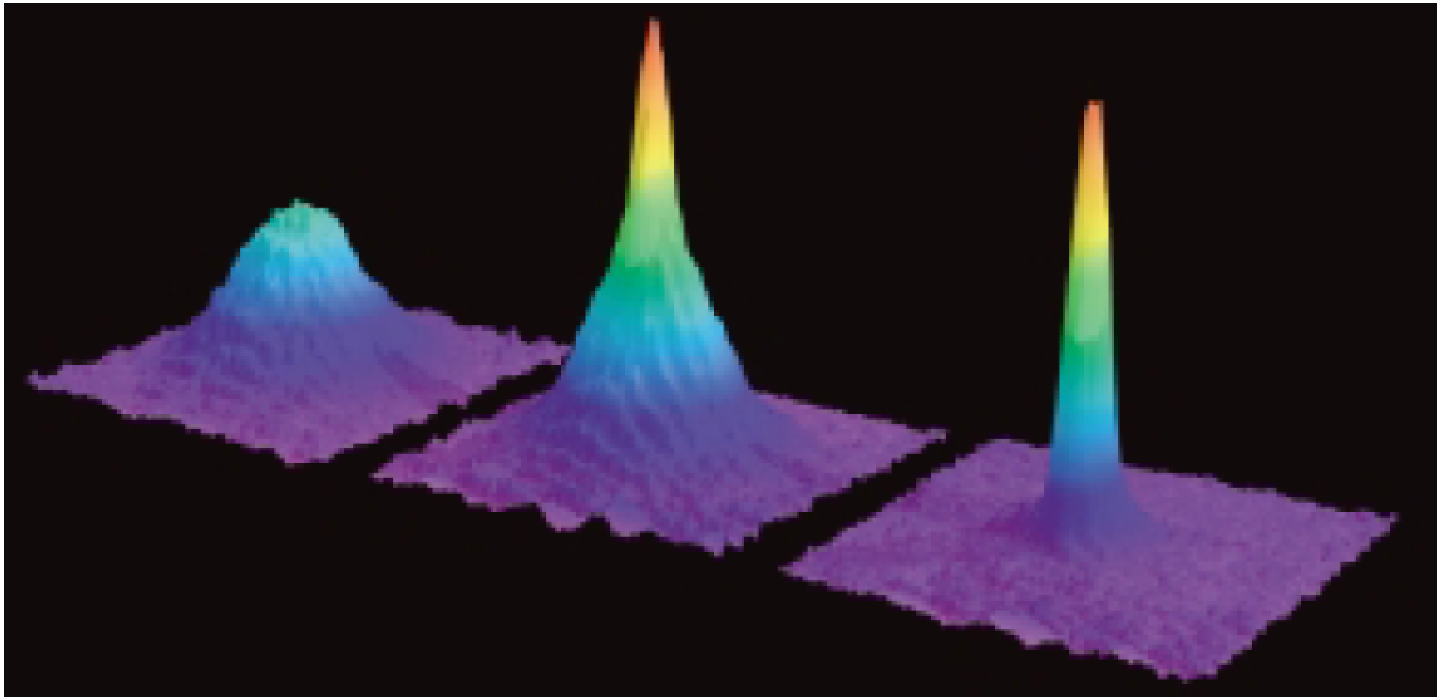


Figure 7. C... by absorption imaging. Shown is absorption vs. two sp... ensate is characterized by its slow expansion observed ... e shows an expanding cloud cooled to just above the... condensate appeared; right: after further evaporati... sate. The total number of atoms at the phase transition... transition point is 2 μK.

Kvalitativní vlastnosti:

- ♠ Gaussovy profily
- ♠ široké *vs.* úzké
- ♠ isotropní *vs.* anisotropní

Kvantitativní vyhodnocení: vliv atomových interakcí

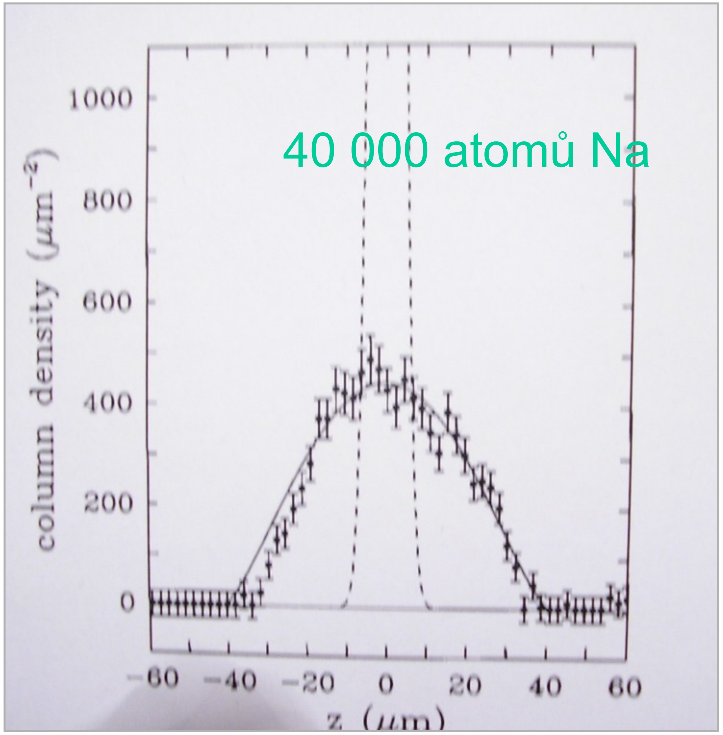
Oblak by se rozplýval jako kvantové klubko i bez meziatomových interakcí

Výsledek by pak odpovídal balistickému rozletování atomů jako klasických kuliček

Interakce jsou sice slabé, ale protože past drží atomy pohromadě, jejich účinek je značný,

jednak ještě za působení potenciálu pasti,

jednak v počátečních stadiích rozletu, kdy obláček je ještě hustý



MAKROSKOPICKÁ VLNOVÁ FUNKCE KONDENSÁTU

bez interakcí by kondensát byl v základním stavu oscilátoru (čárkovaně - - - - -)

Experiment ukazuje významné "nafouknutí" vnitřním tlakem; to je přesně reprodukováno řešením tzv. Gross-Pitajevského rovnice

Příklad výpočtu balistického rozletu

Repulsivní interakce působí zpočátku silněji a atomy "předbíhají čas" proti čistě balistickému rozletu

Později je rozlet již zase lineární.

Výpočet byl ve shodě s experimentem pro vhodnou sílu interakce, která odpovídá nezávislým měřením atomových srážek.

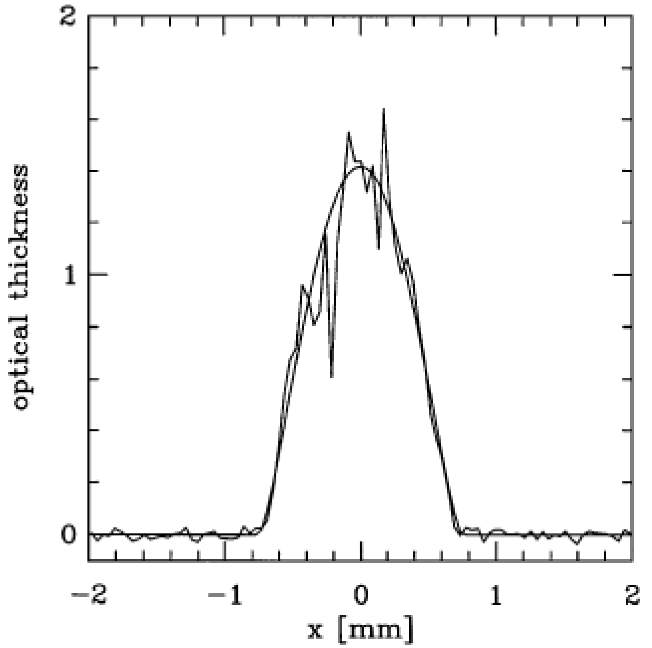
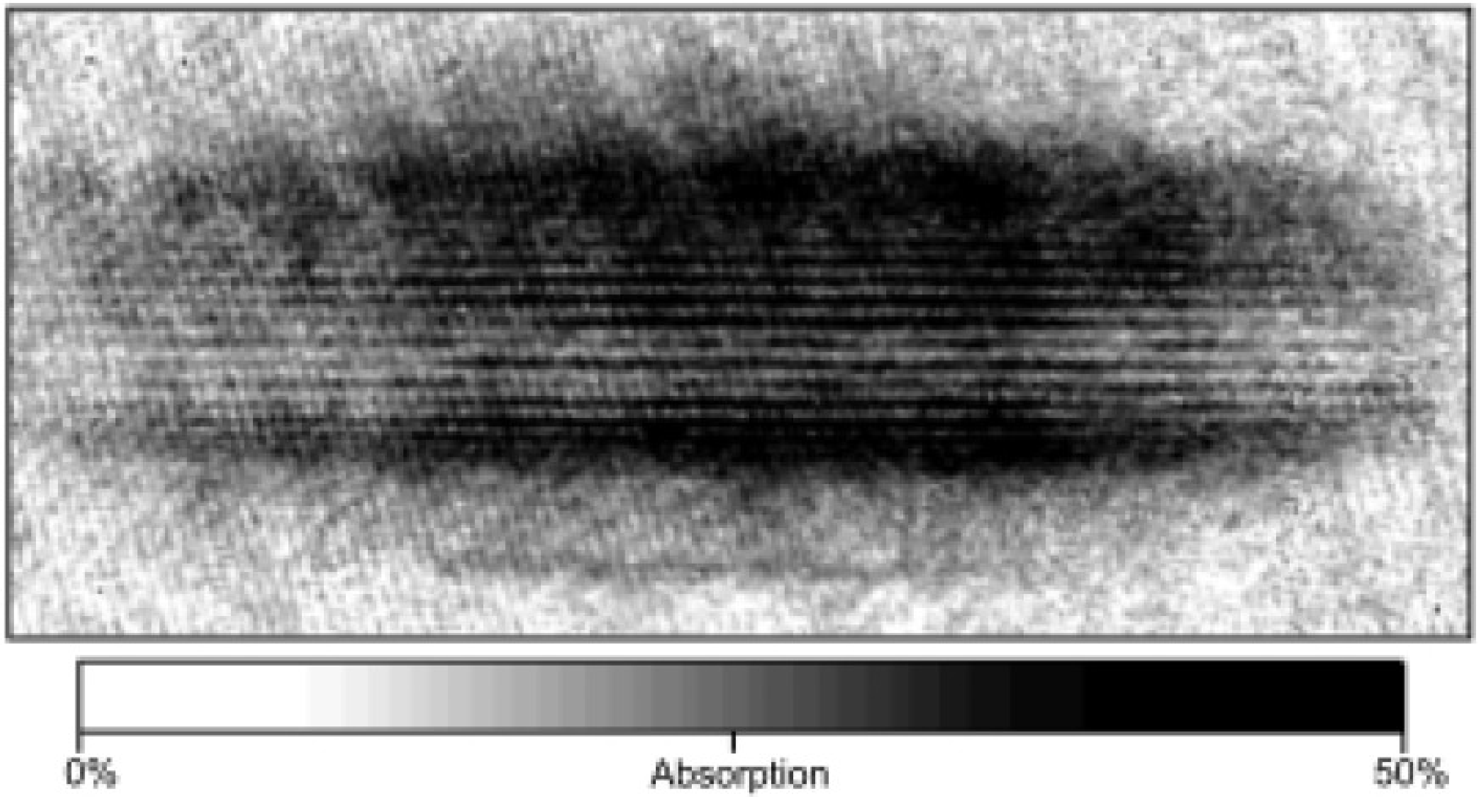


FIG. 1. Spatial density of an expanding condensate integrated along the y axis, cut along the x axis (that is, at $z = 0$). Experimental data obtained at MIT (expansion time of 40 ms) and fit from theory.

Castin&Dum,
PRL **77**, 5315 (1996)

První přímý důkaz kvantové koherence atomárního BE kondensátu

Interference atomů



Dva koherentní kondensáty se pronikají a interferují.
Vertikální vzdálenost proužků je 15 μm
Vodorovný rozměr obláčku 1,5mm

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

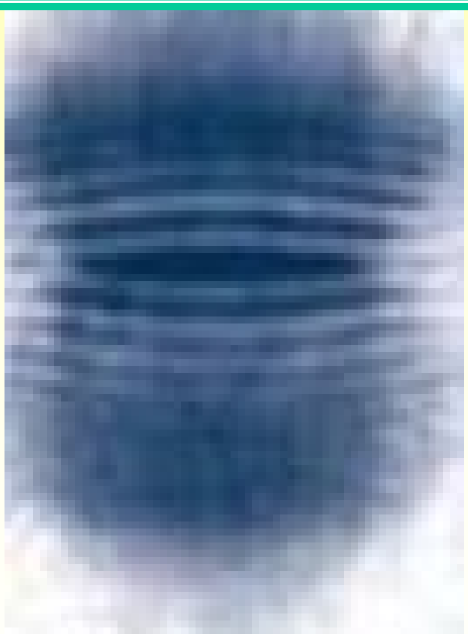
Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.

vlny na vodě



Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

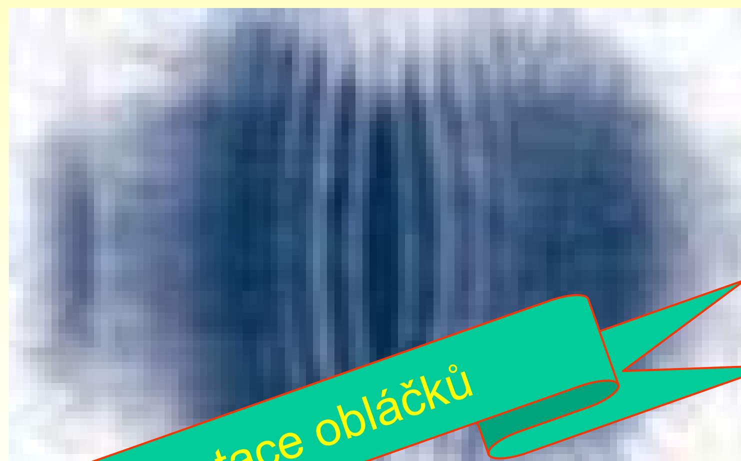
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



skutečná orientace obláčků

vlny na vodě

Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

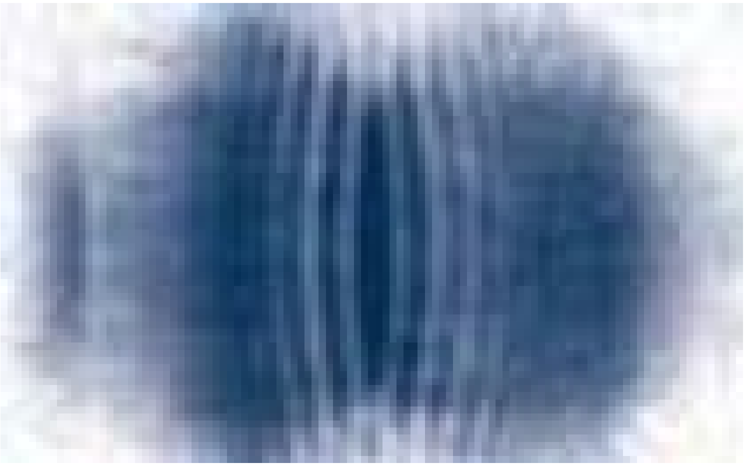
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



Bose-Einsteinova kondensace atomů v pastech

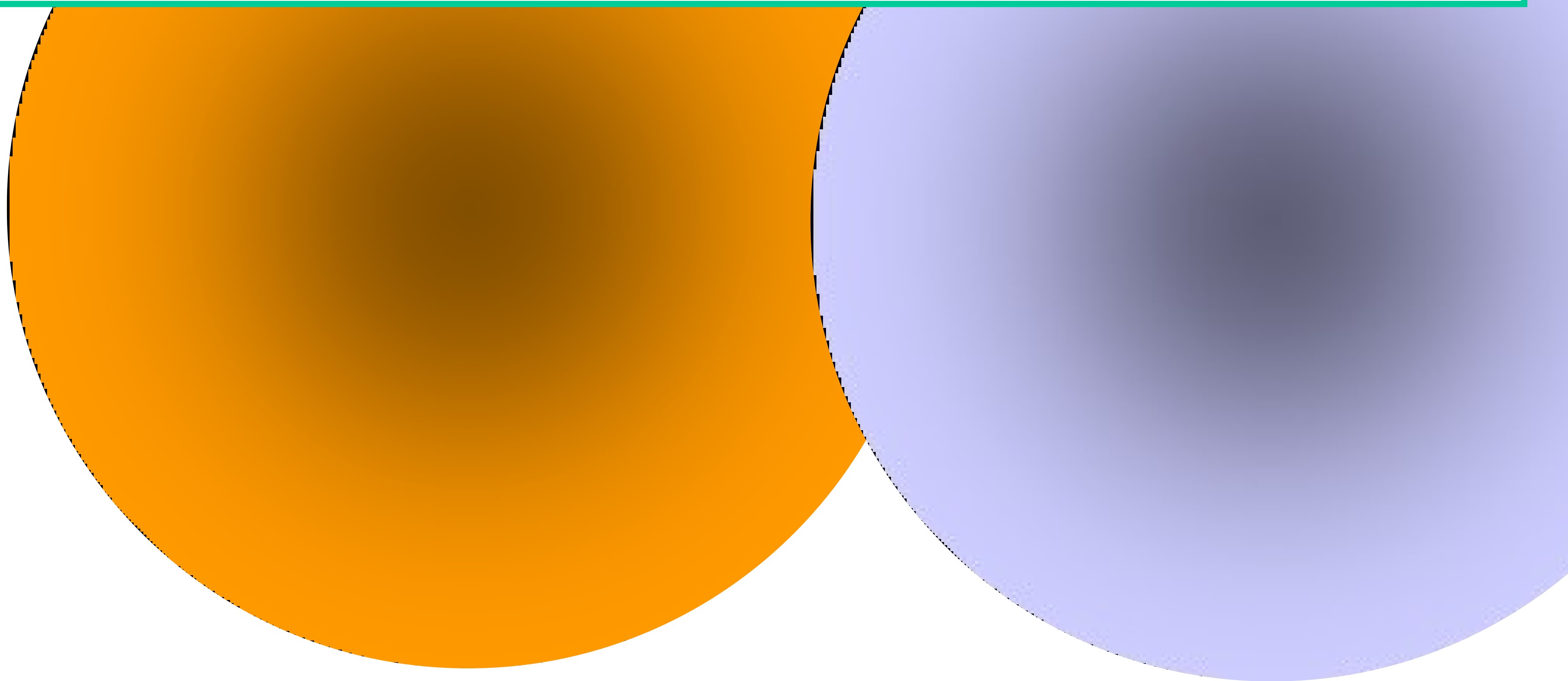
Atomy sodíku vytvářejí makroskopickou vlnovou funkci

Experimentální důkaz:

Dvě části obláčku rozdělené a opět se prolínající spolu interferují.

Vlnová délka v řádu desetin milimetru

experiment ve skupině Ketterle a spol.



Boom BEC, teď ještě mnohem živější

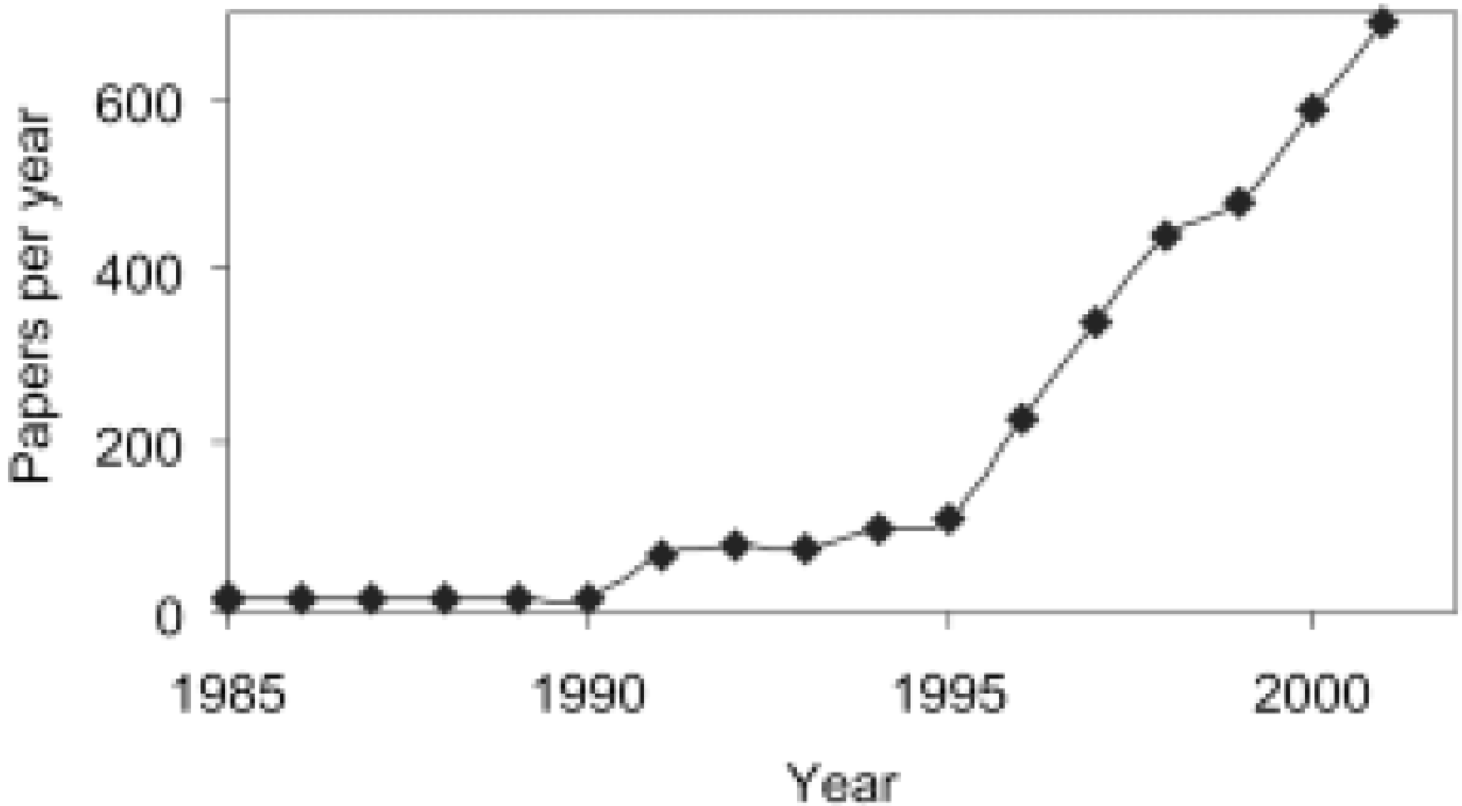
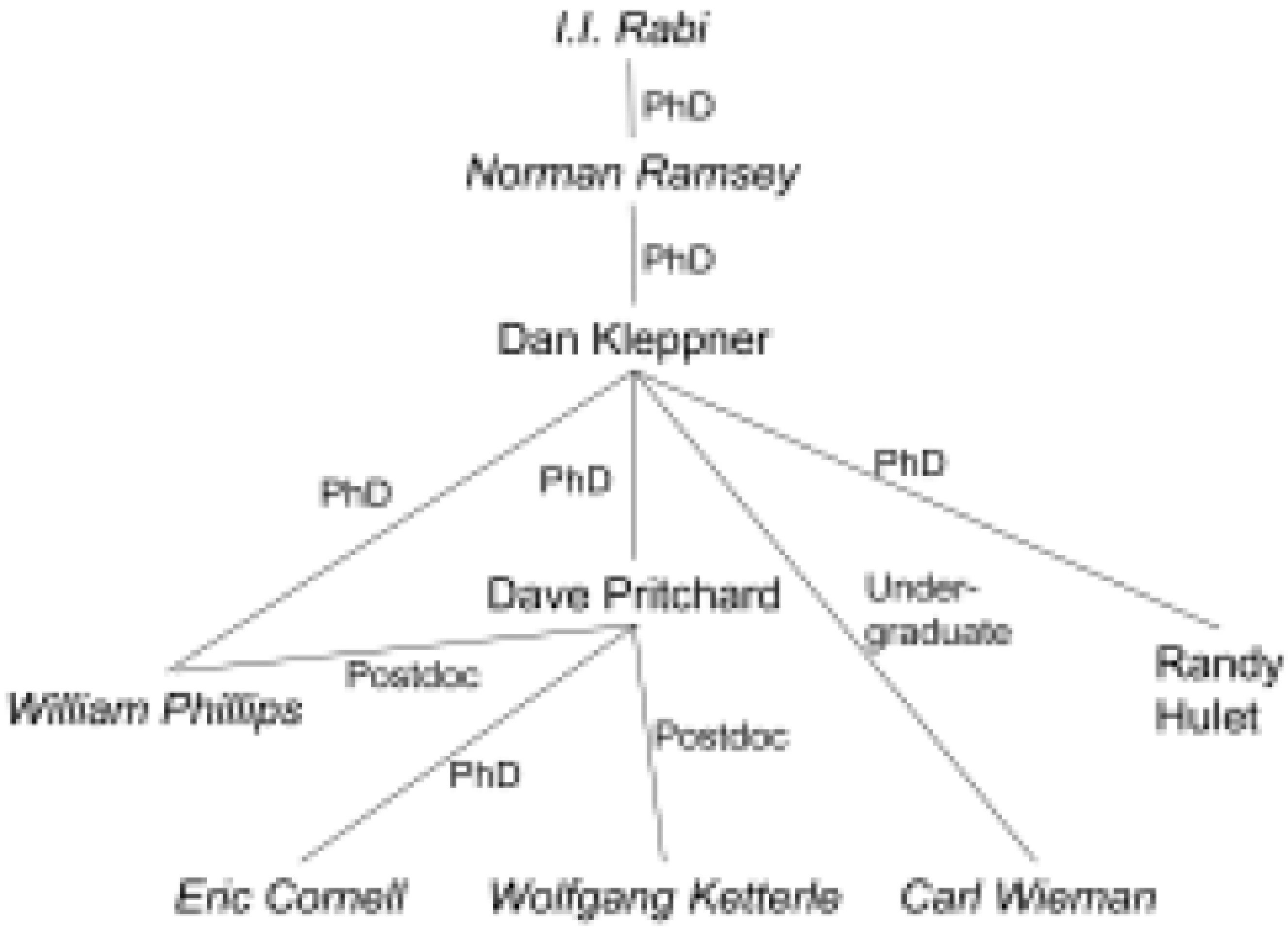


Figure 1. Annual number of published papers, which have the words "Bose" and "Einstein" in their title, abstracts or keywords. The data were obtained by searching the ISI (Institute for Scientific Information) database.

Strom nobelistů (kursivou) v atomové fyzice



The end