

Relativistická kvantová mechanika

Michal Lenc

Poznámky k přednášce v jarním semestru 2010

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Obrazy..... | 2 |
| 1.1 | Postulát o kvantové kauzalitě..... | 2 |
| 1.2 | Evoluční operátor..... | 2 |
| 1.3 | Schrödingerův a Heisenbergův obraz..... | 3 |
| 1.4 | Interakční obraz..... | 4 |
| 2 | Relativita a antičástice podle Feynmana..... | 4 |
| 3 | Komplexní proměnná..... | 5 |
| 4 | Antičástice podle Feynmana II..... | 7 |
| 5 | Relativistická kvantová mechanika – historický přístup..... | 8 |
| 6 | Spinory v trojrozměrném prostoru..... | 9 |
| 7 | Spinory ve čtyřrozměrném časoprostoru..... | 11 |
| 7.1 | Vlastnosti spinorů..... | 11 |
| 7.2 | Lorentzova transformace spinorů..... | 14 |
| 8 | Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice..... | 16 |
| 8.1 | Diracova rovnice pro volnou částici..... | 16 |
| 8.2 | Diracova rovnice v elektromagnetickém poli..... | 17 |
| 8.3 | Heisenbergův obraz..... | 17 |
| 8.4 | Rovnice kontinuity..... | 18 |
| 8.5 | Standardní representace..... | 19 |
| 9 | Rovinné vlny..... | 20 |
| 10 | Transformace Diracovy rovnice..... | 21 |
| 10.1 | Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)..... | 21 |
| 10.2 | Rovnice částice v elektromagnetickém poli..... | 22 |
| 11 | Rozptyl elektronu na jádře..... | 25 |
| 12 | Invariantní účinný průřez..... | 27 |
| 13 | Spinová matice hustoty..... | 29 |
| 14 | Spinové středování..... | 31 |

1 Obrazy

1.1 Postulát o kvantové kauzalitě

Postulát o kvantové kauzalitě říká, že:

- (a) Stav systému v čase t_0 jednoznačně určuje stav systému v libovolném okamžiku $t > t_0$ i v okamžiku $t < t_0$.
- (b) Platí princip superposice: Jsou-li stavy $|\psi_1(t)\rangle$ a $|\psi_2(t)\rangle$ časové evoluce stavů $|\psi_1(t_0)\rangle$ a $|\psi_2(t_0)\rangle$, pak také stav $c_1|\psi_1(t_0)\rangle + c_2|\psi_2(t_0)\rangle$ má časovou evoluci $c_1|\psi_1(t)\rangle + c_2|\psi_2(t)\rangle$.
- (c) Norma stavového vektoru se během časové evoluce nemění.

1.2 Evoluční operátor

Podle postulátu o kvantové kauzalitě existuje jednoznačný vztah mezi vektory $|\psi(t)\rangle$

a $|\psi(t_0)\rangle$ a lze tedy definovat evoluční operátor $\hat{T}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (1.1)$$

Ze zachování normy dostáváme

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\hat{T}(t, t_0)\psi(t_0)|\hat{T}(t, t_0)\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad (1.2)$$

a platí tak

$$\hat{T}^+(t, t_0)\hat{T}(t, t_0) = \hat{1}. \quad (1.3)$$

Dále porovnáním

$$\begin{aligned} |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle = \hat{T}(t_2, t_1)\hat{T}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \\ |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_0)|\psi(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

dostáváme

$$\hat{T}(t_2, t_0) = \hat{T}(t_2, t_1)\hat{T}(t_1, t_0). \quad (1.5)$$

Evoluční operátor je unitární, neboť také

$$\hat{T}(t, t_0)\hat{T}^+(t, t_0) = \hat{1} \quad (1.6)$$

a dále máme

$$\hat{T}^+(t, t_0) = \hat{T}(t_0, t) \quad . \quad (1.7)$$

Pro Taylorův rozvoj $\hat{T}(t + \Delta t, t)$ dostáváme

$$\hat{T}(t + \Delta t, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t + \dots, \quad (1.8)$$

kde \hat{H} je nějaký hermiteovský operátor. Evoluční operátor splňuje rovnici

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{T}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{T}(t, t_0) \quad , \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1} \quad . \quad (1.9)$$

1.3 Schrödingerův a Heisenbergův obraz

Ve Schrödingerově obraze předpokládáme, že se v čase mění stavový vektor. Pro stavový vektor platí přirozeně ta samá rovnice, jako pro evoluční operátor (Schrödingerova rovnice)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle = \hat{H}_S(t) |\psi_S(t)\rangle \quad (1.10)$$

a pokud operátory závisí na čase, tak pouze explicitně. V Heisenbergově obraze naopak předpokládáme, že se stavový vektor v čase nemění. Požadavek rovnosti vyjádření střední hodnoty libovolné fyzikální veličiny v obou obrazech vede ke vztahu mezi operátory

$$\begin{aligned} |\psi_H\rangle &\equiv |\psi_S(t_0)\rangle = \hat{T}^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad , \\ \langle \psi_S(t) | \hat{F}_S | \psi_S(t) \rangle &= \langle \psi_H | \hat{F}_H(t) | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{T}(t, t_0) \hat{F}_H(t) \hat{T}^+(t, t_0) | \psi_H \rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.11)$$

tedy

$$\hat{F}_H(t) = \hat{T}^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}(t, t_0) \quad . \quad (1.12)$$

Rovnici pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze získáme derivováním předchozího vztahu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{F}_H &= \frac{d\hat{T}^+}{dt} \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \frac{d\hat{T}}{dt} + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left(-\hat{T}^+ \hat{H}_S \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \hat{H}_S \hat{T} \right) + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

S uvážením (1.6) máme

$$\frac{d}{dt} \hat{F}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}_H, \hat{H}_H] + \frac{\partial \hat{F}_H}{\partial t} \quad . \quad (1.14)$$

1.4 Interakční obraz

Velmi důležitým pro aplikace je interakční obraz. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, kde \hat{H}_0 je na čase nezávislá základní část a $\hat{V}(t)$ je interakční část, která může explicitně záviset na čase. Zvolíme

$$\begin{aligned} \hat{T}_0(t, t_0) &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t - t_0)\right\} \quad , \\ F_I &= \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}_0(t, t_0) \quad , \quad |\psi_I(t)\rangle = \hat{T}_0^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.15)$$

a dostáváme pak

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{H}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad , \quad \hat{H}_I(t) = \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{V}(t) \hat{T}_0(t, t_0) \quad , \\ \frac{d}{dt} \hat{F}_I &= \hat{T}_0^+(t, t_0) \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} \hat{T}_0(t, t_0) + [\hat{H}_0, \hat{F}_I] \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

2 Relativita a antičástice podle Feynmana

Amplituda pravděpodobnosti přechodu

$$A(\phi_0 \rightarrow \chi) = -i \int d^3 \vec{x} \chi^*(\vec{x}) U(\vec{x}) \phi_0(\vec{x}) = -i \langle \chi | \hat{U} | \phi_0 \rangle \quad . \quad (2.1)$$

Předpokládáme (první předpoklad je splněn normováním $|\phi_0\rangle$, druhý vhodnou volbou počátku odečítání energie)

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1 \quad , \quad \langle \phi_0 | \hat{U} | \phi_0 \rangle = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Působení v čase t_1 označme \hat{U}_1 , působení v čase t_2 jako \hat{U}_2 atd. Máme pak

$$A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) = 1 - \sum_m \langle \phi_0 | \hat{U}_2 | \psi_m \rangle \exp\{-i E_m(t_2 - t_1)\} \langle \psi_m | \hat{U}_1 | \phi_0 \rangle \quad . \quad (2.3)$$

Za $|\psi_m\rangle$ vezmeme rovinné vlny. S označeními

$$a(\vec{x}_1) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_1, t_1) \phi_0(\vec{x}_1) \quad , \quad b(\vec{x}_2) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_2, t_2) \phi_0(\vec{x}_2) \quad , \quad (2.4)$$

kde $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ (ne nutně kladná větev odmocniny), můžeme psát

$$\begin{aligned} A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) &= 1 - \\ &\int d^3 \vec{x}_2 b^*(\vec{x}_2) d^3 \vec{x}_1 a(\vec{x}_1) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \exp\{-i[E_p(t_2 - t_1) - \vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)]\} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Proč jsme vydělili člen s energií, je vidět z úpravy relativisticky invariantního výrazu

$$\begin{aligned} \delta(p^i p_i - m^2) d p^0 d p^1 d p^2 d p^3 &= \delta(E^2 - p^2 - m^2) d E d^3 \vec{p} = \\ \frac{1}{2 E_p} [\delta(E + E_p) + \delta(E - E_p)] d E d^3 \vec{p} &\Rightarrow \frac{d^3 \vec{p}}{2 E_p} = \text{inv} \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Označme $t = t_2 - t_1$ a $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a všimněme si chování funkce

$$G(\vec{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2 E_p} \exp\{i[\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p t]\} \quad . \quad (2.7)$$

Předpokládejme $E_p > 0$ a prostorupodobný interval $\lambda = \sqrt{-s^2} = \sqrt{r^2 - t^2}$. Integrací přes úhlové proměnné dostaneme

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d p \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} = \\ \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} d p \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituce $p = m \sinh \varphi$ a označení $r = \lambda \cosh \varphi_0$, $t = \lambda \sinh \varphi_0$ převedou integrál na

$$G(r, t) = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} d \varphi \exp\{i m \lambda \sinh(\varphi - \varphi_0)\} = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(m \lambda) \quad , \quad (2.9)$$

kde $K_0(x) = \int_0^{\infty} d y \cos(x \sinh y)$ je Besselova funkce. Pomocí vztahu $K'_0(x) = -K_1(x)$ prepíšeme (2.9) na

$$G(\lambda) = \frac{i m}{8\pi^2 \lambda} K_1(m \lambda) \quad . \quad (2.10)$$

3 Komplexní proměnná

Místo úpravy integrálu podle (2.8) napíšme

$$\begin{aligned} G(r, t) &= \frac{i}{4\pi^2 r} \int_0^{\infty} d p \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \sin(p r) \exp\{-i \sqrt{p^2 + m^2} t\} = \\ \frac{i}{4\pi^2 r} \int_m^{\infty} d \omega \sin(\sqrt{\omega^2 - m^2} r) \exp\{-i \omega t\} \quad . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nemusíme provádět detailní výpočet (3.1), ale pro prostorupodobný interval $-r < t < r$ využít následující věty

Věta: Necht'

(1) $F(\omega)$ je komplexní funkce reálné proměnné definovaná na intervalu $\omega \in [0, \infty)$ skoro všude.

(2) Pro všechna $t \in (-\infty, \infty)$ konverguje absolutně integrál

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad , \quad \text{tj.} \quad \int_0^{\infty} |F(\omega)| d\omega < \infty \quad (3.2)$$

(funkce $F(\omega)$ je absolutně integrabilní na $[0, \infty)$).

(3) Existuje interval $[a, b] \subset (-\infty, \infty)$ tak, že $f(t) = 0$ na $[a, b]$.

Pak $f(t)$ je identicky nulová na $[-\infty, \infty]$.

Důkaz: Definujme funkci $G(z)$ komplexní proměnné $z = t + i$ vztahem

$$G(z) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega z} d\omega \quad . \quad (3.3)$$

Funkce $f(t)$ je restrikcí $G(z)$ na reálnou osu, tj. $G(z)|_{\mathbb{R}} = f(t)$. Uvažujme $G(z)$ pouze na množině $\mathbb{C}_d = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \leq 0\}$, tj. v dolní polorovině komplexní roviny. Pak platí

$$\left| \int_0^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega z} d\omega \right| \leq \int_0^{\infty} |F(\omega) e^{-i\omega z}| d\omega \leq \int_0^{\infty} |F(\omega)| e^{\omega y} d\omega \leq \int_0^{\infty} |F(\omega)| d\omega \quad . \quad (3.4)$$

Integrál definující funkci $G(z)$ tedy konverguje (dokonce absolutně) v dolní polorovině.

Označme dále

$$\begin{aligned} u(t, y) &= \text{Re } G(z) = \int_0^{\infty} (\text{Re } F(\omega) \cos \omega t - \text{Im } F(\omega) \sin \omega t) e^{\omega y} d\omega \quad , \\ v(t, y) &= \text{Im } G(z) = \int_0^{\infty} (\text{Re } F(\omega) \sin \omega t + \text{Im } F(\omega) \cos \omega t) e^{\omega y} d\omega \quad . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Přímým výpočtem (derivování podle parametru je zajištěno absolutní konvergencí integrálů) se snadno prověří platnost Cauchyových - Riemannových podmínek

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial v(t, y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(t, y)}{\partial t} \quad . \quad (3.6)$$

Diferencovatelnost funkcí $u(t, y)$ a $v(t, y)$ je rovněž zřejmá ze vztahů, jimiž jsou definovány a s použitím absolutní konvergence integrálů. Funkce $G(z)$ je tedy holomorfním rozšířením funkce $f(t)$ z reálné osy do dolní poloroviny komplexní roviny. Vzhledem k tomu, že reálná osa má v této polorovině hromadné body, je toto rozšíření určeno jednoznačně.

Věta o jednoznačnosti: Necht' $G(z)$ je holomorfní v otevřené souvislé oblasti D .

Označme $N_G = \{z \in D \mid G(z) = 0\}$. Pak nastane právě jedna ze dvou možností

(1) N_G je tvořena izolovanými body.

(2) $N_G = D$ (tedy $G(z) \equiv 0$) $\Leftrightarrow N_G$ má v D alespoň jeden hromadný bod.

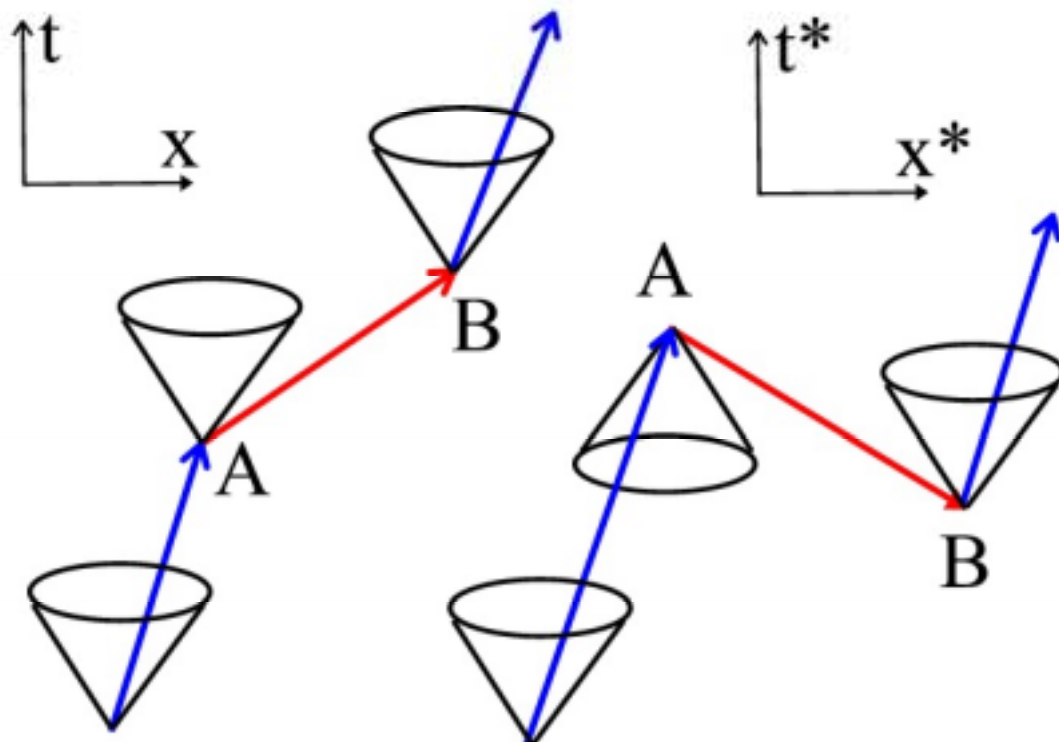
4 Antičástice podle Feynmana II

Podle uvedené věty nemůže být amplituda pravděpodobnosti přechodu rovna nule pro konečný interval času, speciálně nemůže být rovna nula vně světelného kužele bodu (t_A, \bar{x}_A) . Proto, je-li (levá část obrázku) $t_A < t_B$ dostáváme příspěvek k amplitudě od částic putujících nadsvětelnou rychlostí, pro které je interval prostorupodobný, tj. pro které platí $c^2(t_B - t_A)^2 - (\bar{x}_B - \bar{x}_A)^2 < 0$. Časová následnost událostí je pro události oddělené prostorupodobným intervalem závislá na zvolené inerciální soustavě. To snadno ukážeme: vztah pro Lorentzovu transformaci je (soustava K^* se pohybuje vzhledem k soustavě K podél osy x rychlostí V)

$$ct = \frac{ct^* + \frac{V}{c}x^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x^* + Vt^*}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (4.1)$$

Pro $V > 0$ platí

$$x_B - x_A > \frac{c^2}{V}(t_B - t_A) \Rightarrow t_B^* < t_A^* \quad (4.2)$$



V souřadné soustavě K (levý obrázek) se pohybuje částice volně do bodu (t_A, \vec{x}_A) , kde je rozptýlena, pak opět volně do bodu (t_B, \vec{x}_B) , kde se opět rozptylem dostane do původního stavu a pohybuje se jako volná částice. V souřadné soustavě K^* (pravý obrázek) vypadá však věc úplně jinak. Částice se pohybuje volně, ale v čase t_B^* vznikne v bodě (t_B^*, \vec{x}_B^*) dvojice částic, z nichž jedna se pohybuje proti směru času a druhá je ve stavu původní částice. Právě tato částice se pak v bodě (t_A^*, \vec{x}_A^*) setká s původní částicí a obě zmizí. Zbylá částice pokračuje volným pohybem.

5 Relativistická kvantová mechanika – historický přístup

V nerelativistické teorii máme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad \hat{H} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (5.1)$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) . \quad (5.2)$$

V relativistické teorii

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) , \quad (5.3)$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right) .$$

Invariantní délka čtyřvektoru impulzu je

$$p_i p^i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 . \quad (5.4)$$

Hamiltonián je tedy

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (5.5)$$

a analogie ke kvantování v souřadnicové reprezentaci

$$\hat{p}_i \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (5.6)$$

Analogie ke Schrödingerově rovnici je ovšem

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi(\vec{r}, t) . \quad (5.7)$$

6 Spinory v trojrozměrném prostoru

Spinor je dvoukomponentový objekt, jehož komponenty odpovídají dvěma možným hodnotám projekce spinu do osy z

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1/2) \\ \psi(-1/2) \end{pmatrix} , \quad (6.1)$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \end{pmatrix} .$$

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (6.2)$$

Pro zavedení kovariantních složek spinorů je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$g = (g_{AB}) = (g^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (6.3)$$

takže

$$\psi_A = g_{AB} \psi^B , \quad \psi^A = g^{BA} \psi_B \Rightarrow \psi_1 = \psi^2 , \quad \psi_2 = -\psi^1 . \quad (6.4)$$

Při rotaci souřadné soustavy se spinor transformuje jako

$$\psi' = \hat{U} \psi \quad , \quad (6.5)$$

kde

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad . \quad (6.6)$$

Matrice \hat{U} je zadána čtyřmi komplexními čísly, může však záviset jen na třech nezávislých parametrech (representuje nějaký prvek z grupy rotací v trojrozměrném prostoru). Omezující podmínky dostaneme takto: bilineární kombinace

$$\psi^1 \varphi^2 - \psi^2 \varphi^1 = \psi^A \varphi_A = -\psi_A \varphi^A \quad (6.7)$$

se transformuje jako

$$\psi'^A \varphi'_A = U^A_E \psi^E g_{AB} U^B_C g^{DC} \varphi_D = (U^T)^E_A g_{AB} U^B_C (g^T)^{CD} \psi^E \varphi_D = (ad - bc) \psi^A \varphi_A \quad (6.8)$$

Máme-li jedinou funkci, která se transformuje sama na sebe, musí to být skalár, tj. platí

$$ad - bc = 1 \quad . \quad (6.9)$$

Další invariantem je hustota pravděpodobnosti nalezení částice v nějakém bodě

$$\psi'^+ \psi' = \psi^+ \hat{U}^+ \hat{U} \psi = \psi^+ \psi \Rightarrow \hat{U}^+ = \hat{U}^{-1} \quad (6.10)$$

neboli

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad . \quad (6.11)$$

Ze vztahů (6.9) a (6.11) dostáváme pět podmínek pro čtyři komplexní čísla

$$d = a^* \quad , \quad c = -b^* \quad , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad . \quad (6.12)$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $\hat{P}^2 = \hat{1}$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0 a 2π nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \Rightarrow \hat{P} = \pm 1 \quad , \quad \hat{P}^2 = -1 \Rightarrow \hat{P} = \pm i \quad . \quad (6.13)$$

Bilineární kombinace (6.7) representovala skalární veličinu. K representaci vektoru se dostaneme nejjednodušeji tak, že vyjdeme z representace grupy rotací – tj. $SO(3)$ pomocí kulových funkcí Y_{lm} . Pro $l=1$ máme

$$Y_{10} = i \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} n_z, \quad Y_{1\pm 1} = \mp i \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/2} (n_x \pm i n_y), \quad (6.14)$$

kde složky jednotkového vektoru jsou

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \quad (6.15)$$

Vezměme teď symetrický spinor řádu $2j$. Obecný výraz je

$$\Psi_{jm} = \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{1/2} \psi_{\underbrace{11\dots 22\dots}_{j+m \quad j-m}}, \quad (6.16)$$

V našem případě ($j=1$) tedy máme buď srovnáním s výrazy (6.14)

$$\Psi_{1-1} = \frac{i}{2^{1/2}} (a_x - i a_y), \quad \Psi_{10} = i a_z, \quad \Psi_{11} = -\frac{i}{2^{1/2}} (a_x + i a_y) \quad (6.17)$$

nebo

$$\Psi_{1-1} = \psi_{22}, \quad \Psi_{10} = 2^{1/2} \psi_{12}, \quad \Psi_{11} = \psi_{11} \quad (6.18)$$

Srovnáním (6.18) a (6.17) pak dostaneme vztah mezi komponentami trojrozměrného vektoru a symetrického spinoru druhého řádu

$$\psi_{11} = -\frac{i}{2^{1/2}} (a_x + i a_y), \quad \psi_{12} = \frac{i}{2^{1/2}} a_z, \quad \psi_{22} = \frac{i}{2^{1/2}} (a_x - i a_y) \quad (6.19)$$

7 Spinory ve čtyřrozměrném časoprostoru

7.1 Vlastnosti spinorů

Stejně jako v nerelativistickém případě bude i teď spinor dvoukomponentový objekt

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(1/2) \\ \xi(-1/2) \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Ve čtyřrozměrném prostoru prostorová inverse mění znaménko pouze tří (x, y, z) ze čtyř (ct, x, y, z) časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P} \hat{L}(\vec{V}) = \hat{L}(-\vec{V}) \hat{P} \quad (7.2)$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^1 = \alpha \xi^1 + \beta \xi^2 \quad , \quad \xi'^2 = \gamma \xi^1 + \delta \xi^2 \quad , \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1 \quad , \quad (7.3)$$

nebo v maticovém zápisu

$$\xi' = L \xi \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \det L = 1 \quad . \quad (7.4)$$

Koeficienty α , β , γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Podmínka $\det L = 1$ říká, že matice L je z reprezentace grupy $SL(2, C)$, která má stejně jako Lorentzova grupa šest parametrů. Bilineární forma

$$\xi^1 \Xi^2 - \xi^2 \Xi^1 \quad (7.5)$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2).

Potom můžeme psát místo (7.5)

$$\xi^A \Xi_A = -\xi_A \Xi^A = inv \quad . \quad (7.6)$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1 \psi^{1*} + \psi^2 \psi^{2*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (7.3) unitární ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů ξ a η , transformujících se podle komplexně sdružených reprezentací Lorentzovy grupy, ξ podle (7.3) a η podle

$$\eta'^i = \alpha^* \eta^i + \beta^* \eta^2 \quad , \quad \eta'^2 = \gamma^* \eta^1 + \delta^* \eta^2 \quad , \quad \alpha^* \delta^* - \beta^* \gamma^* = 1 \quad . \quad (7.7)$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené reprezentace Lorentzovy grupy značíme tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (6.4). Vidíme, že transformace (7.7) odpovídá úměrnosti

$$\eta^{\dot{A}} \sim \xi^{*A} \quad . \quad (7.8)$$

Při prostorových rotacích se kovariantní složky trojrozměrného spinoru transformují jako komplexně sdružené složky kontravariantního spinoru $\psi_A \sim \psi^{*A}$. Tuto vlastnost si musí zachovat i složky čtyřrozměrného spinoru. S uvažováním (7.8) je tedy

$$\eta_A \sim \eta^{*\dot{A}} \sim \xi^A \quad . \quad (7.9)$$

Budem tedy podobně jako v (7.1) psát

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (7.10)$$

Působení operátoru prostorové inverse nemůže být násobkem jednotkové matice, jako tomu bylo u trojrozměrných spinorů. Bude proto operátor prostorové převádět ξ na η a naopak. Zapsáno ve složkách je (volíme reprezentaci, kde $\hat{P}^2 = -1$)

$$\hat{P}\xi^A = i\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta_{\dot{A}} = i\xi^A \quad (7.11)$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \quad (7.12)$$

Zápis některých vztahů výrazně zjednodušíme maticovým značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = (\xi_1 \quad \xi_2) \quad , \quad \tilde{\eta} = (\eta^1 \quad \eta^2) \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad . \quad (7.13)$$

Transformační vztahy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \xi' &= L\xi \quad , \quad \tilde{\xi}' = \tilde{\xi}L^{-1} \quad , \quad \hat{P}\xi = i\eta \quad , \quad \hat{P}\eta = i\xi \quad , \\ \tilde{\eta}' &= \tilde{\eta}L^+ \quad , \quad \eta' = (L^+)^{-1}\eta \quad , \quad \hat{P}\tilde{\xi} = -i\tilde{\eta} \quad , \quad \hat{P}\tilde{\eta} = -i\tilde{\xi} \quad . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dvojice bispinorů (ξ, η) a $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ representují mimo jiné skalární a vektorové veličiny. Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\xi}\xi + \tilde{\eta}\eta = \Xi_A\xi^A + H^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = \omega \quad , \\ \omega &= \tilde{\xi}\xi - \tilde{\eta}\eta = \Xi_A\xi^A - H^{\dot{A}}\eta_{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\omega = -\omega \quad . \end{aligned} \quad (7.15)$$

Máme totiž

$$\hat{P}\tilde{\xi}\hat{P}\xi = (-i\tilde{\eta})(i\eta) = \tilde{\eta}\eta \quad , \quad \hat{P}\tilde{\eta}\hat{P}\eta = (-i\tilde{\xi})(i\xi) = \tilde{\xi}\xi \quad . \quad (7.16)$$

Pro vektorové veličiny

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi\tilde{\eta} + \tilde{\xi}\eta = \left(\xi^A H^{\dot{B}} + \Xi^A \eta^{\dot{B}} \right) \quad , \\ \zeta &= \xi\tilde{\eta} - \tilde{\xi}\eta = \left(\xi^A H^{\dot{B}} - \Xi^A \eta^{\dot{B}} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.17)$$

Vzhledem k relacím

$$\begin{aligned} P(\xi\tilde{\eta} + \tilde{\xi}\eta) &= P(\xi^A H^{\dot{B}} + \Xi^A \eta^{\dot{B}}) = \eta_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B + H_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B = \eta\tilde{\xi} + H\tilde{\xi} \quad , \\ P(\xi\tilde{\eta} - \tilde{\xi}\eta) &= P(\xi^A H^{\dot{B}} - \Xi^A \eta^{\dot{B}}) = \eta_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B - H_{\dot{A}}\tilde{\xi}_B = \eta\tilde{\xi} - H\tilde{\xi} \quad . \end{aligned} \quad (7.18)$$

a spojení složek čtyřvektoru se složkami spinoru druhého řádu se smíšenými indexy (pro trojrozměrný vektor platí stejná úvaha jako v nerelativistickém případě, nultá (časupodobná) složka vektoru je úměrná hustotě pravděpodobnosti

$$\begin{aligned}
a^0 &= \frac{1}{2}(\zeta^{1i} + \zeta^{2\bar{2}}) = \frac{1}{2}(\zeta_{i1} + \zeta_{\bar{2}2}) \quad , \quad a^1 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\bar{2}} + \zeta^{2i}) = -\frac{1}{2}(\zeta_{i2} + \zeta_{\bar{2}1}) \quad , \\
a^2 &= \frac{i}{2}(\zeta^{1\bar{2}} - \zeta^{2i}) = -\frac{i}{2}(\zeta_{i2} - \zeta_{\bar{2}1}) \quad , \quad a^3 = \frac{1}{2}(\zeta^{1i} - \zeta^{2\bar{2}}) = -\frac{1}{2}(\zeta_{i1} - \zeta_{\bar{2}2})
\end{aligned} \tag{7.19}$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}(a^0, \vec{a}) = (a^0, -\vec{a}) \quad , \quad \hat{P}(a^0, \vec{a}) = (-a^0, \vec{a}) \quad . \tag{7.20}$$

Vztahy (7.19) je možno zapsat zkráceně jako

$$\zeta = \left(\zeta^{A\bar{B}} \right) = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0 \sigma_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta \vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta\} \quad . \tag{7.21}$$

7.2 Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi spinorem ζ a čtyřvektorem a^i využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Zopakujme potřebné značení

$$\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi \tilde{\eta} \sim \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{1i} & \zeta^{1\bar{2}} \\ \zeta^{2i} & \zeta^{2\bar{2}} \end{pmatrix} \quad , \\
\xi' &= L\xi \quad , \quad \tilde{\eta}' = \tilde{\eta} L^+ \quad , \quad \zeta' = L\zeta L^+ \quad .
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Pro infinitesimální Lorentzovu transformaci píšeme

$$\delta L = I + \lambda \quad , \quad \zeta' = \zeta + \lambda \zeta + \zeta \lambda^+ \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{7.23}$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci čtyřvektoru máme jednak

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \vec{a} - a^0 \vec{n} \delta V = \vec{a} - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \text{Tr}\{\zeta\} \quad , \\
a'^0 &= a^0 - \vec{a} \cdot \vec{n} \delta V = a^0 - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \cdot \text{Tr}\{\vec{\sigma} \zeta\}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

a také

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta' \vec{\sigma}\} = \vec{a} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\vec{\sigma} \lambda + \lambda^+ \vec{\sigma})\} \quad , \\
a'^0 &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta'\} = a^0 + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\lambda + \lambda^+)\} \quad .
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{\delta V}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad . \tag{7.26}$$

Konečná Lorentzova transformace (pro jednoduchat zápisu v rovině t - x) je

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}} = \cosh\phi x - \sinh\phi t \quad , \\t' &= \frac{t-Vx}{\sqrt{1-V^2}} = \cosh\phi t - \sinh\phi x \quad .\end{aligned}\tag{7.27}$$

Infinitezimální transformace je pak

$$x' = x - \delta V t = x - \delta\phi t \quad , \quad t' = t - \delta V x = t - \delta\phi x \quad .\tag{7.28}$$

Pro výpočet konečné Lorentzovy transformace budeme infinitezimální transformaci aplikovat násobně

$$\delta\phi = \frac{\phi}{n} \quad , \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{\phi}{2n} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right)^n = \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\} \quad .\tag{7.29}$$

Infinitezimální transformaci jsme charakterizovali parametrem $\delta\phi$ a nikoliv δV , protože

$$L(\phi_1)L(\phi_2) = L(\phi_1 + \phi_2) \quad , \quad L(V_1)L(V_2) \neq L(V_1 + V_2) \quad ,\tag{7.30}$$

jak se můžeme přesvědčit z (7.27). S využitím vztahů

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^{2n} = I \quad , \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^{2n+1} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\tag{7.31}$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\} = I \cosh \frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sinh \frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh \phi = V \quad .\tag{7.32}$$

Při infinitezimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \delta\theta (\vec{n} \times \vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta\theta}{2} \text{Tr} \{ \zeta (\vec{\sigma} \times \vec{n}) \} \quad , \quad a'^0 = a^0 \quad ,\tag{7.33}$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^+ = \frac{i\delta\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad .\tag{7.34}$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp \left\{ \frac{i\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right\} = I \cos \frac{\theta}{2} + i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \frac{\theta}{2} \quad .\tag{7.35}$$

8 Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

8.1 Diracova rovnice pro volnou částici

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory $\zeta = (\zeta^{AB}) = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0 \sigma_0$ nebo $\zeta = (\zeta_{AB}) = -\vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0 \sigma_0$ můžeme operátoru čtyřimpulsu \hat{p}^i přiřadit operátorový spinor \hat{p}^{AB} resp. \hat{p}_{AB} . Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{AB} \eta_B = m \xi^A \quad , \quad \hat{p}_{BA} \xi^A = m \eta_B \quad , \quad (8.1)$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

můžeme přepsat na

$$(\hat{p}_0 \sigma_0 + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma}) \eta = m \xi \quad , \quad (\hat{p}_0 \sigma_0 - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma}) \xi = m \eta \quad . \quad (8.3)$$

Zavedení bispinorů a γ matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (8.4)$$

přejde (8.3) na

$$(\gamma^0 \hat{p}_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{\vec{p}}) \psi = m \psi \quad . \quad (8.5)$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}} \equiv \gamma^i \hat{p}_i \quad , \quad (\underline{\hat{p}} - m) \psi = 0 \quad . \quad (8.6)$$

V souřadnicové reprezentaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\begin{aligned} (\underline{\hat{p}} - m c) \psi = 0 \quad , \quad \underline{\hat{p}} \rightarrow i \hbar \nabla = i \hbar \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} = i \hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \quad , \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m c^2 \beta \quad , \end{aligned} \quad (8.7)$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2 \delta_{ik} \quad , \quad \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0 \quad , \quad \beta^2 = 1 \quad . \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.2 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right) , \quad A_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad (8.9)$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impuls) oproti volné částici

$$p_i \rightarrow p_i - e A_i \quad (8.10)$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^i (\hat{p}_i - e \hat{A}_i) \psi = m c \psi , \quad (8.11)$$

kde γ^i je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové reprezentaci tvar (jsou možné i jiné reprezentace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^i = (\gamma^0, \vec{\gamma}) , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

a ψ je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové reprezentaci je

$$\hat{p}_i = i \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, i \hbar \vec{\nabla} \right) , \quad \hat{p}^i = \left(i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, -i \hbar \vec{\nabla} \right) \quad (8.13)$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left(\frac{1}{c} \gamma^0 \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - e \Phi \right) + \vec{\gamma} \cdot (i \hbar \vec{\nabla} + e \vec{A}) - m c \right) \psi = 0 . \quad (8.14)$$

nebo po přepsání

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e \hat{\vec{A}}) + \beta m c^2 + e \hat{\Phi} \right) \psi , \quad (8.15)$$

kde jsme označili

$$\gamma^0 = \beta , \quad \vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} . \quad (8.16)$$

8.3 Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{dt} \hat{F} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} . \quad (8.17)$$

Zavedeme operátor mechanického impulsu

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}}) . \quad (8.18)$$

Výpočet komutátorů

$$[\hat{H}, \hat{r}] = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \quad , \quad (8.19)$$

a trochu komplikovaněji

$$[\hat{H}, \hat{p} - e \vec{A}(\hat{r})] = -\frac{e\hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{ec\hbar}{i} \vec{\nabla}(\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) - \frac{ec\hbar}{i} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad . \quad (8.20)$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\alpha} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad (8.21)$$

dostaneme

$$[\hat{H}, \hat{p} - e \vec{A}(\hat{r})] = -\frac{e\hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{ec\hbar}{i} \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (8.22)$$

Tedy

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = c \vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d\hat{\pi}}{dt} = -e \vec{\nabla} \Phi + ec \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (8.23)$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

8.4 Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left(i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i\hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - mc \right) \psi = 0 \quad (8.24)$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů $(\gamma^i)^+ = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$, tedy

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0 \quad , \quad (\vec{\gamma})^+ = -\vec{\gamma} \quad (8.25)$$

napišeme jako

$$\left(-i\hbar (\gamma^0)^T \frac{\partial}{c \partial t} + i\hbar (\vec{\gamma})^T \cdot \vec{\nabla} - mc \right) \psi^* = 0 \quad . \quad (8.26)$$

Rovnici (8.26) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+ \left(-i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i\hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - mc \right) = 0 \quad (8.27)$$

a po zavedení Diracova sdružení $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ s využitím antikomutačních relací γ matic máme

$$\bar{\psi} \left(i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m c \right) = 0 \quad . \quad (8.28)$$

S použitím symbolů $\underline{a} = \gamma^i a_i$ můžeme (8.24) a (8.28) zapsat jako

$$(\underline{\hat{p}} - m c) \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} (\underline{\hat{p}} + m c) = 0 \quad . \quad (8.29)$$

Vynásobení první rovnice v (8.29) zleva $\bar{\psi}$ a druhé rovnice zprava ψ dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad j^k = \bar{\psi} \gamma^k \psi \quad . \quad (8.30)$$

Časupodobná komponenta je $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi > 0$.

8.5 Standardní representace

Od spinorové representace přejdeme ke standardní representaci unitární transformací

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta) \quad , \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta) \quad . \quad (8.31)$$

Vzhledem k chování ξ a η při působení operátoru parity máme

$$\hat{P} \varphi = i \varphi \quad , \quad \hat{P} \chi = -i \chi \quad . \quad (8.32)$$

Rovnice pro tyto nové spinory získáme sečtením a odečtením rovnic v (8.3)

$$\hat{p}_0 \sigma_0 \varphi - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \chi = m \varphi \quad , \quad -\hat{p}_0 \sigma_0 \chi + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \varphi = m \chi \quad . \quad (8.33)$$

Rovnice (8.5) a (8.7) mají ve standardní representaci stejný tvar, matice v nich jsou po transformaci

$$\gamma \rightarrow \hat{U} \gamma \hat{U}^+ \quad (8.34)$$

vyjádřeny jako

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (8.35)$$

Matice operátoru spinu je ve všech representacích stejná

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ \psi^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \\ 0 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \quad . \quad (8.36)$$

9 Rovinné vlny

Dosadíme-li do (8.29) rovinné vlny (volba normovací konstanty $\varepsilon = c p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ se ozřejmí později)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(p) \exp(-i p_i x^i) \quad , \quad \psi(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(-p) \exp(i p_i x^i) \quad , \quad (9.1)$$

dostáváme

$$(\underline{p} - mc)u(p) = 0 \quad , \quad (\underline{p} + mc)u(-p) = 0 \quad (9.2)$$

a

$$\bar{u}(p)(\underline{p} - mc) = 0 \quad , \quad \bar{u}(-p)(\underline{p} + mc) = 0 \quad . \quad (9.3)$$

podmínkou řešitelnosti je $p^i p_i = m^2 c^2$. Bispinory normujeme tak, že

$$\bar{u}(p)u(p) = 2mc^2 \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2mc^2 \quad . \quad (9.4)$$

Násobením zleva první rovnice v (9.2) $\bar{u}(p)$ a druhé rovnice $\bar{u}(-p)$ vede na

$$\bar{u}(\pm p) \gamma^j p_j u(\pm p) = 2m^2 c^3 = 2c p^i p_i \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\pm p) \gamma^j u(\pm p) = 2c p^j \quad . \quad (9.5)$$

Pro čtyřvektor toku pak

$$j^i = \bar{\psi}(\pm p) \gamma^i \psi(\pm p) = \frac{c p^i}{\varepsilon} = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) \quad . \quad (9.6)$$

Ve standardní reprezentaci, kde píšeme

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \quad (9.7)$$

se Diracova rovnice rozpadá na dvě vázané rovnice

$$\begin{aligned} (\varepsilon - mc^2)\phi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \chi &= 0 \quad , \\ (\varepsilon + mc^2)\chi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \phi &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Máme pak

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + mc^2} w(+ \\ \sqrt{\varepsilon - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(+ \end{pmatrix} \quad , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(- \\ \sqrt{\varepsilon + mc^2} w(- \end{pmatrix} \quad , \quad (9.9)$$

kde $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ a $w(\pm)$ jsou libovolné dvoukomponentové veličiny, splňující $w^+(\pm)w(\pm) = 1$.

Pro relativisticky sdružené bispinory máme z (9.9)

$$\begin{aligned}\bar{u}(p) &= \left(\sqrt{\varepsilon + mc^2} w^+(+) \quad -\sqrt{\varepsilon - mc^2} w^+(+) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right) , \\ \bar{u}(-p) &= \left(\sqrt{\varepsilon - mc^2} w^+(-) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad -\sqrt{\varepsilon + mc^2} w^+(-) \right) .\end{aligned}\tag{9.10}$$

10 Transformace Diracovy rovnice

10.1 Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)

Hamiltonián je

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta mc^2 .\tag{10.1}$$

Ve standardní reprezentaci jsou matice $\vec{\alpha}$ a β dány vztahy

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} .\tag{10.2}$$

Uvažujme o takové unitární (a na čase explicitně nezávislé) transformaci, která by odstranila operátory, které vážou velké komponenty s malými

$$\hat{U} = \exp(i \hat{S}) , \quad \hat{S} = \hat{S}^\dagger , \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = 0 .\tag{10.3}$$

Platí

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= \exp(i \hat{S}) |\psi\rangle , \\ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle &= \exp(i \hat{S}) \hat{H} |\psi\rangle = \exp(i \hat{S}) \hat{H} \exp(-i \hat{S}) |\psi'\rangle = \hat{H}' |\psi'\rangle .\end{aligned}\tag{10.4}$$

Velké a malé komponenty spojuje operátor $c \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}$. Uhádneme tedy poměrně snadno potřebný tvar \hat{S}

$$\exp(i \hat{S}) = \exp(\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \theta) = \cos\left(\left|\hat{\vec{p}}\right| \theta\right) + \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} \frac{\sin\left(\left|\hat{\vec{p}}\right| \theta\right)}{\left|\hat{\vec{p}}\right|} , \quad \theta = \theta(\hat{\vec{p}}) .\tag{10.5}$$

Pro transformovaný hamiltonián dostáváme

$$\begin{aligned}
\hat{H}' &= \exp(i\hat{S})\hat{H}\exp(-i\hat{S}) = \\
&\left(\cos\left(|\hat{p}|\theta\right) + \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{p}\frac{\sin\left(|\hat{p}|\theta\right)}{|\hat{p}|} \right) (c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc^2) \left(\cos\left(|\hat{p}|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{p}\frac{\sin\left(|\hat{p}|\theta\right)}{|\hat{p}|} \right) \\
&= (c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc^2) \left(\cos\left(|\hat{p}|\theta\right) - \beta\vec{\alpha}\cdot\hat{p}\frac{\sin\left(|\hat{p}|\theta\right)}{|\hat{p}|} \right)^2 = \\
&(c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} + \beta mc^2) \exp(-2\beta\vec{\alpha}\cdot\hat{p}\theta) = \\
&c\vec{\alpha}\cdot\hat{p} \left[\cos\left(2|\hat{p}|\theta\right) - mc\frac{\sin\left(2|\hat{p}|\theta\right)}{|\hat{p}|} \right] + \beta mc^2 \left[\cos\left(2|\hat{p}|\theta\right) + |\hat{p}|\frac{\sin\left(2|\hat{p}|\theta\right)}{mc} \right] .
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Položíme-li teď

$$\tan\left(2|\hat{p}|\theta\right) = \frac{|\hat{p}|}{mc} , \tag{10.7}$$

dostáváme výsledný hamiltonián

$$\hat{H}' = \beta\sqrt{m^2c^4 + \hat{p}^2c^2} . \tag{10.8}$$

10.2 Rovnice částice v elektromagnetickém poli

Hamiltonián v tomto případě je

$$\hat{H} = c\vec{\alpha}\cdot(\hat{p} - e\vec{A}) + \beta mc^2 + e\Phi = \beta mc^2 + \hat{E} + \hat{O} , \tag{10.9}$$

kde

$$\hat{E} = e\Phi , \quad \hat{O} = c\vec{\alpha}\cdot(\hat{p} - e\vec{A}) . \tag{10.10}$$

Platí

$$\beta\hat{O} = -\hat{O}\beta , \quad \beta\hat{E} = \hat{E}\beta . \tag{10.11}$$

Uvažujme opět o takové unitární (ale teď už možná na čase závislé) transformaci, která by odstranila liché operátory, které vážou velké komponenty s malými a ponechala jen operátory sudé

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}) , \quad \hat{S} = \hat{S}^+ . \tag{10.12}$$

Pro $|\psi'\rangle = \exp(i\hat{S})|\psi\rangle$ dostáváme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S})|\psi'\rangle = \exp(-i\hat{S})i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S}) \right) |\psi'\rangle = \hat{H}|\psi'\rangle = \hat{H} \exp(-i\hat{S})|\psi'\rangle \quad (10.13)$$

odkud pak

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle \quad , \quad \hat{H}' = \exp(i\hat{S}) \left(\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp(-i\hat{S}) \quad (10.14)$$

Mějme výraz (chápaný jako funkce parametru λ , který pak položíme roven jedné)

$$F(\lambda) = \exp(i\hat{B}\lambda) \hat{A} \exp(-i\hat{B}\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (10.15)$$

Derivováním (10.15) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= i[\hat{B}, \hat{A}] \quad , \\ \dots & \quad , \\ \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} &= i^n [\hat{B}, [\hat{B}, [\dots [\hat{B}, \hat{A}] \dots]]] \quad , \end{aligned} \quad (10.16)$$

takže ponecháme-li v rozvoji pouze členy do třetího řádu (nebo čtvrtého, násobí-li člen klidovou energií) v \hat{S} , dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{i}{6}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \\ & \frac{m c^2}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \beta]]]] - \hbar \dot{S} - \frac{i\hbar}{2} [\hat{S}, \dot{S}] + \frac{\hbar}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, \dot{S}]] \quad . \end{aligned} \quad (10.17)$$

Ponecháme-li v (10.17) jen členy nejnižšího řádu, máme

$$\hat{H}' = \beta m c^2 + \hat{E} + \hat{O} + i m c^2 [\hat{S}, \beta] \quad (10.18)$$

Tento tvar vede k tomu, že zkusíme zvolit

$$\hat{S} = -\frac{i}{2m c^2} \beta \hat{O} \quad (10.19)$$

S označením matice spinu (ta je stejná ve spinorové i standardní reprezentaci)

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (10.20)$$

máme po delších výpočtech výsledný hamiltonián ve tvaru

$$\hat{H}' = \beta \left(mc^2 + \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\vec{p}}^4 \right) + e\Phi - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{\vec{p}}) - \frac{ie\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (10.21)$$

Pro rotačně souměrné pole máme

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (10.22)$$

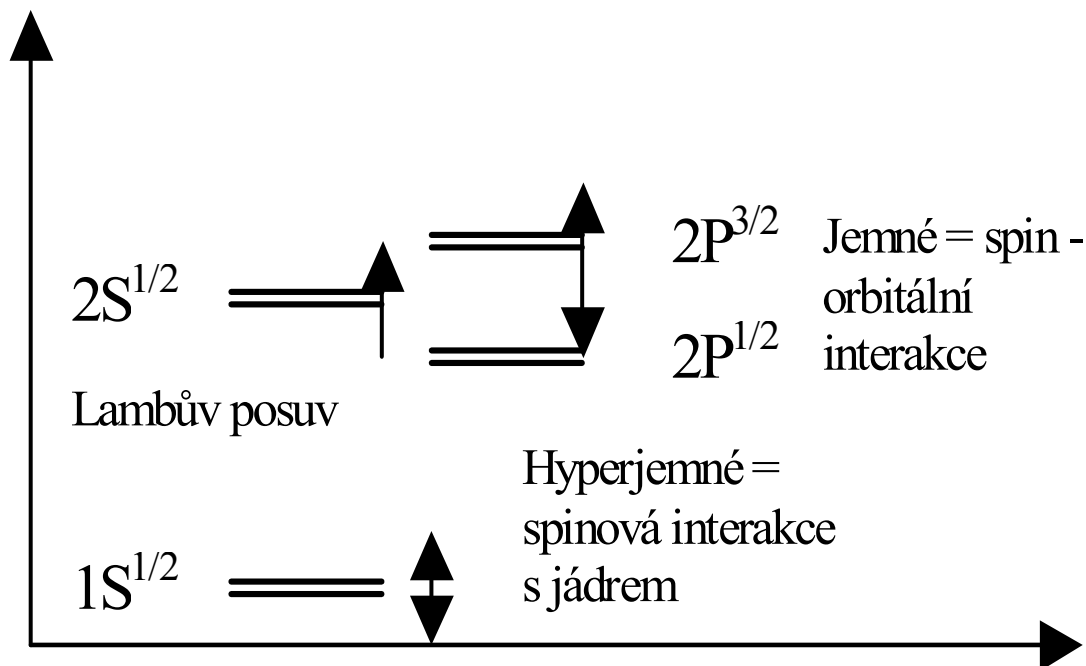
a příslušný člen nabude tvaru

$$-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{\vec{p}}) = \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} \quad , \quad (10.23)$$

kterým popisujeme spin - orbitální interakci. Poslední člen se nazývá Darwinův, jeho vznik se dá se chápat jako rozmazání energie Coulombova působení

$$\langle V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) \rangle \approx \left\langle \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right\rangle \approx \frac{1}{6} \Delta V \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \quad . \quad (10.24)$$

Schéma nejnižších hladin je na obrázku:



11 Rozptyl elektronu na jádře

Budeme počítat rozptyl elektronu na (nekonečně) těžkém jádře náboje Ze . Volba souřadné soustavy je velmi důležitá pro zjednodušení výpočtu. Impuls elektronu před rozptylem ať je ve směru osy x , impuls elektronu po rozptyle ať leží v rovině x - y (značíme

$$\underline{p} \equiv p_i \gamma^i = (E/c) \gamma^t - \vec{p} \vec{\gamma}$$

$$\underline{p}_1 = \gamma^t \frac{E_1}{c} - \gamma^x p_{1x} \quad , \quad \underline{p}_2 = \gamma^t \frac{E_2}{c} - \gamma^x p_{2x} - \gamma^y p_{2y} \quad . \quad (11.1)$$

Čtyřvektor potenciálu je

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r}, \vec{A} = 0 \right) \Rightarrow \underline{A} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r} \gamma^t \quad . \quad (11.2)$$

Připomeňme Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - e \underline{A} - mc) |\psi\rangle = 0 \quad , \quad \underline{p} = i \hbar \underline{\nabla} \quad (11.3)$$

a vyjádření matic ve standardní reprezentaci

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad . \quad (11.4)$$

Počáteční a koncový stav je, pokud píšeme i obvykle vynechávaný normovací faktor

$$\langle x | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_1 V}} u_1 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{1x} x} \quad , \quad \langle x | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_2 V}} u_2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{2x} x} \quad . \quad (11.5)$$

Amplituda pravděpodobnosti přechodu je

$$\langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{u}_2 \gamma^t u_1}{2\sqrt{E_1 E_2 V}} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt \quad . \quad (11.6)$$

Pro integrály máme vyjádření

$$\int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt = \frac{\sin\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}} e^{i\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T} \quad . \quad (11.7)$$

První integrál počítáme jako

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{\infty} dr r e^{iqr \cos \vartheta - \lambda r} = \frac{4\pi}{q} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dr r \sin(qr) e^{-\lambda r} =$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\lambda^2 + q^2} = \frac{4\pi}{q^2} . \quad (11.8)$$

Pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$w(1 \rightarrow 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle \right|^2 =$$

$$\frac{|\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2}{4 \hbar^2 E_1 E_2 V^2} \left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2 \hbar} T \right)}{\left(\frac{E_1 - E_2}{2 \hbar} \right)^2 T} . \quad (11.9)$$

Jedním z vyjádření Diracovy delta funkce je

$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} . \quad (11.10)$$

Využitím (11.10) upravíme vztah (11.9) na

$$w(1 \rightarrow 2) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2}{4 E_1 E_2 V^2} \left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \delta(E_2 - E_1) . \quad (11.11)$$

Hustota stavů v okolí koncového stavu (stav 2) je ($E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$)

$$d\rho = \frac{V d^3 \vec{p}_2}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{V E_2 p_2}{(2\pi \hbar)^3 c^2} d\Omega dE_2 \quad (11.12)$$

a tak můžeme psát (platí $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$)

$$d w = \frac{V d\Omega}{(2\pi \hbar)^3 c^2} \int w(1 \rightarrow 2) E_2 p_2 dE_2 = \frac{p_1}{E_1 V} |\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2 \left(\frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 d\Omega . \quad (11.13)$$

Poněvadž $\vec{v} = \partial E / \partial \vec{p}$, máme pro hustotu toku částic výraz

$$j = \frac{v_1}{V} = \frac{p_1 c^2}{E_1 V} \quad (11.14)$$

a pro diferenciální účinný průřez pak

$$d\sigma = |\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2 \left(\frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 q^2} \right)^2 d\Omega , \quad q^2 = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2 = 4 p_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} . \quad (11.15)$$

Nyní zvolme bispinory jako

$$u^{(1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} \begin{pmatrix} E+mc^2 \\ 0 \\ c(p_x + i p_y) \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(-1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+mc^2 \\ 0 \\ c(p_x - i p_y) \end{pmatrix}, \quad (11.16)$$

které získáme z (9.9) volbou

$$w(+)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(-)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

Pro složky hybnosti máme

$$p_{1x} + i p_{1y} = p_1, \quad p_{2x} + i p_{2y} = p_1 \exp\{i\theta\}. \quad (11.18)$$

Platí

$$\left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = \frac{\left| (E_1 + mc^2)^2 + p_1^2 c^2 e^{-i\theta} \right|^2}{(E_1 + mc^2)^2} = 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (11.19)$$

kde výpočet zjednodušuje

$$\bar{u}_2 \gamma^t u_1 = u_2^\dagger \gamma^t \gamma^t u_1 = u_2^\dagger u_1. \quad (11.20)$$

Obdobně spočteme další výrazy, takže máme

$$\left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 = 0, \quad (11.21)$$

$$\left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 = 0, \quad \left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 = 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Pro diferenciální účinný průřez rozptylu je tedy konečný výraz

$$d\sigma_{rel} = \left(\frac{mc^2}{E_1} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\sigma_{Ruth}, \quad d\sigma_{Ruth} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_1^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (11.22)$$

12 Invariantní účinný průřez

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice 2 počet srážek v objemu dV za čas dt

$$d\nu = n_1 \sigma v_{rel} dt n_2 dV, \quad d\nu = A n_1 n_2 dt dV, \quad (12.1)$$

kde v_{rel} je velikost rychlosti částice 1 v klidové soustavě částice 2, n_1 a n_2 jsou hustoty částic a konečně σ je účinný průřez. Veličiny dV a $dt dV$ jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina $An_1 n_2$, přičemž A musí v klidové soustavě jedné z částic přejít na $v_{rel} \sigma$. Máme

$$n dV = n_0 dV_0 \Rightarrow n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n_0 \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \quad (12.2)$$

a tedy

$$An_1 n_2 = inv'' \Rightarrow A \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = inv' \Rightarrow A = \frac{p_1 \cdot p_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} inv' \quad , \quad (12.3)$$

kde skalární součin označujeme jako $p_1 \cdot p_2 = p_{1i} p_2^i$. V klidové soustavě částice 2 je

$$A = v_{rel} \sigma \quad , \quad p_2^i = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c} = m_2 c, \vec{p}_2 = 0 \right) \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} \Rightarrow inv = v_{rel} \sigma c^2 \quad (12.4)$$

a dále

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} m_2 c \Rightarrow \frac{v_{rel}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 m_2 c^2}{p_1 \cdot p_2} \right)^2} \quad . \quad (12.5)$$

Spojením vztahů (12.1), (12.3) a (12.4) dostáváme

$$dw = \frac{dV}{dt} = c \sigma n_1 n_2 \frac{c^2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} dV \quad . \quad (12.6)$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$\sigma = \frac{dw}{J n_2 dV} \quad , \quad J = c^3 \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} n_1 \quad . \quad (12.7)$$

V těžišťové soustavě je $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, takže

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} + \vec{p}^2 \right)^2 - \left(\frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \left(\frac{\mathcal{E}_2^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) = \vec{p}^2 \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{c^2} \quad (12.8)$$

a tedy

$$J = c^2 |\vec{p}| \left(\frac{1}{\mathcal{E}_1} + \frac{1}{\mathcal{E}_2} \right) n_1 = (v_1 + v_2) n_1 \quad , \quad (12.9)$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku. V laboratorní soustavě pak

$$J = \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot n_1} \quad . \quad (12.10)$$

13 Spinová matice hustoty

Shrneme nejprve vyjádření γ matic a Σ matice ve spinorové a standardní reprezentaci.

Matice γ^5 a $\bar{\Sigma}$ jsou definovány jako

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad \bar{\Sigma} = \gamma^0\bar{\gamma}\gamma^5 \quad . \quad (13.1)$$

Ve spinorové reprezentaci je

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

a ve standardní reprezentaci

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad . \quad (13.3)$$

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$\begin{aligned} (\underline{p} - m)u(p) = 0 \quad , \quad (\underline{p} + m)u(-p) = 0 \quad , \\ \bar{u}(p)(\underline{p} - m) = 0 \quad , \quad \bar{u}(-p)(\underline{p} + m) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (13.4)$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2m \quad . \quad (13.5)$$

Ve standardní reprezentaci máme

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} + m} w(p) \\ \sqrt{\mathcal{E} - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(p) \end{pmatrix} \quad , \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} - m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(-p) \\ \sqrt{\mathcal{E} + m} w(-p) \end{pmatrix} \quad , \quad (13.6)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad , \quad w^+(p)w(p) = w^+(-p)w(-p) = 1 \quad .$$

Pro relativisticky sdružené výrazy pak

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \left(\sqrt{\mathcal{E} + m} w^+(p) \quad - \sqrt{\mathcal{E} - m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) \right) \quad , \\ \bar{u}(-p) &= \left(\sqrt{\mathcal{E} - m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) \quad - \sqrt{\mathcal{E} + m} w^+(p) \right) \quad . \end{aligned} \quad (13.7)$$

V těchto výrazech jsou $w(p)$ a $w(-p)$ libovolné normované dvoukomponentové veličiny.

Uvedené volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je například

$$\begin{aligned}
w(p)^{(\sigma=1/2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & w(-p)^{(\sigma=1/2)} &= -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w(p)^{(\sigma=-1/2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & w(-p)^{(\sigma=-1/2)} &= -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{13.8}$$

Platí

$$\sum_{\sigma} w(p)^{(\sigma)} w^+(p)^{(\sigma)} = \sum_{\sigma} w(-p)^{(\sigma)} w^+(-p)^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.9}$$

Pro bispinory pak máme

$$\sum_{\sigma} u(p)^{(\sigma)} u^+(p)^{(\sigma)} = \underline{p} + m, \quad \sum_{\sigma} u(-p)^{(\sigma)} u^+(-p)^{(\sigma)} = \underline{p} - m. \tag{13.10}$$

Prvky spinové matice hustoty jsou v čistém stavu triviální výrazy

$$\rho_{AB}(p) = u_A(p) \bar{u}_B(p). \tag{13.11}$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1

$$\text{Tr}\{\rho(p)\} = \sum_A u_A(p) \bar{u}_A(p) = \bar{u}(p) u(p) = 2m. \tag{13.12}$$

Ze (13.11) je zřejmé, že matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude splňovat Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - m)\rho(p) = 0, \quad \rho(p)(\underline{p} - m) = 0. \tag{13.13}$$

V čistém stavu spočteme střední hodnotu spinu podle vztahu

$$\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2} \int \psi^* \vec{\Sigma} \psi d^3 \vec{r} = \frac{1}{4\varepsilon} u^*(p) \vec{\Sigma} u(p) = \frac{1}{4\varepsilon} \bar{u}(p) \gamma^0 \vec{\Sigma} u(p) \tag{13.14}$$

a odpovídající výraz pro stav částečné polarizace je pak

$$\begin{aligned}
\langle \hat{s} \rangle &= \frac{1}{4\varepsilon} \sum_A \sum_B \bar{u}_A(p) (\gamma^0 \vec{\Sigma})_{AB} u_B(p) = \\
&= \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr}\{\rho(p) \gamma^0 \vec{\Sigma}\} = \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr}\{\rho(p) \gamma^5 \vec{\gamma}\}.
\end{aligned} \tag{13.15}$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme $\vec{\zeta} = 2\langle \hat{s} \rangle$, platí tedy pro čistý stav $|\vec{\zeta}| = 1$, pro smíšený stav $|\vec{\zeta}| < 1$. Čtyřvektory impulsu a spinu v klidové soustavě jsou $p^i = (m, \vec{0})$ a $a^i = (0, \vec{\zeta})$ a v libovolné inerciální souřadné soustavě tedy musí platit

$$p \cdot p = m^2, \quad a \cdot a = -\zeta^2, \quad p \cdot a = 0. \tag{13.16}$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^0 = \frac{\vec{\zeta} \vec{p}}{m} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{(\vec{\zeta} \vec{p}) \vec{p}}{m(\varepsilon + m)} \quad . \quad (13.17)$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impuls jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_n(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m) \quad . \quad (13.18)$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{4m}(\underline{p} + m) \tilde{\rho}(\underline{a})(\underline{p} + m) \quad , \quad \tilde{\rho}(\underline{a}=0) = 1 \quad . \quad (13.19)$$

Připomeňme si, že platí $(\underline{p} + m)^2 = 2m(\underline{p} + m)$. Matice $\tilde{\rho}(\underline{a})$ má na čtyřvektoru \underline{a} záviset lineárně. Napišme tedy $\tilde{\rho}(\underline{a}) = 1 - A \gamma^5 \underline{a}$. Konstantní matici A určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A \gamma^5 (\vec{\gamma} \vec{\zeta}))(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A \gamma^5 (\vec{\gamma} \vec{\zeta})) \quad , \\ \vec{\zeta} = 2 \langle \hat{s} \rangle &= \frac{1}{2m} \text{Tr} \{ \rho(p) \gamma^5 \vec{\gamma} \} = -\frac{1}{4} A \text{Tr} \{ (\vec{\gamma} \vec{\zeta}) \vec{\gamma} \} = A \vec{\zeta} \end{aligned} \quad (13.20)$$

a musí být tedy $A=1$. Protože je $\underline{a} \cdot \underline{p} = 0$, \underline{p} antikomutuje s \underline{a} a komutuje s $\gamma^5 \underline{a}$. Výraz pro spinovou matici hustoty lze přepsat do konečného tvaru

$$\rho(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (13.21)$$

Vektor spinové polarizace lze naopak z matice hustoty spočítat pomocí vztahu

$$a^i = \frac{1}{2m} \text{Tr} \{ \rho(p) \gamma^5 \gamma^i \} \quad . \quad (13.22)$$

Obdobně by bylo možné odvodit obecný vztah pro spinovou matici hustoty pozitronů

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}(\underline{p} - m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (13.23)$$

14 Spinové středování

Máme-li ve Feynmanově diagramu jen jednu fermionovou čáru (rozptyl na vnějším poli, Comptonův rozptyl, anihilace nebo kreace páru), můžeme použít následujícího způsobu

spinového středování (středování přes počáteční spinové stavy a součtu přes koncové spinové stavy pro rozptyl, středování přes spinové stavy elektronu a positronu při anihilaci nebo kreaci). Maticový element M_{fi} je ve zmíněných případech možno zapsat jako

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} = \bar{u}_f Q u_i \quad . \quad (14.1)$$

Potom máme

$$M_{fi}^* = \left(\sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} \right)^* = \sum_{A,B,C} u_{fC} \gamma_{CA}^{0*} Q_{AB}^* u_{iB}^* = \sum_{A,B,C,D,E} u_{iB}^* \gamma_{BD}^0 \gamma_{DE}^0 Q_{BA}^+ \gamma_{AC}^0 u_{fC} = \bar{u}_i \bar{Q} u_f \quad , \quad (14.2)$$

kde jsme využili vlastností $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^{0+} = \gamma^0$ a označili $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$. Můžeme teď psát

$$|M_{fi}|^2 = \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} u_f = \text{Tr} \{ u_f \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} \} \quad . \quad (14.3)$$

Takže máme

$$\begin{aligned} 2 \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{rozptyl elektronů na vnějším potenciále} \\ 2 \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{Comptonův rozptyl} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(-p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{anihilace páru} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(-p) \bar{Q} \} & \text{kreace páru} \end{aligned} \quad (14.4)$$